

## ПЛОСКАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ ПО УПРУГОМУ ПОЛУПРОСТРАНСТВУ

*Исследуется реакция упругой полуплоскости на воздействие нормальной сосредоточенной нагрузки, движущейся вдоль ее границы. В общем случае закон движения нагрузки произволен. Решение задачи основано на принципе суперпозиции. Построено одномерное интегральное представление решения. Получены результаты для случая равномерного движения нагрузки. Показана зависимость решения от скорости движения нагрузки, выявлены особенности в решении, приведены графические результаты.*

**Введение.** В настоящее время нестационарные задачи являются одним из наименее исследованных классов задач механики деформируемого твердого тела. Необходимость учета времени приводит к повышению размерности задачи, что влечет за собой дополнительные сложности при решении. В тоже время решения нестационарных задач, несомненно, актуальны, т.к. все природные процессы являются нестационарными. Рассматриваемая в данной работе задача с точки зрения механики является модельной. Получение ее решения, прежде всего, представляет интерес в теоретическом плане, т.к. позволяет выявить характерные особенности переходных процессов с учетом подвижности внешней нагрузки. Кроме того, полученные решения могут быть положены в основу построения разрешающих уравнений плоских нестационарных контактных задач для полупространства и подвижных штампов. В практическом отношении задачи этого типа становятся все более актуальными при создании новых образцов высокоскоростного наземного транспорта, например скоростных железнодорожных поездов, в связи с необходимостью получения решений задач о контакте колеса и рельса при высоких скоростях относительного движения.

Стационарную задачу о движении нагрузки по свободной поверхности однородного упругого слоя, который лежит на упругом полупространстве, рассматривали Nath Sisir, P. R. Sengupta [8]. Нестационарные задачи при равномерном движении сосредоточенной нагрузки исследовали N. Higuchi и K.-I. Hirashima [6], D. D. Ang [5], M. Mitra [7]. При этом удается использовать фактически тот же математический аппарат, что и для неподвижной нагрузки. Ю. Д. Каплуновым [3] для плоской задачи сделана попытка рассмотреть произвольный закон движения нормальной нагрузки. Решение представлено в виде сверток с функцией влияния. Ю. В. Мастиновский, А. В. Засовенко в работе [4] исследовали распространение упругих волн в однопролетной шарнирно опертой балке на упругом основании Винклера, вызванные действием перемещающейся силы.

**1. Постановка задачи.** В начальный момент времени по нормали к свободной границе невозмущенной однородной изотропной линейно-упругой полуплоскости прикладывается сосредоточенная нагрузка  $q = \delta(x - f(\tau))$ , перемещающаяся вдоль нее по заданному закону  $x = f(\tau)$  со скоростью  $V = \dot{f}(\tau)$ , где точка обозначает дифференцирование по времени  $\tau$  (рис. 1).

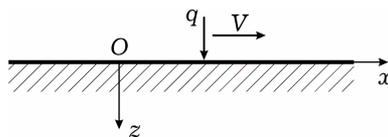


Рис. 1

В неподвижной прямоугольной декартовой системе координат  $Oxz$ , ось  $Ox$  которой направлена вдоль свободной границы полуплоскости, а ось  $Oz$

– вглубь полуплоскости, движение среды описывается двумя волновыми уравнениями, записанными относительно скалярного  $\varphi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциала упругих смещений:

$$\Delta\varphi = \ddot{\varphi}, \quad \Delta\psi = \eta\ddot{\psi}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Связь касательных  $u$  и нормальных  $w$  перемещений с потенциалами дается формулами [1]:

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}. \quad (2)$$

С ненулевыми компонентами тензора напряжений  $\sigma_{ij}$  потенциалы связаны следующим образом [1]:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \Delta\varphi - 2\eta^{-2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \right), \\ \sigma_{13} &= \sigma_{31} = \eta^{-2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \right), \\ \sigma_{33} &= \Delta\varphi - 2\eta^{-2} \left( \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x = \frac{x'}{L}, \quad z = \frac{z'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad w = \frac{w'}{L}, \quad \varphi = \frac{\varphi'}{L^2}, \quad \psi = \frac{\psi'}{L^2}, \\ c_1^2 = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad V = \frac{V'}{c_1}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{\lambda + 2\mu}, \end{aligned}$$

где  $t$  – размерное время;  $L$  – характерный линейный размер,  $c_1$  и  $c_2$  – скорости волн растяжения-сжатия и сдвига;  $\lambda$ ,  $\mu$  – параметры Ламе;  $\rho$  – плотность.

Предполагается отсутствие касательных напряжений на границе полуплоскости и отсутствие возмущений в бесконечно удаленной точке, что приводит к следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = -\delta(x - f(\tau)), \\ \varphi = O(1), \quad \psi = O(1), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Постановку задачи замыкают однородные начальные условия:

$$\varphi|_{t=0} = \dot{\varphi}|_{t=0} = 0, \quad \psi|_{t=0} = \dot{\psi}|_{t=0} = 0. \quad (5)$$

**2. Метод решения.** Используем принцип суперпозиции [2], согласно которому нормальные перемещения границы полуплоскости связаны с поверхностными напряжениями интегральным соотношением типа свертки:

$$w_0(x, \tau) = -G_f(x, \tau) * \sigma(x, \tau) = - \int_0^\tau \int_{-\infty}^\infty G_f(x - \xi, \tau - t) \sigma_{11}(\xi, t) d\xi dt, \quad (6)$$

где  $w_0(x, \tau) = w(x, z, \tau)|_{z=0}$ ,  $\sigma(x, \tau) = \sigma_{33}(x, z, \tau)|_{z=0}$ .

Ядро интегрального представления  $G_f(x, \tau)$  является поверхностной функцией влияния для упругой однородной изотропной полуплоскости и представляет собой нормальные перемещения границы полуплоскости как

решение задачи (1)–(3), (5) со следующими граничными условиями:

$$\sigma_{13}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}|_{z=0} = \delta(x)\delta(\tau), \quad \varphi = O(1), \quad \psi = O(1) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Это решение найдено в работе [1] и имеет вид

$$G_f(x, \tau) = \sum_{k=1}^2 G_{fk}(x, \tau)H(\tau - \eta_k |x|), \quad (7)$$

$$G_{f1}(x, \tau) = \frac{g_1(x^2, \tau^2)}{\pi\eta^4 P_3(x^2, \tau^2)}, \quad G_{f2}(x, \tau) = \frac{g_2(x^2, \tau^2)}{\pi\eta^4 P_3(x^2, \tau^2)},$$

$$g_1(x, \tau) = (\eta^2 x - 2\tau)^2 \sqrt{\tau - x}, \quad g_2(x, \tau) = 4\tau(\tau - x)\sqrt{\tau - \eta^2 x},$$

$$P_3(x, \tau) = P_1(x, \tau)P_2(x, \tau), \quad P_1(x, \tau) = x - c_R^2 \tau,$$

$$P_2(x, \tau) = x^2 - 2\alpha^2 x\tau + \beta^2 \tau^2,$$

$$\alpha^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{c_R^2}{2}, \quad \beta^2 = \frac{16(\eta^2 - 1)}{\eta^8 c_R^2}, \quad \eta_1 = 1, \quad \eta_2 = \eta.$$

Здесь  $H(\tau)$  – функция Хевисайда;  $c_R$  – скорость поверхностных волн Рэлея.

С учетом граничных условий (4) и свойств дельта-функции [2], представление (6) принимает вид

$$w(x, \tau) = - \int_0^\tau G_f[x - f(t), \tau - t] dt. \quad (8)$$

**3. Движение нагрузки с постоянной скоростью.** В частном случае при равномерном движении нагрузки по закону  $x = V\tau$  соотношение (8) принимает вид

$$w(x, \tau) = - \int_0^\tau G_f[x - Vt, \tau - t] dt. \quad (9)$$

Заменой переменной  $y = (x - Vt)/(\tau - t)$  интеграл (9) приводим к следующему виду:

$$w(x, \tau) = -H(x - V\tau) \int_{x/\tau}^{+\infty} G_f(y, 1) \frac{dy}{y - V} + H(V\tau - x) \int_{-\infty}^{x/\tau} G_f(y, 1) \frac{dy}{y - V}. \quad (10)$$

Для получения представления перемещений, пригодного для дальнейших исследований, необходимо перейти от несобственных интегралов в (10) к собственным с учетом ограничений, накладываемых на пределы интегрирования функциями Хевисайда, входящими в (7).

Рассматривая диапазоны  $x/\tau > V$  и  $x/\tau < V$  при различных скоростных режимах:  $V < \eta^{-1}$ ,  $\eta^{-1} < V < 1$ ,  $V > 1$ , с учетом носителей  $h_1 = \{y : H(1 - |y|) = 1\}$  и  $h_2 = \{y : H(1 - \eta|y|) = 1\}$  функций  $G_{f1}(y, 1)$  и  $G_{f2}(y, 1)$ , а также неравенства  $\eta \geq 1$  [1], приходим к следующему представлению:

$$w_0(x, \tau) = -w_1(x, \tau)H(x - V\tau) + w_2(x, \tau)(x - V\tau), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} w_1(x, \tau) = & H(V - 1)H(x - \tau)I_1(-1, 1) + \\ & + H(\eta V - 1)H(\eta x - \tau)I_2(-1/\eta, 1/\eta) + \\ & + H(\tau - |x|)I_1(-1, x/\tau) + H(\tau - \eta|x|)I_2(-1/\eta, x/\tau), \end{aligned}$$

$$w_2(x, \tau) = H(1 - V)H(\tau - x)I_1(x/\tau, 1) + H(1 - \eta V)H(\tau - \eta x)I_2(x/\tau, 1/\eta),$$

$$I_k(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{G_{fk}(y, 1)}{y - V} dy, \quad k = 1, 2. \quad (12)$$

Заметим, что многочлен  $P_2(y^2, 1)$  не имеет действительных корней в областях, определяемых аргументами функций Жевисайда в (7), поэтому подынтегральная функция  $G_f$  имеет степенные особенности, носители которых совпадают с нулями многочлена  $P_1(y^2, 1)$ :  $y = \pm c_R$  [1].

Далее понадобятся первообразные подынтегральных функций, входящих в (12). Для их получения разложим функции

$$\tilde{G}_{f_1}(y, 1) = \frac{G_{f_1}(y, 1)}{\sqrt{1 - y}}, \quad \tilde{G}_{f_2}(y, 1) = \frac{G_{f_1}(y, 1)}{\sqrt{1 - \eta^2 y}}$$

на элементарные дроби ( $V \neq c_R$ ):

$$\frac{\tilde{G}_{fk}(y, 1)}{y - V} = \sum_{\ell=1}^7 \frac{a_{\ell k}}{y - b_\ell}, \quad k = 1, 2,$$

где

$$P_3(y^2, 1) = P_1(y^2, 1)P_2(y^2, 1) = P_1(y^2, 1)Q_2(y, 1)Q_2(-y, 1),$$

$$Q_2(y, 1) = y^2 + \gamma y + \beta, \quad \gamma = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta)},$$

$$a_{1k} = \frac{g_k(V^2, 1)}{\pi \eta^4 f_k(V^2) P_3(V^2, 1)}, \quad a_{2k} = \frac{g_k(c_R^2, 1)}{2\pi \eta^4 c_R f_k(c_R^2)(c_R - V) P_2(c_R^2, 1)},$$

$$a_{3k} = \frac{g_k(c_R^2, 1)}{2\pi \eta^4 c_R f_k(c_R^2)(c_R + V) P_2(c_R^2, 1)},$$

$$a_{4k} = \frac{g_k(y_1^2, 1)}{\pi \eta^4 (y_1 - V) f_k(y_1^2) P_1(y_1^2, 1) Q_2(-y_1, 1)(y_1 - \bar{y}_1)},$$

$$a_{5k} = \frac{g_k(\bar{y}_1^2, 1)}{\pi \eta^4 (\bar{y}_1 - V) f_k(\bar{y}_1^2) P_1(\bar{y}_1^2, 1) Q_2(-\bar{y}_1, 1)(\bar{y}_1 - y_1)},$$

$$a_{6k} = -\frac{g_k(\bar{y}_1^2, 1)}{\pi \eta^4 (\bar{y}_1 + V) f_k(\bar{y}_1^2) P_1(\bar{y}_1^2, 1) Q_2(-\bar{y}_1, 1)(y_1 - \bar{y}_1)},$$

$$a_{7k} = -\frac{g_k(y_1^2, 1)}{\pi \eta^4 (y_1 + V) f_k(y_1^2) P_1(y_1^2, 1) Q_2(-y_1, 1)(\bar{y}_1 - y_1)},$$

$$b_1 = V, \quad b_2 = c_R, \quad b_3 = -c_R, \quad b_4 = y_1,$$

$$b_5 = \bar{y}_1, \quad b_6 = -y_1, \quad b_7 = -\bar{y}_1,$$

$$f_k(y) = \sqrt{1 - \eta_k^2 y^2}, \quad y_1 = \frac{-\gamma + i\sqrt{4\beta - \gamma^2}}{2}$$

Тогда интегралы (12) будут выглядеть так:

$$I_k(\tau_1, \tau_2) = \sum_{\ell=1}^7 I_{\ell k}(\tau_1, \tau_2), \quad k = 1, 2,$$

$$I_{\ell k}(\tau_1, \tau_2) = a_{\ell k} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{f_k(y) dy}{y - b_\ell}. \quad (13)$$

Найдем первообразную функции  $r_{lk}(y) = \frac{f_{1k}(y)}{y - b_\ell}$ :

$$R_{lk}(y) = \int r_{lk}(y) dy = f_{1k}(y) - f_{1k}(b_\ell) \ln(2) - \eta_k^{1/2} b_\ell \arctan\left(\frac{\eta_k^{1/2} y}{f_{1k}(y)}\right) - f_{1k}(b_\ell) \ln\left(\frac{\eta_k^{1/2} b_\ell - 1 - f_{1k}(b_\ell) f_{1k}(y)}{b_\ell - y}\right). \quad (14)$$

Заметим, интегралы в (13) сингулярные. В случае расположения особенности в пределах интегрирования  $T^* \in (\tau_1, \tau_2)$ , соответствующий интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, которое вычисляется аналитически с использованием первообразной (14) (символ  $\text{Vp}$  перед знаком интеграла означает, что последний понимается в смысле главного значения):

$$\text{Vp} \int_{\tau_1}^{\tau_2} r_{lk}(y) dy = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\tau_1}^{T^* - \varepsilon} r_{lk}(y) dy + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T^* + \varepsilon}^{\tau_2} r_{lk}(y) dy = R_{lk}(y)|_{\tau_1}^{\tau_2},$$

тогда

$$I_{lk} = a_{lk} R_{lk}(y)|_{\tau_1}^{\tau_2} = a_{lk} [R_{lk}(\tau_2) - R_{lk}(\tau_1)].$$

Из (11) видно, что характер решения существенно зависит от скорости движения нагрузки, поэтому необходимо рассмотреть следующие диапазоны:  $V < \eta^{-1}$ ,  $\eta^{-1} < V < 1$ ,  $V > 1$ , для каждого из которых расчетная формула будет своя. Для получения результатов следует рассмотреть каждый случай по отдельности, после чего взять все интегралы  $I_k(\tau_1, \tau_2)$  описанным выше способом.

В качестве примера рассмотрим случай  $V < \eta^{-1}$ . Тогда, исходя из (11), получим следующее представление решения:

$$w(x, \tau) = \begin{cases} 0, & x/\tau < -1, \\ I_1(-1, x/\tau), & -1 < x/\tau < -\eta^{-1}, \\ I_1(-1, x/\tau) + I_2(-\eta^{-1}, x/\tau), & -\eta^{-1} < x/\tau < V, \\ I_1(x/\tau, 1) + I_2(x/\tau, \eta^{-1}), & V < x/\tau < \eta^{-1}, \\ -I_1(x/\tau, 1), & \eta^{-1} < x/\tau < 1, \\ 0, & x/\tau > 1. \end{cases}$$

Процедура получения решения в других диапазонах скорости движения нагрузки аналогична описанной выше.

**4. Результаты.** Ниже приведены графические результаты для случаев  $V < \eta^{-1}$ ,  $\eta^{-1} < V < 1$  и  $V > 1$  соответственно. В качестве материала, заполняющего полуплоскость, был выбран алюминиевый сплав с безразмерными параметрами  $c_R = 0.35$ ,  $\eta = 1.3$ . На графиках представлены зависимости нормального перемещения границы упругого тела  $w(x, \tau)$  от координаты  $x$  в заданный момент времени  $\tau$ . Пунктирными линиями обозначены вертикальные асимптоты, соответствующие точкам разрыва функции.

На рис. 2 первый разрыв (при  $x = 0.1$ ) соответствует точке положения приложенной нагрузки в данный момент времени, второй разрыв ( $x = 0.35$ )

– фронту волны Рэлея. Отметим, что при прохождении скорости движения нагрузки через значение скорости волны Рэлея, происходит изменение знака нормальных перемещений, как видно из рис. 2 и рис. 3.

На рис. 3 положение фронта волны Рэлея соответствует координате  $x = 0.35$ , а точки положения приложенной нагрузки –  $x = 0.6$ .

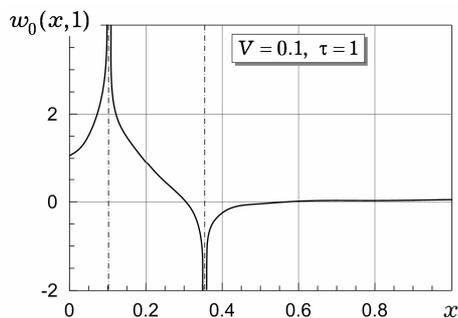


Рис. 2

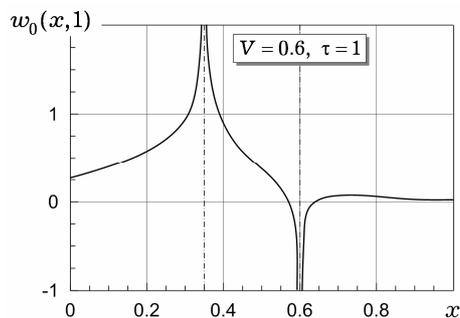


Рис. 3

На рис. 4 представлен сверхзвуковой режим движения нагрузки, точке приложения которой соответствует координата  $x = 1.2$ . При  $x > 1.2$  перемещения отсутствуют. Асимптота  $x = 0.35$  соответствует положению фронта волны Рэлея.

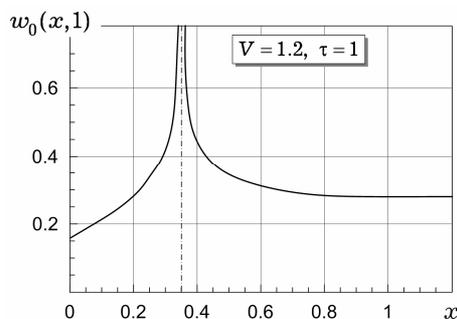


Рис. 4

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.В37.21.0381 от 02 августа 2012 г.) и гранта РФФИ № 13-08-01051.

1. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
2. Горшков А. Г., Тарлаковский Д. В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. – Москва: ФИЗМАТЛИТ, 1995. – 352 с.
3. Каплунов Ю. Д. Нестационарная динамика упругой полуплоскости при действии подвижной нагрузки. – Москва, 1986. – 54 с. – (Препр. / Ин-т проблем механики АН СССР; № 277).
4. Мاستиновский Ю. В., Засовенко А. В. Нестационарное деформирование однопролетной балки под действием подвижной нагрузки // Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні. – 2008. – № 2. – С. 40–43.
5. Ang D. D. Transient motion of a line load on the surface of an elastic half-space // Quart. Appl. Math. – 1960. – **18**, No. 3. – P. 251–256.
6. Higuchi N., Hirashima K.-I. Unsteady stresses produced in an elastic half-plane by moving loads // Theor. and Appl. Mech. (Proc. 27th Jap. Natl Congr. Appl. Mech., Tokyo, 1977). – Tokyo, 1979. – Vol. 27. – P. 359–370.
7. Mitra M. Note on the disturbance produced in an elastic half-space by transient pressure applied over a portion of the boundary // Proc. Natl. Acad. Sci. India. A. – 1962. – **A28**, No. 1. – P. 199–205.
8. Nath Sisir, Sengupta P. R. Steady-state response to moving loads in an elastic solid media // Indian J. Pure Appl. Math. – 1999. – **30**, No. 3. – P. 317–327.

**ПЛОСКА НЕСТАЦІОНАРНА ЗАДАЧА ПРО РУХ ПОВЕРХНЕВОГО  
НАВАНТАЖЕННЯ ПО ПРУЖНОМУ ПІВПРОСТОРУ**

*Досліджується реакція пружної півплощини на вплив нормального зосередженого навантаження, яке рухається вздовж її межі. У загальному випадку закон руху навантаження довільний. Розв'язання задачі ґрунтується на принципі суперпозиції. Побудовано одновимірне інтегральне подання розв'язку. Отримано результати для випадку рівномірного руху навантаження. Показано залежність розв'язку від швидкості руху навантаження, виявлено особливості розв'язку, наведено графічні результати.*

**PLANE NONSTEADY-STATE PROBLEM OF MOTION OF THE SURFACE  
LOAD ON AN ELASTIC HALF-SPACE**

*Reaction of elastic half-plane to influence of the normal concentrated loading moving along its border is investigated. In general the law of motion of loading is arbitrary. The solution of a problem is based on the principle of superposition. One-dimensional integral representation of the solution is constructed. The results for the case of uniform motion of loading are obtained. Dependence of the solution on the speed of motion of loading is shown, the features of the solution are revealed, graphic results are presented.*

Моск. авиац. ин-т  
(нац. исслед. ун-т), Москва, Россия

Получено  
29.11.12