

УПРУГАЯ ПОЛУПЛОСКОСТЬ ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается однородная изотропная упругая полуплоскость, на границе которой заданы нестационарные нормальные перемещения. С использованием интегральных преобразований Лапласа и Фурье предложены интегральные представления перемещений с ядрами в виде поверхностных функций влияния. Оригиналы находятся с помощью алгоритма совместного обращения этих преобразований, основанного на построении аналитического продолжения изображений. Найден явный вид функций влияния. Приведены примеры их расчетов.

Введение. Проблема определения напряженно-деформированного состояния упругого полупространства, находящегося под действием нестационарных возмущений, имеет как самостоятельное значение [10, 11, 15], так и является составляющей в разработке алгоритмов решения нестационарных контактных задач [6] и нестационарных задач для связанных полей, например, для задач электромагнитоупругости [1, 3, 4, 9, 13, 14]. Результаты решения этих задач могут быть использованы в различных областях новой техники, в том числе – в проектных работах в авиационной и ракетно-космической промышленности.

Одним из возможных и эффективных подходов к решению задач для упругого полупространства, находящегося под действием нестационарных возмущений, является представление перемещений и напряжений в виде сверток возмущений с ядрами в виде нестационарных функций влияния. При этом для вычисления сверток желательно иметь эти функции в явном виде. Постановки задач для различного рода функций влияния приведены, в частности, в [6].

В настоящее время известны подходы к построению функций влияния для полупространства. Например, в [6] найден явный вид одной из поверхностных функций влияния – решение классической задачи Лэмба [12], а в [2] построен явный вид объемных функций влияния. Построение некоторых других функций влияния рассматривается ниже.

1. Постановка задачи. Рассматривается однородная изотропная линейно упругая полуплоскость $z \geq 0$, отнесенная к прямоугольной декартовой системе координат Oxz . Уравнения ее плоского движения, записанные относительно скалярного φ и ненулевой компоненты ψ векторного потенциалов перемещения, имеют вид [5]

$$\ddot{\varphi} = \Delta\varphi, \quad \eta^2 \ddot{\psi} = \Delta\psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Здесь точками обозначены производные по времени τ . Перемещения u и w вдоль осей Ox и Oz выражаются через потенциалы так:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

Напряжения в среде могут быть найдены по соответствующим физическим соотношениям [5].

Начальные условия для потенциалов полагаем нулевыми:

$$\varphi|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \quad (3)$$

На границе полуплоскости заданы нормальные перемещения, а касательные перемещения отсутствуют:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = W_0(x, \tau). \quad (4)$$

Кроме того, полагаем, что решение задачи (1)–(4) ограничено.

В предыдущих равенствах и далее использованы следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2},$$

$$\eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad c_1 = \sqrt{\frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}}, \quad c_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}},$$

где L – некоторый линейный размер (например, длина перемещений в правой части граничных условий (4)); t – размерное время; λ , μ и ρ – упругие постоянные Ламе и плотность среды.

Искомые перемещения удобно представить в интегральном виде

$$u(x, z, \tau) = G_{13}(x, z, \tau) ** W_0(x, \tau),$$

$$w(x, z, \tau) = G_{33}(x, z, \tau) ** W_0(x, \tau). \quad (5)$$

Здесь звездочками обозначены свертки по времени и по координате x ; G_{13} и G_{33} – поверхностные функции влияния: соответственно касательное и нормальное перемещения в сформулированной выше задаче при замене граничных условий (4) следующими:

$$u|_{z=0} = 0, \quad w|_{z=0} = \delta(x, \tau),$$

где $\delta(x, \tau)$ – дельта-функция Дирака.

2. Определение функций влияния. Для решения начально-краевой задачи (1)–(3), (5) используем интегральные преобразования Лапласа по времени τ и Фурье – по координате x . Решение соответствующей краевой задачи в пространстве изображений имеет вид

$$G_{13}^{LF}(q, z, s) = -iqk_2(e^{-k_1 z} - e^{-k_2 z})R^{-1},$$

$$G_{33}^{LF}(q, z, s) = -(k_1 k_2 e^{-k_1 z} - q^2 e^{-k_2 z})R^{-1},$$

$$R = R(q, s) = q^2 - k_1 k_2,$$

$$k_1 = k_1(q, s) = \sqrt{s^2 + q^2}, \quad k_2 = k_2(q, s) = \sqrt{s^2 \eta^2 + q^2}, \quad \text{Re} \sqrt{\cdot} > 0.$$

Здесь s и q – параметры этих преобразований, а индексами « L » и « F » обозначены их трансформанты.

Для вычисления оригиналов эти изображения представляем так:

$$G_{13}^{LF} = iqG_{130}^{LF}, \quad G_{33}^{LF} = sG_{331}^{LF} + iqG_{332}^{LF},$$

$$G_{130}^{LF} = G_{131}^{1LF} + G_{132}^{1LF}, \quad G_{131}^{1LF} = -k_2 R^{-1} e^{-k_1 z}, \quad G_{132}^{1LF} = k_2 R^{-1} e^{-k_2 z},$$

$$G_{331}^{1LF} = -s^{-1} k_1 k_2 R^{-1} e^{-k_1 z}, \quad G_{332}^{1LF} = -iqR^{-1} e^{-k_2 z}. \quad (6)$$

Тогда в соответствии со свойствами преобразований [5] аналог равенств (5) имеет следующий вид (штрихом обозначена производная по x):

$$u(x, z, \tau) = -G_{130}(x, z, \tau) ** W_0'(x, \tau),$$

$$w(x, z, \tau) = G_{331}(x, z, \tau) ** \dot{W}_0(x, \tau) - G_{332}(x, z, \tau) ** W_0'(x, \tau). \quad (7)$$

Ядра интегральных представлений (7) находим, применяя алгоритм совместного обращения преобразований Лапласа и Фурье, основанный на

использовании аналитического представления оригинала [5, 8]. Согласно этому алгоритму с помощью замены $q = \lambda s$ представляем, например, функцию G_{131}^{LF} в виде

$$G_{131}^{LF}(q, s, z) = s^{-1} h_{13}(\lambda) e^{-s\omega_1(\lambda)},$$

$$h_{13}(\lambda) = -k_2(\lambda, 1) R^{-1}(\lambda, 1), \quad \omega_1(\lambda) = z k_1(\lambda, 1).$$

Тогда для оригинала этой функции имеем равенство

$$G_{131}(x, z, \tau) = \lim_{y \rightarrow +0} [\hat{G}_{131}(\zeta, z, \tau) - \hat{G}_{131}(\bar{\zeta}, z, \tau)], \quad (8)$$

где черта сверху – знак комплексного сопряжения. Функция

$$\hat{G}_{131}(\zeta, z, \tau) = -\frac{1}{2\pi} h_{13}[\mu_1(\zeta, \tau)] \dot{\mu}_1(\zeta, \tau), \quad \mu_1(\zeta, \tau) = \lambda_1(\zeta, \tau - z)$$

– аналитическое представление функции $G_{131}(x, z, \tau)$ в комплексной плоскости $\zeta = x + iy$, а $\lambda_1(\zeta, \tau)$ – неявно задаваемая уравнением

$$z\sqrt{\lambda_1^2 + 1} - z + i\lambda_1\zeta = \tau$$

и выделяемая с помощью условий

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \lambda} = \frac{z\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \geq 0, \quad \lambda > 0,$$

$$\omega_1(-\lambda) = \omega_1(\lambda), \quad \omega_1(0) = \omega_{10} = z \geq 0,$$

на действительной оси $\text{Re } \lambda_1 = 0$ плоскости λ_1 ветвь функции.

Аналогично [7] с использованием обозначений

$$\lim_{y \rightarrow \pm 0} f(\zeta) = f_{\pm}(x), \quad t_{11} = \tau + z, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

можно показать, что имеют место равенства:

$$\lambda_{1\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} i \operatorname{sgn} x (z\sqrt{r^2 - t_{11}^2} - t_{11}|x|), & t_{11} < r, \\ \mp z\sqrt{t_{11}^2 - r^2} - it_{11}x, & t_{11} > r, \end{cases} \quad (9)$$

$$(\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_{\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} t_{11}z + |x|\sqrt{r^2 - t_{11}^2}, & t_{11} < r, \\ t_{11}z \pm ix\sqrt{t_{11}^2 - r^2}, & t_{11} > r, \end{cases} \quad (10)$$

$$\dot{\lambda}_{1\pm} = (\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_{1\pm} \begin{cases} -i(r^2 - t_{11}^2)^{-1/2} \operatorname{sgn} x, & t_{11} < r, \\ \mp (t_{11}^2 - r^2)^{-1/2}, & t_{11} > r, \end{cases} \quad (11)$$

$$(\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2})_{\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} T_1(x, z, t_{11}), & t_{11} < r, \\ S_{1-}(x, z, t_{11}) \pm iS_{1+}(x, z, t_{11}) \operatorname{sgn} x, & t_{11} > r, \end{cases} \quad (12)$$

где

$$S_{1\pm}(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 [S_1(x, z, t) \mp \eta^2 r^2] \pm Q_1(x, z, t)},$$

$$S_1(x, z, t) = \sqrt{(t^2 - z^2)^2 - 2\eta^2 Q_1(x, z, t) + \eta^4 r^4},$$

$$Q_1(x, z, t) = t^2 x^2 - z^2(t^2 - r^2),$$

$$T_1(x, z, t) = \sqrt{|-Q_1(x, z, t) + 2|x|zt\sqrt{r^2 - t^2} + \eta^2 r^4|}.$$

Из (9)–(12) вытекают следующие связи для предельных значений:

– при $t_{11} < r$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \lambda_{1-}, & \lambda_{1+}^2 &= \lambda_{1-}^2, & \dot{\lambda}_{1+} &= \dot{\lambda}_{1-}, & (\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_+ &= (\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_-, \\ (\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2})_+ &= (\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2})_-, & h_{13}(\lambda_{1+}) &= h_{13}(\lambda_{1-}); \end{aligned} \quad (13)$$

– при $t_{11} > r$:

$$\begin{aligned} \lambda_{1+} &= \bar{\lambda}_{1-}, & \lambda_{1+}^2 &= \bar{\lambda}_{1-}^2 = r^{-4} \Lambda_1(x, z, t_{11}), & \dot{\lambda}_{1+} &= -\bar{\dot{\lambda}}_{1-}, \\ (\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_+ &= (\sqrt{\lambda_1^2 + 1})_- = r^{-2} \Lambda_{11}(x, z, t_{11}), \\ (\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2})_{1+} &= (\sqrt{\lambda_1^2 + \eta^2})_{1-} = r^{-2} \Lambda_{21}(x, z, t_{11}), \\ h_{13}(\lambda_{1+}) &= \bar{h}_{13}(\lambda_{1-}) = -\frac{r^2 \Lambda_{21}(x, z, t_{11})}{\Lambda_1(x, z, t_{11}) - \Lambda_{11}(x, z, t_{11}) \Lambda_{21}(x, z, t_{11})}, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\Lambda_1(x, z, t) = 2ixzt\sqrt{t^2 - r^2} - \mathcal{Q}_1(x^2, z^2, t^2),$$

$$\Lambda_{11}(x, z, t) = zt + ix\sqrt{t^2 - r^2},$$

$$\Lambda_{21}(x, z, t) = S_{1-}(x, z, t) + iS_{1+}(x, z, t) \operatorname{sgn} x.$$

Окончательно из (8) с учетом (13) и (14) получаем следующий оригинал функции G_{131}^{LF} :

$$\begin{aligned} G_{131}(x, z, \tau) &= V_{131}(x, z, \tau) H(\tau - r), \\ V_{131}(x, z, \tau) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - r^2}} \operatorname{Re} \frac{\Lambda_{21}(x, z, \tau) \Lambda_{11}(x, z, \tau)}{[\Lambda_1(x, z, \tau) - \Lambda_{11}(x, z, \tau) \Lambda_{21}(x, z, \tau)]}, \end{aligned} \quad (15)$$

где $H(x)$ – единичная функция Хевисайда.

Для отыскания оригинала функции G_{132}^{LF} используем аналогичные рассуждения, основанные на формуле (8), в которой \hat{G}_{131} заменяем аналитическим представлением \hat{G}_{132} :

$$\begin{aligned} G_{132}^{LF}(q, s, z) &= s^{-1} h_{13}(\lambda) e^{-s\omega_2(\lambda)}, & \omega_2(\lambda) &= zk_2(\lambda^2, 1), \\ \hat{G}_{132}(\zeta, z, \tau) &= -\frac{1}{2\pi} h_{13}[\mu_2(\zeta, \tau)] \dot{\mu}_2(\zeta, \tau), & \mu_2(\zeta, \tau) &= \lambda_2(\zeta, \tau - \eta z), \\ z\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2} - \eta z + i\lambda_2 \zeta &= \tau, \\ \frac{\partial \omega_2}{\partial \lambda} &= \frac{z\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \eta^2}} \geq 0, & \lambda &> 0, \\ \omega_2(-\lambda) &= \omega_2(\lambda), & \omega_2(0) &= \omega_{20} = \eta z \geq 0. \end{aligned}$$

При этом формулы, аналогичные (9)–(12), имеют такой вид:

$$\lambda_{2\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} i \operatorname{sgn} x (z\sqrt{\eta^2 r^2 - t_{21}^2} - t_{21} |x|), & t_{21} < \eta r, \\ \mp z\sqrt{t_{21}^2 - \eta^2 r^2} - it_{21} x, & t_{21} > \eta r, \end{cases} \quad (16)$$

$$(\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2})_{\pm} = \frac{1}{r^2} \begin{cases} t_{21}z + |x|\sqrt{\eta^2 r^2 - t_{21}^2}, & t_{21} < \eta r, \\ t_{21}z \pm ix\sqrt{t_{21}^2 - \eta^2 r^2}, & t_{21} > \eta r, \end{cases} \quad (17)$$

$$\dot{\lambda}_{2\pm} = (\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2})_{\pm} \begin{cases} -i(\eta^2 r^2 - t_{21}^2)^{-1/2} \operatorname{sgn} x, & t_{21} < \eta r, \\ \mp (t_{21}^2 - \eta^2 r^2)^{-1/2}, & t_{21} > \eta r, \end{cases} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_{\pm} &= \\ &= \frac{1}{r^2} \begin{cases} S_{2-}(x, z, t_{21}) \pm iS_{2+}(x, z, t_{21}) \operatorname{sgn} x, & t_{21} > \eta r, \\ \pm iT_2(x, z, t_{21}) \operatorname{sgn} x, & t_{21} < \eta r, (x, z) \in D_{31}(t_{21}), \\ T_2(x, z, t_{21}), & t_{21} < \eta r, (x, z) \in D_{32}(t_{21}), \end{cases} \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$S_{2\pm}(x, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{r^2 [S_2(x, z, t) \mp r^2] \pm Q_2(x, z, t)},$$

$$S_2(x, z, t) = \sqrt{(t^2 - \eta^2 z^2)^2 - 2Q_2(x, z, t) + r^4},$$

$$t_{21} = \tau + \eta z, \quad Q_2(x, z, t) = t^2 x^2 - z^2 (t^2 - \eta^2 r^2),$$

$$T_2(x, z, t) = \sqrt{|-Q_2(x, z, t) + 2|x|zt\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2} + r^4|},$$

$$D_{32}(t_{21}) = D_{321}(t_{21}) \cup D_{322}(t_{21}),$$

$$D_{31}(t_{21}) : \begin{cases} |x| + z\sqrt{\eta^2 - 1} < t_{21} < \eta r, \\ z < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}, \end{cases}$$

$$D_{321}(t_{21}) : r^2 > \max \left\{ \frac{t_{21}^2}{\eta^2}, |x|t_{21} \right\},$$

$$D_{322}(t_{21}) : \begin{cases} \frac{r^2}{|x|} < t_{21} < |x| + x_2 \sqrt{\eta^2 - 1}, \\ x_2 < |x|\sqrt{\eta^2 - 1}. \end{cases}$$

Равенства (16)–(19) позволяют сделать вывод, что при $t_{21} < \eta r$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} \lambda_{2+} &= \lambda_{2-}, \quad \lambda_{2+}^2 = \lambda_{2-}^2 = r^{-4} \Lambda_3(x, z, t_{21}), \quad \dot{\lambda}_{2+} = \dot{\lambda}_{2-}, \\ (\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2})_+ &= (\sqrt{\lambda_2^2 + \eta^2})_- = r^{-2} \Lambda_{32}(x, z, t_{21}), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\Lambda_3(x, z, t) = 2|x|zt\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2} - Q_2(x^2, z^2, t^2),$$

$$\Lambda_{32}(x, z, t) = zt + |x|\sqrt{\eta^2 r^2 - t^2}.$$

Если дополнительно $(x, z) \in D_{32}(t_{21})$, то

$$(\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_{2+} = (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_{2-}, \quad h_{13}(\lambda_{2+}) = h_{13}(\lambda_{2-}). \quad (21)$$

Если же $t_{21} < \eta r$ и $(x, z) \in D_{31}(t_{21})$, то

$$\begin{aligned} (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_+ &= (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_- = ir^{-2}T_2(x, z, t_{21}) \operatorname{sgn} x, \\ h_{13}(\lambda_{2+}) &= \overline{h_{13}(\lambda_{2-})}. \end{aligned} \quad (22)$$

При $t_{21} > \eta r$ из (16)–(19) следуют равенства

$$\begin{aligned} \lambda_{2+} &= -\bar{\lambda}_{2-}, \quad \lambda_{2+}^2 = \bar{\lambda}_{2-}^2 = r^{-4}\Lambda_2(x, z, t_{21}), \quad \dot{\lambda}_{2+} = -\bar{\dot{\lambda}}_{2-}, \\ (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_+ &= (\sqrt{\lambda_2^2 + 1})_- = r^{-2}\Lambda_{12}(x, z, t_{21}), \\ h_{13}(\lambda_{2+}) &= \overline{h_{13}(\lambda_{2-})}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_2(x, z, t) &= 2ixzt\sqrt{t^2 - \eta^2 r^2} - Q_2(x^2, z^2, t^2), \\ \Lambda_{22}(x, z, t) &= zt + ix\sqrt{t^2 - \eta^2 r^2}, \\ \Lambda_{12}(x, z, t) &= S_{2-}(x, z, t) + iS_{2+}(x, z, t) \operatorname{sgn} x. \end{aligned}$$

Окончательно, учитывая (20)–(23), получаем оригинал функции G_{132}^{LF} :

$$\begin{aligned} G_{132}(x, z, \tau) &= V_{132}(x, z, \tau)H(\tau - \eta r) + V_{133}(x, z, \tau)[H(\tau - |x| - \\ &\quad - z\sqrt{\eta^2 - 1}) - H(\tau - \eta r)]H(|x|\sqrt{\eta^2 - 1} - z). \end{aligned} \quad (24)$$

Здесь

$$\begin{aligned} V_{132}(x, z, \tau) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2}} \operatorname{Re} \frac{\Lambda_{22}^2(x, z, \tau)}{\Lambda_2(x, z, \tau) - \Lambda_{12}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)}, \\ V_{133}(x, z, \tau) &= \frac{\operatorname{sgn} x}{\pi\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2}} \operatorname{Im} \frac{\Lambda_{32}^2(x, z, \tau)}{\Lambda_3(x, z, \tau) - iT_2(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau) \operatorname{sgn} x}. \end{aligned}$$

Ядро первого из равенств (7) в соответствии с формулами (6) находим суммированием функций (15) и (24):

$$G_{130}(x, z, \tau) = G_{131}(x, z, \tau) + G_{132}(x, z, \tau). \quad (25)$$

Аналогичным образом ищутся оригиналы функций

$$\begin{aligned} G_{331}^{1LF}(q, s, z) &= s^{-1}h_{331}(\lambda)e^{-s\omega_1(\lambda)}, \quad h_{331}(\lambda) = -k_1(\lambda, 1)k_2(\lambda, 1)R^{-1}(\lambda, 1), \\ G_{332}^{1LF}(q, s, z) &= s^{-1}h_{332}(\lambda)e^{-s\omega_2(\lambda)}, \quad h_{332}(\lambda) = -i\lambda R^{-1}(\lambda, 1). \end{aligned}$$

Они записываются так:

$$\begin{aligned} G_{331}(x, \tau, z) &= V_{331}(x, \tau, z)H(\tau - r), \\ G_{332}(x, z, \tau) &= V_{332}(x, z, \tau)H(\tau - \eta r) + V_{333}(x, z, \tau)[H(\tau - |x| - \\ &\quad - z\sqrt{\eta^2 - 1}) - H(\tau - \eta r)]H(|x|\sqrt{\eta^2 - 1} - z), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$V_{333}(x, \tau, z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2}} \operatorname{Im} \frac{\Lambda_{33}(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau)}{\Lambda_3(x, z, \tau) - i \operatorname{sgn} x T_2(x, z, \tau)\Lambda_{32}(x, z, \tau)},$$

$$V_{332}(x, \tau, z) = -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2}} \operatorname{Im} \frac{\Lambda_{23}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)}{\Lambda_2(x, z, \tau) - \Lambda_{12}(x, z, \tau)\Lambda_{22}(x, z, \tau)},$$

$$\Lambda_{33}(x, z, \tau) = z\sqrt{\eta^2 r^2 - \tau^2} - \tau|x|,$$

$$\Lambda_{23}(x, z, \tau) = z\sqrt{\tau^2 - \eta^2 r^2} + i\tau x.$$

3. Примеры расчетов. В качестве примера рассмотрим полуплоскость, материал которой (алюминий) характеризуется безразмерным параметром $\eta = 1.87$. На рис. 1 – рис. 3 приведены графики изменения вычисленных по формулам (25) и (26) функций влияния G_{130} , G_{331} и G_{332} по координате x при $z = 1$ в разные моменты времени: $\tau = 1.1$ (сплошные кривые), $\tau = 1.5$ (пунктирные кривые) и $\tau = 2$ (штриховые кривые). Распределения этих же функций по координате z в разные моменты времени показаны на рис. 4 – рис. 6. Кривые для G_{130} (рис. 4) и G_{331} (рис. 5) построены при значении $x = 0$, а для G_{332} (рис. 6) – при $x = 1$. На рис. 4 сплошная линия соответствует моменту времени $\tau = 0.3$, пунктирная – $\tau = 0.7$, а штриховая – $\tau = 1$. На рис. 5 аналогичные линии построены соответственно при $\tau = 1.1$, $\tau = 1.5$ и $\tau = 2$, а на рис. 6 – при $\tau = 2$, $\tau = 2.5$ и $\tau = 3$. Разрывы на кривых соответствуют фронтам волн растяжения-сжатия и сдвига.

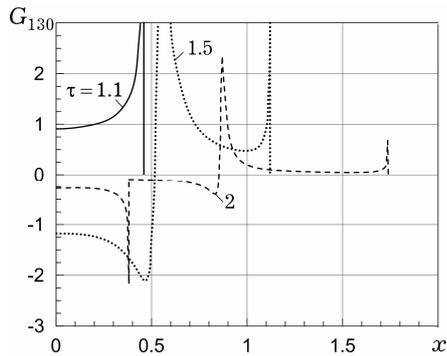


Рис. 1

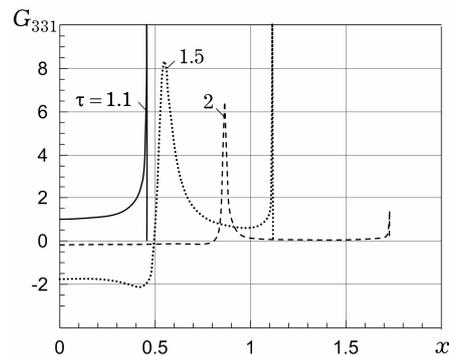


Рис. 2

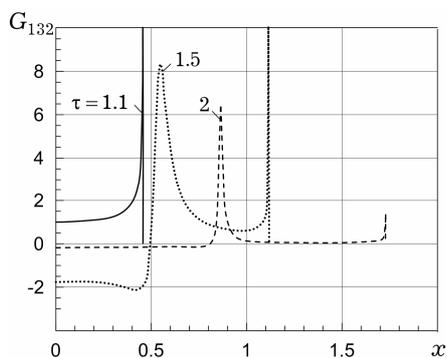


Рис. 3

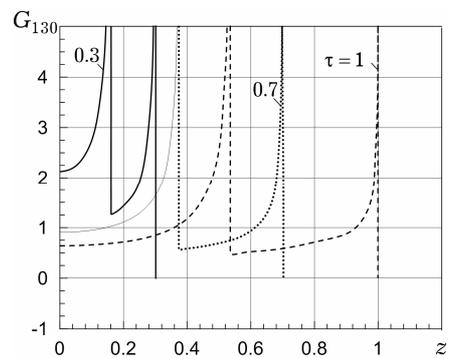


Рис. 4

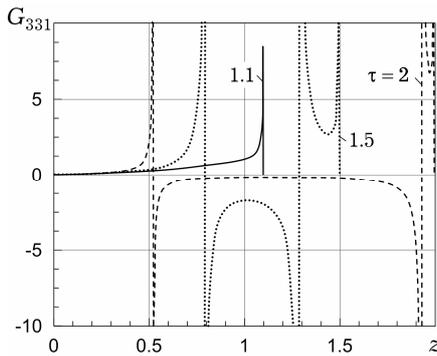


Рис. 5

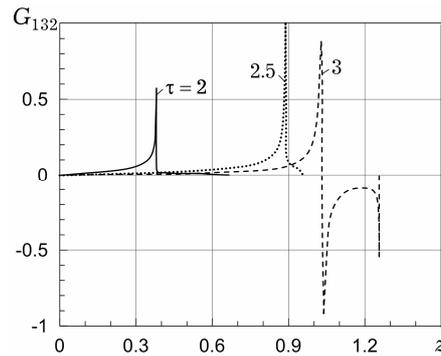


Рис. 6

Выводы. Построенные ядра интегральных представлений (6) позволяют с помощью квадратур вычислить перемещение в любой точке полуплоскости при заданном произвольном нормальном перемещении на границе. Разработанный подход может быть применен для других видов нестационарных граничных условий: заданы касательное перемещение или напряжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 12-08-00928, 12-08-90409, 13-01-90418) и НАН Украины (проект ВБ-РФФД/382, № госрегистрации 0113U002818).

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терлецкий Р. Ф. Термомеханика багатокомпонентних тіл низької електропровідності. – Львів: СПОЛОМ, 2006. – 300 с. – (Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 1.)
2. Вестяк В. А., Садков А. С., Тарлаковский Д. В. Распространение нестационарных объемных возмущений в упругой полуплоскости // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – № 2. – С. 130–140.
То же: Vestyak V. A., Sadkov A. S., Tarlakovskii D. V. Propagation of unsteady bulk perturbations in an elastic half-plane // Mech. Solids. – 2011. – **46**, No. 2. – P. 266–274.
3. Вестяк В. А., Тарлаковский Д. В. Нестационарные волны в электромагнитоупругих телах // Нестационарні процеси деформування елементів конструкцій, зумовлені дією полів різної фізичної природи / Під заг. ред. В. Д. Кубенка, Р. М. Кушніра, Д. В. Тарлаковського. – Львів: Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2012. – С. 22–25.
4. Гачкевич О. Р., Мусій Р. С., Тарлаковский Д. В. Термомеханика неферромагнитных электропроводных тел за дії імпульсних електромагнітних полів з модуляцією амплітуди. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 216 с.
5. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
6. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: Наука, 1974. – 352 с.
7. Кузнецова Е. Л., Тарлаковский Д. В. Явная форма решения задачи Лэмба в произвольной точке полуплоскости // Материалы 12-го Междунар. симп. «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред»: Избр. докл. – Москва: Изд-во МАИ, 2006. – С. 104–120.
8. Слепях Л. И., Яковлев Ю. С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики. – Ленинград: Судостроение, 1980. – 343 с.
9. He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // Eur. J. Mech. A-Solid. – 2005. – **24**, No 2. – P. 349–359.
10. Kim J. S., Soedel W. On the response of three-dimensional elastic bodies to distributed dynamic pressures. Part I: Half-space // J. Sound Vib. – 1988. – **126**, No. 2. – P. 279–295.
11. Kim J. S., Soedel W. On the response of three-dimensional elastic bodies to distributed dynamic pressures. Part II: Thick plate // J. Sound Vib. – 1988. – **126**, No. 2. – P. 297–308.

12. *Lamb H.* On the propagation of tremors over the surface on an elastic solid // *Phil. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* – 1904. – **203**. – P. 1–42.
13. *Rajapakse R. K. N. D., Chen Y. Senjuntichai T.* Electroelastic field of a piezoelectric annular finite cylinder // *Int. J. Solids Struct.* – 2005. – **42**, No. 11-12. – P. 3487–3508.
14. *Rakshit M., Mukhopadhyay B.* An electro-magneto-thermo-visco-elastic problem in an infinite medium with a cylindrical hole // *Int. J. Eng. Sci.* – 2005. – **43**, No. 11-12. – P. 925–936.
15. *Ziv M.* A half-space response to a finite surface source of an impulsive disturbance // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1991. – **89**, No. 4. – P. 1556–1571.

ПРУЖНА ПІВПЛОЩИНА ЗА ДІЇ НЕСТАЦІОНАРНИХ ПОВЕРХНЕВИХ КІНЕМАТИЧНИХ ЗБУРЕНЬ

Розглядається однорідна ізотропна пружна півплощина, на межі якої задано нестационарні нормальні переміщення. З використанням інтегральних перетворень Лапласа і Фур'є запропоновано інтегральні подання переміщень з ядрами у вигляді поверхневих функцій впливу. Оригінали знайдено за допомогою алгоритму сумісного обернення цих перетворень, який ґрунтується на побудові аналітичного продовження зображень. Отримано явний вигляд функцій впливу. Наведено приклади їх обчислення.

ELASTIC HALF-PLANE UNDER NON-STATIONARY SURFACE KINEMATIC PERTURBATIONS

The homogeneous isotropic elastic half-plane, on the border of which are given normal displacements is considered. With using integral Laplace and Fourier transforms the integral representations of displacements with kernels in the form of surface influence functions are proposed. The originals are calculated with the use of algorithm of the joint inversion of these transforms, based on the construction of the analytic continuation of the transforms. The explicit form of the influence functions was determined. Examples of their calculations are presented.

¹ Моск. авиац. ин-т
(нац. исслед. ун-т), Москва, Россия,

² Ин-т прикл. проблем механики и математики
им. Я. С. Подстригача НАН Украины, Львов

Получено
21.11.12