УДК 624.046.5

Б. А. Антуфьев

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИСКРЕТНО ПОДКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ В ПОТОКЕ ГАЗА

Рассматривается приближенное решение задачи о дивергенции – статической неустойчивости пластины, дискретно подкрепленной системой ребер жесткости в потоке газа. Приближенно определена критическая скорость дивергенции и проанализировано влияние на нее ребер жесткости.

Рассматриваемая в статье проблема называется задачей дивергенции и является одной из основных задач статической аэроупругости – специфического раздела механики тонкостенных конструкций, в котором их деформации, вызываемые действием только аэродинамических и упругих сил, оказывают существенное влияние на нагрузки. В дальнейшем под термином «дивергенция» будем понимать статическую неустойчивость тонкостенной конструкции в потоке газа. Скорость набегающего потока, при которой происходит потеря устойчивости, называется критической скоростью дивергенции, а ее определение составляет основную цель задачи. Рассматриваемое явление характерно для несущих поверхностей авиационных и ракетных конструкций, а его изучение необходимо для обеспечения безопасности полетов. В научной литературе наиболее исследована дивергенция прямых и стреловидных крыльев большого удлинения, имеющая в основном крутильный характер. Исследована также изгибная форма дивергенции плоских гладких панелей обшивки крыльев. Однако в реальных авиационных и ракетных конструкциях все панели дискретно подкрепляются силовыми элементами типа стрингеров, которые «ужесточают» систему и, следовательно, ведут к увеличению критической скорости дивергенции. Аналитические решения таких задач, позволяющие качественно оценить это увеличение даже в первом приближении, в научной литературе отсутствуют. Изучению этой проблемы и посвящена предлагаемая работа.

Рассмотрим тонкую упругую пластину с толщиной h, бесконечно длинную в направлении оси y, которая жестко закреплена по одной из сторон и свободна – на другой, а ребра жесткости (стрингеры) расположены на одинаковых расстояниях 2c друг от друга (рис. 1).

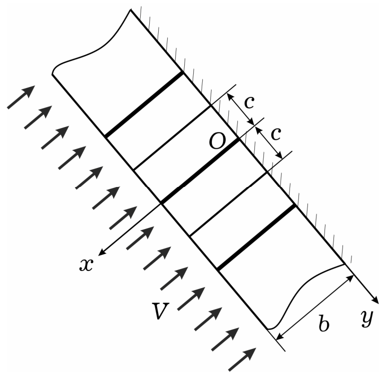

Рис. 1

Считаем, что нейтральные линии стрингеров лежат в срединной поверхности пластины, вследствие чего их можно рассматривать как упругие одномерные включения. Поток газа направлен параллельно невозмущенной срединной поверхности пластины. Строго говоря, обтекание искривленной в двух направлениях поверхности пластины представляет очень сложную проблему аэродинамики, которая еще более усложняется в рассматриваемом случае, когда ее изогнутая поверхность не задана, а зависит от распределения аэродинамической нагрузки и расположения подкрепляющих ребер. Однако при больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока V решение может быть упрощено, если воспользоваться в первом приближении результатами «поршневой» теории [1–4], в соответствие с которой местное аэродинамическое давление q_a на искривленную поверхность пластины пропорционально местному углу атаки:

$$q_a = æV \frac{dw}{dx}, \qquad (1)$$

где $æ$ – константа, определяемая равенством $æ = c_p p_\infty/(a_\infty c_V)$, p_∞, a_∞ – давление и скорость звука в невозмущенном потоке; c_p, c_V – теплоемкости при постоянном давлении и постоянном объеме; dw/dx – местный угол атаки, определяемый через прогиб пластины w. В силу равномерного расположения ребер вдоль оси y в дальнейшем будем рассматривать лишь участок пластины, мысленно выделенный сечениями, параллельными оси x, при $y = \pm c$ делящими расстояние между стрингерами пополам (рис. 1). В центре этого участка вдоль оси x при $y = 0$ прикреплен упругий стрингер, а на его краях при $y = \pm c$ ставим граничные условия симметрии.

Для решения задачи мысленно отделяем ребро жесткости от пластины и заменяем его действие распределенными в срединной поверхности вдоль линии контакта тел $0 \le x \le b$ при $y = 0$ погонными нормальными усилиями $p(x)$. С учетом всех принятых допущений уравнение равновесия пластины в изогнутом состоянии под действием аэродинамической (1) и полосовой нагрузки $p(x)$ принимает вид

$$D\Delta^2\Delta^2 w = -p\delta(y-0) + æV\frac{dw}{dx}, \qquad (2)$$

где Δ^2 – оператор Лапласа, D – цилиндрическая жесткость пластины, $\delta(y-0)$ – дельта-функция Дирака, определяющая положение стрингера. Уравнение изгиба ребра жесткости, находящегося только под действием реакции контакта p, имеет вид

$$EJ\frac{d^4U}{dx^4} = p, \qquad (3)$$

где EJ – изгибная жесткость стрингера, а U – его нормальные перемещения. Подставляя p из выражения (3) в (2), получим разрешающее уравнение задачи:

$$D\Delta^2\Delta^2 w + EJ\frac{d^4w}{dx^4}\delta(y-0) - æV\frac{dw}{dx} = 0. \qquad (4)$$

Точное его решение в силу разрывности коэффициента во втором слагаемом получить нельзя. Для приближенного решения используем метод Бубнова. В соответствии с ним, представим прогиб пластины w в виде разложения по системе задаваемых функций:

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn}\varphi_{mn}(x,y), \qquad (5)$$

где w_{mn} – неизвестные коэффициенты, $\varphi_{mn}(x,y)$ – задаваемые координатные функции, удовлетворяющие на краях пластины при $y = \pm c$ условиям симметрии или антисимметрии, а на сторонах $x = 0$ и $x = b$ – условиям жесткого защемления и свободного края соответственно. Применяя процедуру метода Бубнова к задаче (4), придем к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов w_{mn}. Эта система в матричной форме записи имеет вид

$$[K - VB]\{W\} = 0, \qquad (6)$$

где K и B – квадратные матрицы, W – вектор неизвестных коэффициентов. Их размерность зависит от числа членов ряда сохраненных в разложении (5), а их элементы равны

$$[K]=[k_{mn}^{c\ell}], \qquad [B]=[b_{mn}^{c\ell}],$$

$$k_{mn}^{c\ell}=D\int_S \Delta^2\Delta^2(\varphi_{mn})\varphi_{c\ell}\,dS+EJ\int_S \frac{\partial^4\varphi_{mn}}{\partial x^4}\delta(y-0)\varphi_{c\ell}\,dS,$$

$$b_{mn}^{c\ell}=æ\int_S \frac{\partial\varphi_{mn}}{\partial x}\varphi_{c\ell}\,dS, \tag{7}$$

где S − площадь выделенного участка пластины. Система уравнений (6) является однородной, и ее нетривиальное решение существует лишь при определенных значениях скоростей набегающего потока V, соответствующих критическим скоростям дивергенции. Они определяются из условия равенства нулю определителя (6)

$$\det[K-VB]=0. \tag{8}$$

Наименьший корень этого определителя и является истинной критической скоростью дивергенции.

В качестве примера решим задачу в одночленном приближении. В соответствии с принятыми граничными условиями симметрии на краях мысленно выделенной панели, представим ее прогиб в виде

$$w=w_0\left(\frac{x^2}{2b}-\frac{x^3}{3b^2}+\frac{x^4}{12b^3}\right)\left(A-\cos\frac{\pi y}{c}\right). \tag{9}$$

Здесь w_0 − неизвестный коэффициент, а параметр A частично определяет форму потери устойчивости пластины (величину ее прогиба на линии соединения со стрингером) и вычисляется в ходе решения задачи. Достаточность одночленного приближения в направлении оси x доказывается в ходе определения критической скорости дивергенции для гладкой бесконечно длинной в направлении оси y пластины. Считая ее изогнутую поверхность цилиндрической и принимая для описания аэродинамической нагрузки также «поршневую» теорию, запишем уравнение цилиндрического изгиба пластины (балки − полоски):

$$D\frac{d^4w}{dx^4}-æV\frac{dw}{dx}=0. \tag{10}$$

Решая (10) методом Бубнова, представим прогиб пластины в виде

$$w=w_0\varphi(x)=w_0\left(\frac{x^2}{2b}-\frac{x^3}{3b^2}+\frac{x^4}{12b^3}\right), \tag{11}$$

где w_0 − неизвестный коэффициент, а координатная функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на краях пластины при $x=0$ и $x=b$ граничным условиям жесткого защемления и свободного края, соответственно. Применяя к уравнению (10) процедуру метода Бубнова, определим критическую скорость дивергенции V_K в виде

$$V_K=\frac{D\int_0^b \varphi^{IV}\varphi\,dx}{æ\int_0^b \varphi^{I}\varphi\,dx}, \tag{12}$$

где штрихами над функцией φ обозначены ее производные по координате x. Вычисляя интегралы с учетом представления (11), получим $V_K=$ $=6.45D/æb^3$. Точное решение задачи дает $V_K=6.33D/æb^3$ [2, с. 43].

Решая задачу для ребристой панели, из условия (8), принимающего в одночленном приближении вид $V_K=k_{11}/æb_{11}$, получим выражение для критической скорости дивергенции как функцию неизвестного параметра A.

Его значение определим из условия

$$\frac{dV_K}{dA} = 0 , \tag{13}$$

приводящего к квадратному уравнению относительно A:

$$A^2 - 2Aq + r = 0 , \tag{14}$$

где $r = 0.5$, а коэффициент q равен

$$q = \frac{\left(3.87\left(\frac{b}{c}\right)^3 - 0.59\,\frac{b}{c}\right)Db}{EJ} + 0.25 . \tag{15}$$

Как показывают расчеты, проведенные для разных значений изгибных жесткостей стрингера и пластины, первое слагаемое в выражении (15) минимум на порядок меньше второго, и им можно пренебречь. Тогда, независимо от значений параметра b/c, корни уравнения (14) будут $A_1 = 1$, $A_2 = -0.5$. Корню $A_1 = 1$ соответствует потеря устойчивости пластины между неподвижными стрингерами. В этом случае четко просматривается аналогия с задачей потери устойчивости пластины под действием осевой, равномерно распределенной сжимающей нагрузки, когда устойчивость теряет только пластина между стрингерами. Второй корень $A_2 = -0.5$ дает форму потери устойчивости со значительным отклонением стрингера от его первоначального равновесного состояния. В первом случае $(A_1 = 1)$ проблему устойчивости ребристой панели можно свести к задаче устойчивости гладкой пластины, дополнительно защемленной по линиям крепления стрингеров $y = \pm c$. Тогда форму потери устойчивости пластины представим в виде

$$w = w_0\left(\frac{x^2}{2b} - \frac{x^3}{3b^2} + \frac{x^4}{12b^3}\right)\left(1 - \cos\frac{2\pi y}{d}\right), \tag{16}$$

где $d = 2c$. Эта аппроксимация удовлетворяет граничным условиям на всех краях пластины. Подставляя выражение (16) в (12) и проводя интегрирование, определим критическую скорость дивергенции в виде

$$V_K = \frac{D}{æb^3}\left(6.52 - 10.2\left(\frac{d}{b}\right)^2 + 270\left(\frac{d}{b}\right)^4\right) = \frac{D}{æb^3}\,V_K^* . \tag{17}$$

Значения безразмерной критической скорости дивергенции $V_K^* = V_K æ b^3/D$ в зависимости от отношения сторон пластины приведены в табл. 1.

Таблица 1

d/b	2	3	5	10	∞
V_K^*	20.84	8.72	6.54	6.46	6.33

Значение V_K^* при $d/b = \infty$ соответствует точному решению задачи для бесконечно длинной пластины. Таким образом, при увеличении длины пластины критическая скорость дивергенции приближается сверху к ее значению для бесконечно длинной панели. Напомним, что решение той же задачи методом Бубнова в одночленном приближении дает $V_K^* = 6.45$. При форме потери устойчивости, соответствующей корню уравнения (14), равному $A_2 = -0.5$, безразмерная критическая скорость дивергенции составит $V_K^* = 27.8$.

Так как для рассмотренной формы потери устойчивости пластины, симметричной относительно положения стрингеров, сами они остаются неподвижными, то можно предположить, что и в случае формы потери устойчивости, несимметричной относительно ребер жесткости, стрингеры также останутся на своем месте. Тогда проблему можно свести к задаче устойчивости гладкой пластины, дополнительно свободно опертой по линиям крепления стрингеров ($y = 0$, $y = d$), а ее форму потери устойчивости можно представить в следующем виде (обозначения традиционные):

$$w = w_0\left(\frac{x^2}{2b} - \frac{x^3}{3b^2} + \frac{x^4}{12b^3}\right)\sin\frac{\pi y}{d}. \tag{18}$$

Из выражения (12) формула критической скорости дивергенции будет

$$V_K = \frac{D}{\text{æ} b^3}\left(6.66 - 3.93\left(\frac{d}{b}\right)^2 + 51.8\left(\frac{d}{b}\right)^4\right) = \frac{D}{\text{æ} b^3} V_K^*, \tag{19}$$

по структуре совпадая с равенством (17). Значения V_K^* в зависимости от отношения сторон пластины сведены в табл. 2.

Таблица 2

d/b	2	3	5	10	∞
V_K^*	8.56	6.86	6.63	6.58	6.33

Из сравнения данных о безразмерной критической скорости дивергенции видно, что в случае несимметричной относительно неподвижных стрингеров формы потери устойчивости ребристой пластины значения ниже, чем в случае ее потери устойчивости по симметричной форме.

Таким образом, в работе в первом приближении определена критическая скорость дивергенции дискретно подкрепленной пластины и показано, что ее потеря устойчивости происходит только на участках между стрингерами, которые остаются неподвижными. Величины этой скорости зависят в основном от расстояния между стрингерами, с увеличением которого решение задачи приближается к решению для гладкой пластины. Дальнейшее развитие исследований в этом направлении связано с решением проблемы дивергенции для панелей обшивки несущих поверхностей в виде дискретно подкрепленных пологих оболочек.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 13-08-01053).

1. *Горшков А. Г., Морозов В. И., Пономарев А. Т., Шклярчук Ф. Н.* Аэрогидроупругость конструкций. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 590 с.
2. *Пановко Я. Г., Губанова И. И.* Устойчивость и колебания упругих систем: современные концепции, парадоксы и ошибки. – Москва: Наука, 1979. – 384 с.
3. *Фершинг Г.* Основы аэроупругости. – Москва: Машиностроение, 1984. – 599 с.
4. *Шклярчук Ф. Н.* Аэроупругость самолета. – Москва: Изд-во МАИ, 1985. – 76 с.

СТІЙКІСТЬ ДИСКРЕТНО ПІДКРІПЛЕНОЇ ПЛАСТИНИ В ПОТОЦІ ГАЗУ

Розглядається наближений розв'язок задачі про дивергенцію – статичну нестійкість пластини, дискретно підкріпленої системою ребер жорсткості в потоці газу. Наближено визначено критичну швидкість дивергенції та проаналізовано вплив на неї ребер жорсткості.

STABILITY OF A DISCRETELY REINFORCED PLATE IN GAS FLOW

An approximate solution of the divergence problem, that is of the static instability of a plate discretely reinforced *by a system of stiffening ribs in the gas flow is considered. The critical velocity of divergence is determined approximately and the influence of stringers on it is analyzed.*

Моск. авиац. ин-т
(нац. исслед. ун-т), Москва

Получено
29.11.12