

## ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ

*Запропоновано чисельно-аналітичний метод дослідження параметричних коливань багатошарових пластин під дією статичного та періодичного навантаження у серединній площині. Метод застосовано для рівнянь руху пластин, одержаних в рамках класичної теорії. В основу розробленого підходу покладено використання теорії  $R$ -функцій і варіаційних методів, що дозволяє досліджувати пластини довільної геометричної форми з різними граничними умовами. Згідно з запропонованим підходом, перш за все, розраховується докритичний стан пластини, якщо він не є однорідним. Для побудови зон динамічної нестійкості використано метод, запропонований в роботах В. В. Болотіна. Виконано порівняння результатів, одержаних за допомогою розробленого підходу, з відомими результатами. Розв'язано ряд нових задач для багатошарових пластин складної геометричної форми з отвором.*

Дослідження параметричних коливань багатошарових композитних пластин є важливою та актуальною проблемою сучасної нелінійної механіки. Особливістю такого класу задач є можлива втрата стійкості при відповідних значеннях параметрів навантаження, що призводить до небажаних наслідків і навіть до руйнування конструкції. Враховуючи, що реальні елементи тонкостінних конструкцій зазвичай мають отвори, надрізи, взагалі довільну геометричну форму, що істотно впливає на докритичний стан пластини, слід розробляти універсальні алгоритми, які б дозволяли розрахунок докритичного стану. З сучасним станом цього питання можна ознайомитися по роботах S. K. Sahu, P. K. Datta [10], S. Dash, A. V. Asha, S. K. Sahu [7], G. I. Simitses [11], T. Y. Ng, K. Y. Lam, J. N. Reddy [9], Michael P. Nemeth [8] та інших. З огляду на вказані роботи можна зробити висновок, що чисельно-аналітичні підходи до дослідження параметричних коливань багатошарових пластин складної геометричної форми, а також при неоднорідності пластин, майже відсутні.

Метод, запропонований у цій роботі, можна віднести саме до універсальних підходів, які дозволяють враховувати докритичний стан і досліджувати багатошарові пластини зі складною формою плану. Аналогічний підхід, що базується на теорії  $R$ -функцій та варіаційних методах ( $RFM$ ) [5], раніше було розвинуто для одношарових ізотропних та ортотропних пластин [6]. Новизна цієї роботи полягає у розвитку  $RFM$  для дослідження стійкості багатошарових пластин симетричної будови. При цьому в аналітичному вигляді записано вирази для коефіцієнтів системи звичайних диференціальних рівнянь, до яких зведено вихідну систему руху за допомогою багатомодової апроксимації невідомих функцій.

**1. Математична постановка задачі.** Розглянемо багатошарову пластину симетричної будови (рис. 1) постійної товщини  $h$ , яка є достатньо малою відносно інших розмірів пластини. Для постановки задачі будемо використовувати класичну геометрично нелінійну теорію, яка базується на гіпотезах Кірхгофа – Лява.

Згідно з цією теорією компоненти деформації в серединній площині визначаються як

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Тут  $u, v, w$  – переміщення точок серединної площини в напрямках осей  $Ox, Oy$  та  $Oz$  відповідно.

Залежності зусиль  $N_x, N_y, N_{xy}$  і моментів  $M_x, M_y, M_{xy}$  від деформацій запишемо в матричній формі:

$$\{N\} = [\mathbf{C}] \cdot \{\varepsilon\}, \quad \{M\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\chi\},$$

де  $\mathbf{C}$  і  $\mathbf{D}$  – матриці зведених жорсткісних коефіцієнтів:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}.$$

Через  $\{\varepsilon\}, \{\chi\}, \{N\}, \{M\}$  позначено вектори деформацій, зусиль і моментів відповідно

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^\top, & \{\chi\} &= (\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^\top, \\ \{N\} &= (N_x, N_y, N_{xy})^\top, & \{M\} &= (M_x, M_y, M_{xy})^\top. \end{aligned}$$

Зведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}, D_{ij}$  ( $ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$ ) визначаються таким чином [1]:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij}^{(s)}(1, z^2) dz, \quad i, j = 1, 2, 6,$$

де  $B_{ij}^{(s)}$  – пружні константи  $s$ -го шару.

У загальному випадку, коли осі анізотропії не співпадають з напрямками осей  $Ox$  та  $Oy$ , пружні константи  $B_{ij}^{(s)}$ ,  $i, j = 1, 2, 6$ ,  $s$ -го шару визначаються за відомими формулами перетворення [1] при повороті осей анізотропії на деякий кут  $\alpha$ .

Для зручності подамо зусилля  $\{N\} = (N_x, N_y, N_{xy})^\top$  та деформації  $\{\varepsilon\} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^\top$  у вигляді сум лінійної та нелінійної складових:

$$\{N\} = \{N\}^{(L)} + \{N\}^{(N)}, \quad \{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}^{(L)} + \{\varepsilon\}^{(N)},$$

де

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^{(L)} &= (\varepsilon_x^{(L)}, \varepsilon_y^{(L)}, \varepsilon_{xy}^{(L)})^\top = \left( \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^\top, \\ \{\varepsilon\}^{(N)} &= (\varepsilon_x^{(N)}, \varepsilon_y^{(N)}, \varepsilon_{xy}^{(N)})^\top = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right)^\top, \end{aligned}$$

тоді

$$\{N\}^{(L)} = [\mathbf{C}] \cdot \{\varepsilon\}^{(L)}, \quad \{N\}^{(N)} = [\mathbf{C}] \cdot \{\varepsilon\}^{(N)}.$$

Нехтуючи силами інерції у серединній площині, рівняння руху запишемо в операторній формі:

$$L_{11}u + L_{12}v = -N\ell_1(w), \quad (1)$$

$$L_{21}u + L_{22}v = -N\ell_2(w), \quad (2)$$

$$L_{33}w = N\ell_3(u, v, w) - \varepsilon m_1 \frac{\partial w}{\partial t} - m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де оператори  $L_{ij}$ ,  $Nl_i$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , визначаються як

$$\begin{aligned} L_{11} &= C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{22} &= C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{12} &= L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + \\ &\quad + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ Nl_1 &= \frac{\partial w}{\partial x} L_{11} w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{12} w, \\ Nl_2 &= \frac{\partial w}{\partial x} L_{12} w + \frac{\partial w}{\partial y} L_{22} w, \\ Nl_3 &= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

У рівнянні (3)  $\varepsilon$  – коефіцієнт демпфування.

Систему рівнянь (1)–(3) доповнюємо відповідними граничними умовами.

Зауважимо, що на навантаженій частині границі умови в площині пластини мають вигляд

$$N_n = -p, \quad T_n = 0,$$

де

$$N_n = N_x \ell^2 + N_y m^2 + 2N_{xy} \ell m, \quad T_n = N_{xy} (\ell^2 - m^2) + (N_y - N_x) \ell m,$$

тут  $\ell$  та  $m$  – напрямні косинуси зовнішньої нормалі  $n$  до межі області.

Контурні зусилля  $N_n$ ,  $T_n$  також подамо у вигляді суми лінійної та нелінійної частин:

$$N_n = N_n^{(L)} + N_n^{(N)}, \quad T_n = T_n^{(L)} + T_n^{(N)},$$

де

$$\begin{aligned} N_n^{(L)} &= \{P\} \cdot \{\varepsilon\}^{(L)}, & N_n^{(N)} &= \{P\} \cdot \{\varepsilon\}^{(N)}, \\ T_n^{(L)} &= \{Q\} \cdot \{\varepsilon\}^{(L)}, & T_n^{(N)} &= \{Q\} \cdot \{\varepsilon\}^{(N)}. \end{aligned}$$

Через  $\{P\} = (P_1, P_2, P_3)$  і  $\{Q\} = (Q_1, Q_2, Q_3)$  тут позначено вектори з такими компонентами:

$$\begin{aligned} P_1 &= C_{11} \ell^2 + C_{12} m^2 + 2C_{16} \ell m, \\ P_2 &= C_{12} \ell^2 + C_{22} m^2 + 2C_{26} \ell m, \\ P_3 &= C_{16} \ell^2 + C_{26} m^2 + 2C_{66} \ell m, \\ Q_1 &= C_{11} (\ell^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11}) \ell m, \\ Q_2 &= C_{26} (\ell^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12}) \ell m, \\ Q_3 &= C_{66} (\ell^2 - m^2) + (C_{26} - C_{16}) \ell m. \end{aligned}$$

**Метод розв'язування.** Розроблений алгоритм розв'язання задачі про параметричні коливання багат шарової пластини сформулюємо як виконання таких послідовних етапів.

- 1°. Визначення неоднорідного докритичного стану пластини.
- 2°. Знаходження критичного навантаження.
- 3°. Розв'язання задачі про лінійні коливання пластини, навантаженої в серединній площині.
- 4°. Розв'язання нелінійної задачі про коливання пластини.
- 5°. Дослідження нелінійних коливань пластин, стиснених статичним навантаженням, побудова скелетних кривих.
- 6°. Побудова областей динамічної нестійкості та визначення амплітуд усталених коливань у зонах параметричного резонансу.

1°. Розрахунок докритичного стану виконуємо, розв'язуючи лінеаризовану систему перших двох рівнянь руху (1), (2):

$$L_{11}u_1 + L_{12}v_1 = 0, \quad (4)$$

$$L_{21}u_1 + L_{22}v_1 = 0, \quad (5)$$

доповнену на навантаженої частині границі  $\partial\Omega_1$  умовами

$$N_n^{(L)}(u_1, v_1) = -1, \quad T_n^{(L)}(u_1, v_1) = 0. \quad (6)$$

Варіаційна постановка задачі (4)–(6) зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x^{(L)} \varepsilon_x + N_y^{(L)} \varepsilon_y + N_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)}(u_1 \ell + v_1 m) d\Omega_1. \quad (7)$$

Мінімум функціонала (7) будемо знаходити на множині функцій, які задовольняють головні (кінематичні) граничні умови. Систему базисних функцій побудуємо за допомогою теорії  $R$ -функцій [3–5]. Наприклад, якщо пластина на ненавантаженої частині границі  $\partial\Omega_2$  є нерухомою в своїй площині, то пучок допустимих функцій визначається за допомогою структурних формул

$$u_1 = \omega_2 \Phi_1, \quad v_1 = \omega_2 \Phi_2,$$

де  $\omega_2 = 0$  – рівняння частини межі  $\partial\Omega_2$ ,  $\Phi_i$ ,  $i = 1, 2$ , – невизначені компоненти структурних формул [3–5]. Згідно з  $RFM$  для знаходження  $\Phi_i$  запишемо їх у вигляді розвинення за деякою повною системою функцій  $\{\varphi_k^{(i)}\}$ :

$$\Phi_i = \sum_{k=1}^n a_k^{(i)} \varphi_k^{(i)}.$$

Тут  $\{a_k^{(i)}\}$  – невідомі коефіцієнти, які визначаємо з умови стаціонарності функціонала (7):

$$\frac{\partial I}{\partial a_k^{(i)}} = 0.$$

Внаслідок розв'язання сформульованої задачі знаходимо функції  $u_1$  та  $v_1$ , а також зусилля

$$\{N_0\}^{(L)} = (N_{0x}^{(L)}(u_1, v_1), N_{0y}^{(L)}(u_1, v_1), N_{0xy}^{(L)}(u_1, v_1))^T,$$

які визначаємо як

$$\{N_0\}^{(L)} = [C] \cdot \{\varepsilon_0\}^{(L)}, \quad (8)$$

де

$$\{\varepsilon_0\}^{(L)} = (\varepsilon_{0x}^{(L)}, \varepsilon_{0y}^{(L)}, \varepsilon_{0xy}^{(L)})^\top,$$

$$\varepsilon_{0x}^{(L)} = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad \varepsilon_{0y}^{(L)} = \frac{\partial v_1}{\partial y}, \quad \varepsilon_{0xy}^{(L)} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}.$$

2°. Щоб визначити критичне навантаження, розглянемо рівняння (3), враховуючи, що стискаючі навантаження змінюються пропорційно до деякого параметра  $\lambda$ :

$$L_{33}w = \lambda \cdot Nl_3(u_1, v_1, w). \quad (9)$$

Критичне значення параметра  $\lambda$  знайдемо за допомогою енергетичного підходу, згідно з яким розв'язання рівняння (9) з відповідними граничними умовами можна звести до еквівалентної варіаційної задачі про знаходження мінімуму такого функціонала:

$$I(w) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ (M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + \lambda \left( N_x^0 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^0 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^0 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy. \quad (10)$$

Як і раніше, мінімізацію функціонала (10) будемо виконувати на множині базисних функцій, побудованих за допомогою *RFM*.

Наприклад, структура розв'язку, що задовольняє умови жорсткого закріплення, буде мати вигляд:

$$w = \omega^2 \Phi_3,$$

де  $\Phi_3$  – невизначена компонента структури, яку необхідно розвинути в ряд за деякою повною системою функцій. Структури для інших типів граничних умов наведено в [3].

В результаті застосування методу Рітца цю задачу зводимо до задачі на власні значення. Найменше з власних чисел визначає значення критичного параметра  $\lambda$ , отже, і критичне навантаження.

3°. Розв'язок задачі про лінійні коливання пластин, що знаходяться під дією статичного навантаження  $p_0$ , також отримано за допомогою методу Рітца в результаті мінімізації наступного функціонала:

$$I = \Pi_{\max} - T_{\max},$$

де  $\Pi_{\max}$  – повна потенціальна енергія пластини, яка враховує вплив сил в серединній площині:

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy} + p_0 \left( N_x^{(L)}(u_1, v_1) \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y^{(L)}(u_1, v_1) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + N_{xy}^{(L)}(u_1, v_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] d\Omega,$$

а  $T_{\max}$  – кінетична енергія пластини

$$T_{\max} = \frac{m_1 \Omega_L^2}{2} \iint_{\Omega} w^2 d\Omega,$$

де  $\Omega_L$  – власна частота, що відповідає навантаженню  $p_0$ .

4°. Для розв'язання задачі про геометрично нелінійні коливання стиснутої пластини невідомі функції  $(u, v, w)$  подамо у вигляді

$$\begin{aligned} w(x, y, t) &= \sum_{i=1}^n y_i(t) w_i(x, y), \\ u(x, y, t) &= u_1(x, y) p + \sum_{i,j=1}^n y_i(t) y_j(t) u_{ij}(x, y), \\ v(x, y, t) &= v_1(x, y) p + \sum_{i,j=1}^n y_i(t) y_j(t) v_{ij}(x, y). \end{aligned} \quad (11)$$

Тут  $p$  – навантаження, що визначається як

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t,$$

$p_0$  – статична складова навантаження,  $p_t$  – амплітуда періодичної частини навантаження,  $w_i(x, y)$  – власні функції, які відповідають відповідним частотам лінійних коливань пластини під дією навантаження  $p_0$ , а функції  $(u_{ij}, v_{ij})$  – розв'язки системи

$$\begin{aligned} L_{11}(u_{ij}) + L_{12}(v_{ij}) &= -N\ell_1^{(2)}(w_i, w_j), \\ L_{21}(u_{ij}) + L_{22}(v_{ij}) &= -N\ell_2^{(2)}(w_i, w_j), \end{aligned} \quad (12)$$

доповненої такими граничними умовами на навантаженій частині:

$$\begin{aligned} N_n^{(L)}(u_{ij}, v_{ij}) &= -N_n^{(N)}(w_i, w_j), \\ T_n^{(L)}(u_{ij}, v_{ij}) &= -T_n^{(N)}(w_i, w_j). \end{aligned} \quad (13)$$

На інших частинах границі умови для функцій  $(u_{ij}, v_{ij})$  будуть такими ж, як і в лінійній задачі першого пункту, а статичні умови набудуть вигляду (13).

Праві частини рівнянь (12) визначаються як

$$\begin{aligned} N\ell_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= w_{i,x} L_{11} w_j + w_{i,y} L_{12} w_j, \\ N\ell_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= w_{i,x} L_{12} w_j + w_{i,y} L_{22} w_j. \end{aligned}$$

А праві частини граничних умов (13) мають вигляд

$$\begin{aligned} N_n^{(N)}(w_i, w_j) &= \frac{1}{2} \left( P_1 \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + P_2 \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + P_3 \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \right), \\ T_n^{(N)}(w_i, w_j) &= \frac{1}{2} \left( Q_1 \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} + Q_2 \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \right. \\ &\quad \left. + Q_3 \left( \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial x} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \right). \end{aligned}$$

Варіаційна постановка задачі (12), (13) зводиться до знаходження мінімуму функціонала

$$\begin{aligned}
I(u_{ij}, v_{ij}) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x^{(L)} \varepsilon_x^{(L)} + N_y^{(L)} \varepsilon_y^{(L)} + N_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}^{(L)} - 2(N\ell_1^{(2)}(w_i, w_j)u_{ij} + \\
& + N\ell_2^{(2)}(w_i, w_j)v_{ij}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} N_n^{(N)}(w_i, w_j)(u_{ij}\ell + v_{ij}m) + \\
& + T_n^{(N)}(w_i, w_j)(-u_{ij}m + v_{ij}\ell) d\Omega_1. \tag{14}
\end{aligned}$$

Як і вище, послідовність задач (14) розв'язуємо за допомогою варіаційного методу Рітца. Системи базисних функцій будемо з використанням *RFM*.

Легко переконатися, що після підстановки виразів (11) у початкову систему (1)–(3) перші два рівняння будуть задовольнятися тотожно, а рівняння (3) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n y_k(t) L_{33} w_k = & -m_1 \left( \sum_{k=1}^n (y_k''(t) + \varepsilon y_k'(t)) w_k(x, y) \right) + \\
& + p(t) \sum_{k=1}^n y_k(t) N\ell_{31}(u_1, v_1, w_k) + \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i(t) y_j(t) y_k(t) N\ell_{32}(u_{ij}, v_{ij}, w_k), \tag{15}
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
N\ell_{31}(u_1, v_1, w_k) = & N_{0x}^{(L)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + N_{0y}^{(L)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + 2N_{0xy}^{(L)} \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y}, \\
N\ell_{32}(u_{ij}, v_{ij}, w_k) = & N_x^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} + N_y^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial y^2} + \\
& + 2N_{xy}^{(Np)}(u_{ij}, v_{ij}, w_k) \frac{\partial^2 w_k}{\partial x \partial y},
\end{aligned}$$

при цьому  $N_{0x}^{(L)}$ ,  $N_{0y}^{(L)}$ ,  $N_{0xy}^{(L)}$  визначаються за формулами (8), а  $N_x^{(Np)}$ ,  $N_y^{(Np)}$ ,  $N_{xy}^{(Np)}$  мають такий вигляд:

$$\{N\}^{(Np)} = \begin{bmatrix} N_x^{(Np)} \\ N_y^{(Np)} \\ N_{xy}^{(Np)} \end{bmatrix} = [\mathbf{C}] \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i}{\partial y} \frac{\partial w_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} + \frac{\partial w_i}{\partial x} \frac{\partial w_j}{\partial y} \right) \end{bmatrix}.$$

Враховуючи, що  $p = p_0 + p_t \cos \theta t$ , рівняння (15) запишемо так:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n y_k(t) (L_{33} w_k - p_0 N\ell_{31}(u_1, v_1, w_k)) = & \\
= & p_t \cos \theta t \sum_{k=1}^n y_k(t) N\ell_{31}(u_1, v_1, w_k) - \\
& - m_1 \sum_{k=1}^n (y_k''(t) + \varepsilon y_k'(t)) w_k(x, y) + \\
& + \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i(t) y_j(t) y_k(t) N\ell_{32}(u_{ij}, v_{ij}, w_k). \tag{16}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що вираз в дужках зліва в першій сумі дорівнює  $m_1 \Omega_k^2 w_k$ . Застосовуючи метод Бубнова – Гальоркіна до рівняння (16) відносно власних функцій  $w_m$ ,  $m = 1, \dots, n$ , які є ортогональними, та скоротивши на  $m_1 \|w_m\|^2$ , одержимо систему рівнянь

$$y_m''(t) + \varepsilon y_m'(t) + \Omega_m^2 \left( y_m + p_t \cos \theta t \sum_{k=1}^n \alpha_k^{(m)} y_k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk}^{(m)} y_i(t) y_j(t) y_k(t) \right) = 0, \quad m = 1, \dots, n, \quad (17)$$

де коефіцієнти системи рівнянь (17) визначаються за такими формулами:

$$\alpha_k^{(m)} = - \frac{\iint_{\Omega} N \ell_{31}(u_1, v_1, w_k) w_m \, d\Omega}{m_1 \Omega_m^2 \|w_m\|^2},$$

$$\gamma_{ijk}^{(m)} = - \frac{\iint_{\Omega} N \ell_{32}(u_{ij}, v_{ij}, w_k) w_m \, d\Omega}{m_1 \Omega_m^2 \|w_m\|^2}.$$

Дослідження системи (17) є складною проблемою, але якщо обмежитися одномодовою апроксимацією невідомих функцій, тобто прогин пластини подати у вигляді

$$w(x, y, t) = y(t) w_1(x, y),$$

а переміщення в серединній площині відповідно

$$u(x, y, t) = p(t) u_1(x, y) + y^2(t) \cdot u_{11}(x, y),$$

$$v(x, y, t) = p(t) v_1(x, y) + y^2(t) \cdot v_{11}(x, y),$$

то система рівнянь (17) зводиться до одного рівняння

$$y''(t) + \varepsilon y'(t) + \Omega_L^2 (1 + \alpha p_t \cos \theta t + \gamma y^2(t)) y(t) = 0, \quad (18)$$

де  $y(t) = y_1(t)$ ,  $\Omega_L = \Omega_1$ , а коефіцієнти  $\alpha = \alpha_1^{(1)}$  та  $\gamma = \gamma_{111}^{(1)}$  визначаються за формулами

$$\alpha = - \frac{\iint_{\Omega} N \ell_{31}(u_1, v_1, w_1) w_1 \, d\Omega}{m_1 \Omega_L^2 \|w_1\|^2},$$

$$\gamma = - \frac{\iint_{\Omega} N \ell_{32}(u_1, v_1, w_1) w_1 \, d\Omega}{m_1 \Omega_L^2 \|w_1\|^2}.$$

Позначимо вираз  $\alpha \cdot p_t = -2k$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ . Тоді рівняння (18) набуває вигляду, як у [2]:

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2 ((1 - 2k \cos \theta t) y(t) + \gamma y^3(t)) = 0. \quad (19)$$

5°. У випадку статичного навантаження маємо  $p_t = 0$ , звідки  $k = 0$ . Тоді дослідження зводиться до розв'язання рівняння

$$y''(t) + \Omega_L^2 (y(t) + \gamma y^3(t)) = 0$$

(тут  $\varepsilon = 0$ ). Застосування до цього рівняння методу Бубнова – Гальоркіна дозволяє отримати залежність амплітуди нелінійних коливань від відно-



шення нелінійної частоти до лінійної  $\nu = \omega_N/\Omega_L$ :

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma A^2}.$$

6°. У випадку дії на пластину періодичного навантаження виникає потреба визначення зон динамічної нестійкості системи. Для дослідження стійкості, як показано в [2], достатньо розглянути лінеаризоване рівняння (19), тобто при  $\gamma = 0$ :

$$y''(t) + 2\varepsilon_1 y'(t) + \Omega_L^2 (1 - 2k \cdot \cos \theta t) y(t) = 0. \quad (20)$$

Відомо, що для рівняння (20) (рівняння Мат'є) головна область нестійкості (поблизу  $\theta = 2\Omega_L$ ) обмежена такими кривими [2]:

$$2\Omega_L \sqrt{1 - \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}} \leq \theta \leq 2\Omega_L \sqrt{1 + \sqrt{k^2 - \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}},$$

де через  $\Delta = \frac{2\pi\varepsilon_1}{\Omega}$  позначено декремент затухання [2]. При  $\varepsilon_1 = 0$  маємо

$$\theta_1 = 2\Omega_L \sqrt{1 - k}, \quad \theta_2 = 2\Omega_L \sqrt{1 + k}.$$

В цьому інтервалі виникає головний параметричний резонанс.

Для знаходження амплітуд усталених коливань в зоні головного параметричного резонансу, було використано підхід, викладений в [2], та отримана залежність між частотним відношенням  $\theta/2\Omega_L$  та амплітудою коливань  $A$ :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\gamma}} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 - 1 \pm \sqrt{k^2 - \left(\frac{\theta}{2\Omega_L}\right)^2 \left(\frac{\Delta}{\pi}\right)^2}}.$$

**Тестування запропонованого підходу.** Для тестування запропонованого алгоритму розглянемо коливання п'ятишарової квадратної пластини (див. рис. 1)

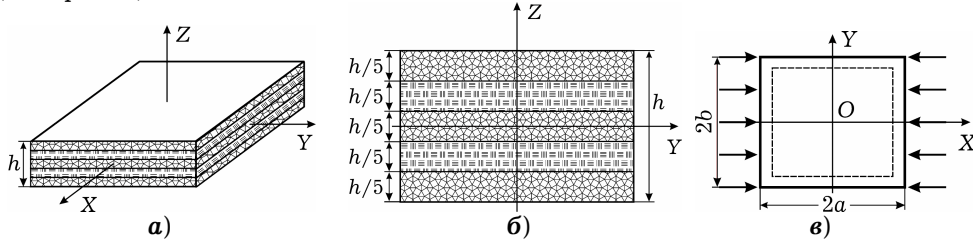


Рис. 1

з різними видами граничних умов:

– вільно оперта, нерухома в площині пластини

$$u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (21)$$

– вільно оперта, частково рухома в площині

$$u_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (22)$$

– жорстко затиснена пластини

$$u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (23)$$

Дослідження проводили для пластини з такими властивостями матеріалу:  $E_1/E_2 = 40$ ,  $G/E_2 = 0.6$ ,  $\nu_1 = 0.25$ . Будемо вважати, що всі шари мають однакову товщину, а загальна товщина пластини задовольняє співвідношення  $h/a = 0.01$ .

Зауважимо, що в розглядуваному випадку докритичний стан пластини є однорідним, тому пункт 1° можна було б пропустити, але для перевірки створеного програмного забезпечення цей пункт також було виконано.

У табл. 1 наведено порівняння значень частотного відношення  $\nu = \omega_N / \omega_L$  ( $\omega_L$  – вільна частота лінійних коливань ненавантаженої пластини) при різних граничних умовах для п'ятишарової квадратної пластини для різних значень амплітуди  $A$  та двох способів укладки шарів. Відхилення отриманих результатів від результатів роботи [12] не перевищує 3 %.

Таблиця 1

A	Граничні умови					
	Вільно оперта (21)		Вільно оперта (22)		Жорстко закріплена (23)	
	RFM	[12]	RFM	[12]	RFM	[12]
[0°/90°/0°/90°/0°]						
0.2	1.031	1.031	1.001	1.001	1.008	1.008
0.4	1.120	1.121	1.006	1.006	1.031	1.033
0.6	1.254	1.257	1.013	1.015	1.068	1.073
0.8	1.420	1.428	1.024	1.026	1.119	1.128
1.0	1.609	1.624	1.037	1.040	1.180	1.194
1.2	1.813	1.837	1.053	1.057	1.251	1.271
[45°/-45°/45°/-45°/45°]						
0.2	1.014	1.015	1.008	1.008	1.007	1.007
0.4	1.057	1.058	1.031	1.031	1.028	1.029
0.6	1.125	1.126	1.069	1.069	1.061	1.063
0.8	1.214	1.215	1.119	1.118	1.105	1.109
1.0	1.319	1.322	1.181	1.178	1.161	1.165
1.2	1.436	1.442	1.252	1.246	1.225	1.230

**Дослідження параметричних коливань пластини складної форми.**

Розглянемо п'ятишарову пластину симетричної будови з укладкою шарів [0°/90°/0°/90°/0°] (див. рис. 2). Форма пластини ускладнюється кутовими вирізами та отвором всередині. Нехай навантаження прикладене вздовж сторін, паралельних осі OY. Також будемо вважати, що на зовнішньому контурі функція прогину задовольняє умови  $w = 0, M_n = 0$  вільного опертя, а внутрішній контур є вільним. Для переміщень у площині пластини на навантаженій частині контуру граничні умови мають вигляд

$$N_n = -p, \quad T_n = 0,$$

а на ненавантаженій – такий:

$$N_n = 0, \quad T_n = 0.$$

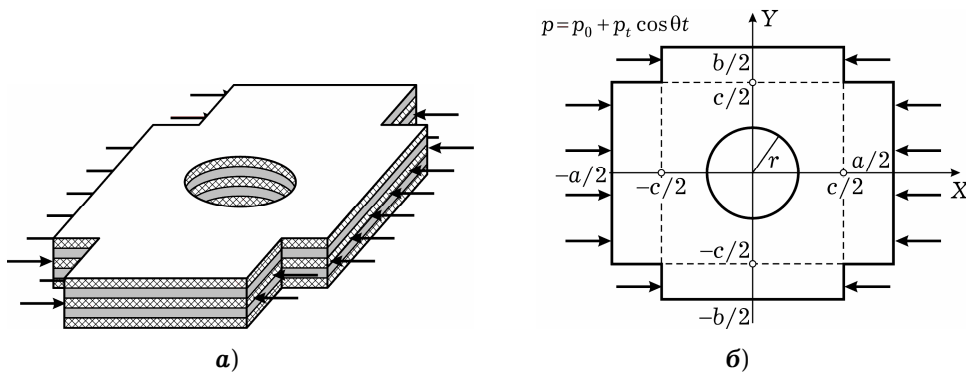


Рис. 2

Чисельні дослідження виконали для пластини з такими геометричними параметрами:  $b/a = 1$ ,  $h/a = 0.01$ ,  $c/a = 0.35$ . Розмір отвору  $r/a$  будемо варіювати. Властивості розглянутих матеріалів наведено у табл. 2.

Таблиця 2

Матеріал	$E_1/E_2$	$G/E_2$	$\nu_1 = \nu_2 E_1/E_2$
Glass-епoxy	3	0.6	0.25
Boron-епoxy	10	0.33	0.22
Graphite	40	0.6	0.25

Структуру розв'язку виберемо наступним чином:

$$u = \Phi_1, \quad v = \Phi_2, \quad w = \omega_2 \Phi_3,$$

де  $\omega_2(x, y) = 0$  – рівняння зовнішньої межі області,

$$\omega_2(x, y) = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4). \quad (24)$$

Функції  $f_1, f_2, f_3, f_4$  мають вигляд

$$f_1 = \frac{1}{a} \left( \left( \frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_2 = \frac{1}{b} \left( \left( \frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0,$$

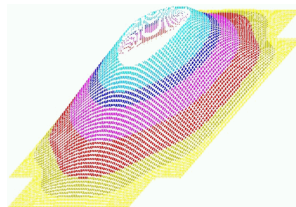
$$f_3 = \frac{1}{c} \left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_4 = \frac{1}{c} \left( \left( \frac{c}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0.$$

Символи  $\vee_0, \wedge_0$  у (24) визначають  $R$ -операції [5].

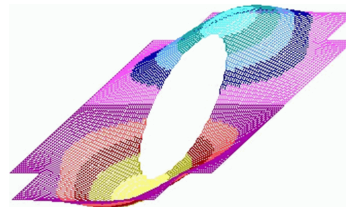
Значення частотного параметра  $\Lambda_i = \Omega_i a^2 \sqrt{\frac{12(1-\mu_1\mu_2)}{E_2 h^2}}$ ,  $i=1, \dots, 4$ , отримані для різних матеріалів при  $r/a = 0.15$ , наведено у табл. 3. Відповідні форми коливань для матеріалу «graphite» зображено на рис. 3.

Таблиця 3

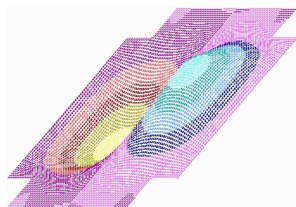
	$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$\Lambda_3$	$\Lambda_4$
Glass-епoxy	41.069	79.561	86.414	143.419
Boron-епoxy	55.157	108.418	128.919	202.165
Graphite	100.835	196.997	244.552	371.306



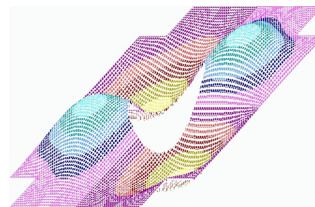
а)  $\Lambda_1 = 100.835$



б)  $\Lambda_2 = 196.997$



в)  $\Lambda_3 = 244.552$



г)  $\Lambda_4 = 371.306$

Рис. 3

Значення частотного параметра  $\Lambda = \Omega_L a^2 \sqrt{\frac{12(1-\mu_1\mu_2)}{E_2 h^2}}$  для різних матеріалів при різних розмірах отвору  $r/a$  і різних значеннях навантаження  $p_0/p_{kr}$  містяться у табл. 4.

Таблиця 4

Матеріал	$r/a$	$p_0/p_{kr}$			
		0	0.25	0.5	0.75
Glass-епoxy	0.1	39.275	34.261	28.228	20.194
	0.15	41.069	36.022	29.868	21.529
	0.2	45.287	40.112	33.621	24.552
	0.25	53.446	48.904	42.797	33.927
Boron-епoxy	0.1	53.896	46.837	38.399	27.288
	0.15	55.157	48.091	39.578	28.257
	0.2	59.817	52.474	43.461	31.241
	0.25	68.808	64.201	54.791	43.115
Graphite	0.1	99.030	86.016	70.474	50.039
	0.15	100.835	87.864	72.254	51.529
	0.2	109.007	95.347	78.720	56.416
	0.25	124.439	113.496	98.537	76.815

З наведених у табл. 4 даних можна зробити висновок, що зі збільшенням навантаження  $p_0/p_{kr}$  на пластину (для заданого  $r/a$ ) частотний параметр  $\Lambda$  зменшується, але збільшується зі збільшенням розміру отвору  $r/a$  у вибраному інтервалі  $0.1 \leq r/a \leq 0.25$ .

На рис. 4 – рис. 7 зображено області динамічної нестійкості (ОДН) для різних видів матеріалів, розмірів отвору  $r/a$ , значеннях статичного навантаження і демпфування. На рис. 4 наведено ОДН для пластини, виготовленої з «glass-епoxy», для різних значень  $r/a$ . Розмір отвору істотно впливає на розташування ОДН, його збільшення зумовлює зсув областей нестійкості вбік більших значень збуджуючої частоти. Криві 1–3 на рис. 5 зображують ОДН для отвору з  $r/a = 0.2$  при  $p_0/p_{kr} = 0.5$  відповідно для матеріалів «glass-епoxy», «boron-епoxy» і «graphite».

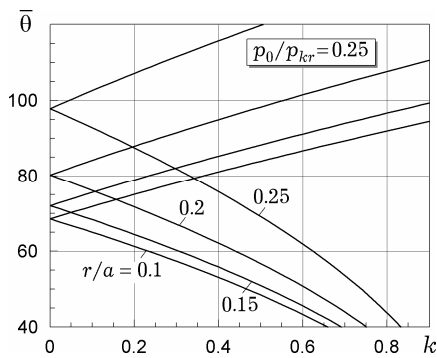


Рис. 4

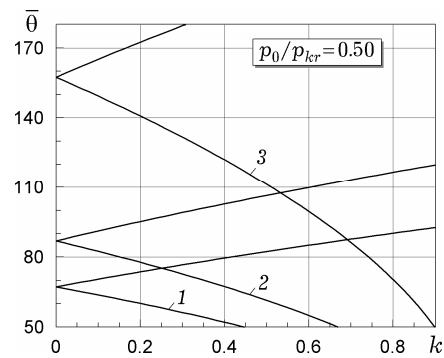


Рис. 5

Рис. 6 ілюструє ОДН для матеріалу «boron-епoxy» з отвором  $r/a = 0.2$  для різних значень параметра навантаження  $p_0/p_{kr}$ , а рис. 7 – ОДН для цього ж матеріалу при різних значеннях декременту затухання  $\Delta$  і фіксованих  $r/a = 0.1$ ,  $p_0/p_{kr} = 0.75$ . Зазначимо, що втрата стійкості для пластин, виготовлених з матеріалу «graphite», виникає при значно більших значеннях збуджуючої частоти. При збільшенні постійної складової

навантаження  $p_0$  область динамічної нестійкості зміщується у бік менших значень збуджуючої частоти. Збільшення значення декремента затухання призводить до зменшення ОДН.

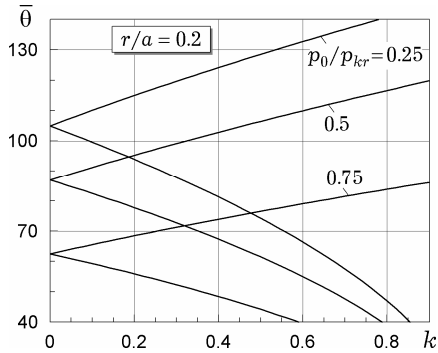


Рис. 6

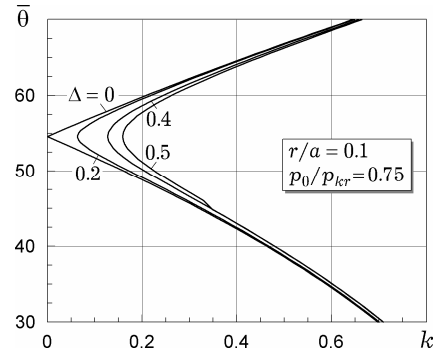


Рис. 7

Для аналізу нелінійних коливань пластини в зоні головного параметричного резонансу побудовано амплітудно-частотні характеристики для різних навантажень (рис. 8, рис. 9 – для матеріалу «борон-ероху») і для різних матеріалів (рис. 10). На рис. 8 наведено амплітудно-частотні залежності, отримані при фіксованих значеннях параметрів  $r/a = 0.1$ ,  $p_0/p_{kr} = 0.25$ ,  $\varepsilon = 0$  для різних значень  $Lp_t = 0.25, 0.5, 0.75$ , де  $Lp_t = \frac{p_t}{p_{kr}} \frac{1}{1 - \frac{p_0}{p_{kr}}}$ .

Отримані результати дозволяють зробити висновок, що зменшення амплітуди змінної частини навантаження  $p_t$  призводить до зближення гілок АЧХ.

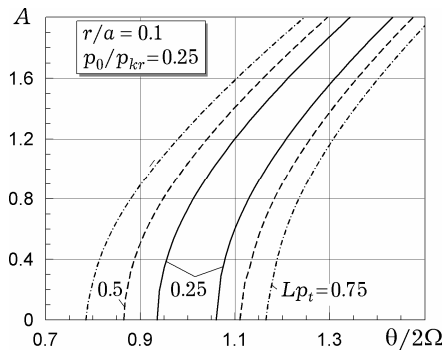


Рис. 8

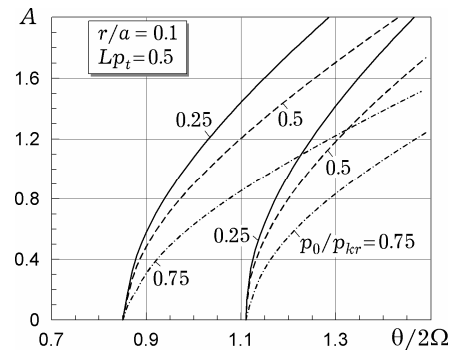


Рис. 9

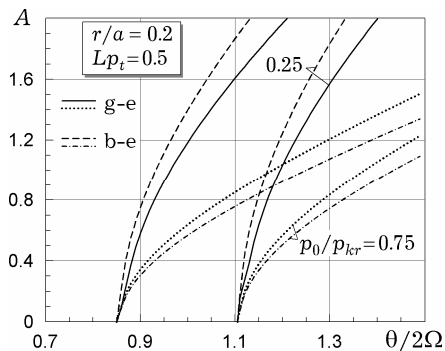


Рис. 10

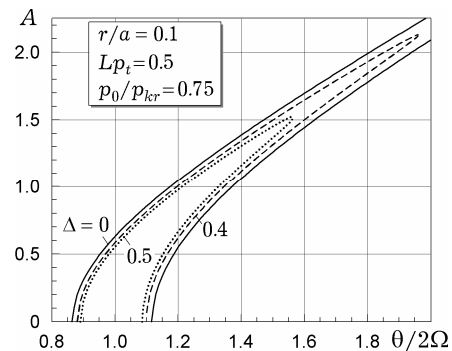


Рис. 11

Результати дослідження впливу постійної складової навантаження на АЧХ наведено на рис. 9 (при фіксованих  $r/a = 0.1$ ,  $Lp_t = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0$  для різних  $p_0/p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75$ , матеріал «boron-epoxy») і на рис. 10 (при фіксованих  $r/a = 0.2$ ,  $Lp_t = 0.5$ ,  $\varepsilon = 0$  для різних значень  $p_0/p_{kr} = 0.25, 0.75$ , матеріали «glass-epoxy» та «boron-epoxy»). Зміна постійної складової навантаження впливає на нахил кривих, у той же час вплив є істотнішим для пластини, виготовленої з матеріалу «boron-epoxy».

На рис. 11 побудовано амплітудно-частотні залежності, отримані для різних значень декременту затухання.

**Висновки.** У роботі запропоновано чисельно-аналітичний підхід для дослідження параметричних коливань й стійкості багатошарових пластин симетричної будови з будь-якою формою плану для різних видів граничних умов й способу укладання шарів. Метод базується на теорії  $R$ -функцій та варіаційних методах. Одержано аналітичні вирази для обчислення коефіцієнтів системи звичайних диференціальних рівнянь, до якої зведено вихідну систему при використанні багатомодової апроксимації невідомих функцій. Алгоритм реалізовано в рамках системи *POLE-RL*. За допомогою створеного програмного забезпечення було проведено тестування та розв'язано нові задачі коливання багатошарових пластин складної форми під дією статичного та періодичного навантаження в серединній площині. Виконано дослідження прямокутних пластин з метою порівняння значень частотного відношення з існуючими. Відмінність результатів з отриманими в роботі [12] не перевищує 3%. Досліджено коливання багатошарової пластини зі складною формою в зоні головного параметричного резонансу. Встановлено залежність досліджуваних характеристик (областей динамічної нестійкості, амплітудно-частотних залежностей) від параметрів навантаження, матеріалу та геометрії пластини.

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. – Москва: Наука, 1987. – 360 с.
2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем. – Москва: Гостехиздат, 1956. – 600 с.  
The same: Bolotin V. V. The dynamic stability of elastic systems. – San Francisco: Holden-Day, 1964.
3. Курпа Л. В. Метод  $R$ -функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: Нац. техн. ун-т «ХПИ», 2009. – 407 с.
4. Курпа Л., Мазур О. Параметричні коливання пластин складної форми плану // *Машинознавство*. – 2008. – № 3 (129). – С. 9–15.
5. Рвачев В. Л., Курпа Л. В.  $R$ -функции в задачах теории пластин. – Киев: Наук. думка, 1987. – 175 с.
6. Awrejcewicz J., Kurpa L., Mazur O. Research of stability and nonlinear vibration by  $R$ -functions method // In: *Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems* / Ed. J. Awrejcewicz. – Springer, 2009. – P. 179–189.
7. Dash S., Asha A. V., Sahu S. K. Stability of laminated composite curved panels with cutout using finite element method // *Proc. Int. Conf. Theor., Appl. Comput. & Exp. Mech. (ICTACEM-2004)*, Dec. 28–31, 2004 IIT, Kharagpur; <http://hdl.handle.net/2080/316>.
8. Nemeth Michael P. Buckling and postbuckling behavior of laminated composite plates with a cutout. – NASA technical paper 3587, 1996. – 23 p.
9. Ng T. Y., Lam K. Y., Reddy J. N. Dynamic stability of cross-ply laminated composite cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.* – 1998. – **40**, No. 8. – P. 805–823.
10. Sahu S. K., Datta P. K. Research advances in the dynamic stability behavior of plates and shells: 1987–2005. – Part 1: Conservative system // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, No. 2. – P. 65–75.
11. Simitses G. J. Instability of dynamically loaded structures // *Appl. Mech. Rev.* – 1987. – **40**, No. 10. – P. 1403–1408.
12. Singha M. K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates // *J. Sound Vib.* – 2009. – **328**, No. 4. – P. 541–554.

## ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Предложен численно-аналитический метод исследования параметрических колебаний многослойных пластин под действием статической и периодической нагрузки в срединной плоскости. Метод применен для уравнений движения пластин, полученных в рамках классической теории. В основу разработанного подхода положено использование теории  $R$ -функций и вариационных методов, что позволяет исследовать пластины произвольной геометрической формы с различными видами граничных условий. Согласно предложенному подходу, прежде всего, определяется докритическое состояние пластины, если оно не является однородным. Построение зон динамической неустойчивости выполнено методом, предложенным в работах В. В. Болотина. Проведено сравнение результатов, полученных с помощью разработанного подхода, с известными в литературе. Решен ряд новых задач для многослойных пластин сложной формы с отверстием.

## PARAMETRIC VIBRATIONS OF LAMINATED PLATES OF COMPLEX FORM

To study the parametric vibrations of laminated plates under static or periodic load in median plane the numerically analytical method is proposed. The method is applied to the equations of motion of plates, obtained in the framework of the classical theory. In a basis of the developed approach is the use of the theory of  $R$ -functions and variational methods, which allow to investigate the plates of any geometric shape with different types of boundary conditions. According to the proposed method, primarily is determining subcritical state of the laminated plate, if it is not homogeneous. Construction of the dynamic instability zones is performed by V. V. Bolotin's method. The comparison of the results obtained by the developed approach with the known ones is done. New problems for laminated plates of complex geometric shape with a hole are solved.

Нац. техн. ун-т  
«Харків. політехн. ін-т», Харків

Одержано  
29.01.13