

**ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ В УМОВАХ АНТИПЛОСКОЇ
ДЕФОРМАЦІЇ ПІВПРОСТОРУ З ТОНКИМ ЖОРСТКИМ СМУГОВИМ
ВКЛЮЧЕННЯМ, ЩО ПЕРЕТИНАЄ МЕЖУ**

Визначено напружений стан, що виникає у пружному півпросторі з тонким жорстким смуговим крайовим включенням, нахиленим до межі під довільним кутом, при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву. Для отриманого сингулярного інтегрального рівняння з нерухомою особливістю запропоновано числовий метод розв'язування, у якому враховано особливість розв'язку і який базується на використанні спеціальних квадратурних формул для обчислення сингулярних інтегралів.

Поверхня реальних твердих тіл не завжди буває ідеальною, оскільки тіла досить часто містять мікродефекти у вигляді тріщин або тонких включень, що її перетинають. Під дією навантаження, особливо динамічного, ці дефекти є джерелами концентрації напружень, яка може призвести до локального або повного руйнування тіла. Внаслідок цього визначення напруженого стану в тілах з дефектами, що перетинають поверхню, є актуальною науковою проблемою, якій присвячена значна кількість наукових робіт. Але їх аналіз свідчить, що головна увага приділяється дефектам у вигляді тріщин. Робіт, де визначається напружений стан поблизу тонких жорстких крайових включень, є значно менше. Серед них насамперед слід відмітити роботи [12, 13, 15], де розглянуто півпростір в умовах плоскої деформації або плоского напруженого стану зі смуговим тонким включенням, перпендикулярним до межі, під дією статичного навантаження. Авторам цих робіт вдалось методом Вінера – Гопфа отримати точні розв'язки відповідних інтегральних рівнянь. У випадку динамічного навантаження інтегральні рівняння, до яких зводяться вихідні задачі, вже є повними сингулярними інтегральними рівняннями і вимагають числового розв'язування. Однак таке розв'язання ускладнюється тим, що сингулярна складова рівнянь, окрім ядра Коші, містить ще ядро з нерухомою особливістю. Як можна бачити з отриманих точних розв'язків [12, 13, 15] і загальної теорії таких рівнянь [3], це призводить до того, що особливість розв'язку в околі кінця включення, що виходить на поверхню, є відмінною від кореневої і підлягає визначенню. Ця обставина ускладнює застосування таких наближених методів, як метод механічних квадратур і метод ортогональних многочленів. Тому роботи щодо визначення динамічного напруженого стану поблизу крайових включень майже відсутні. Так, у [14] методом граничних елементів розв'язано задачу про взаємодію хвилі Релея з подібним до включення крайовим дефектом, нормальним до поверхні. Однак при цьому не враховано реальної особливості розв'язку інтегрального рівняння. У [5, 6] досліджено концентрацію напружень в околі крайового смугового включення, перпендикулярного до вільної межі півпростору, при гармонічних коливаннях в умовах плоскої деформації. До отриманих інтегральних рівнянь застосовано наближений метод, у якому враховано особливість розв'язку і за точки колокації використано корені функції Якобі. Але недоліком цього методу є те, що до обчислення інтегралів з нерухомою особливістю формально застосовано квадратурні формули Гаусса – Якобі. Отже, на сьогодні задачі про визначення динамічного напруженого стану поблизу крайових включень і створення нових методів розв'язування сингулярних інтегральних рівнянь із нерухомими особливостями залишаються достатньо актуальними.

У поданій роботі визначається напружений стан, що виникає у пружному півпросторі з жорстким смуговим, нахиленим до межі, крайовим включенням при гармонічних коливаннях повздовжнього зсуву. Для розв'язання отриманого сингулярного інтегрального рівняння з нерухомою особливістю

запропоновано числовий метод розв'язування, у якому враховано особливості розв'язку і який базується на використанні спеціальних квадратурних формул для обчислення сингулярних інтегралів.

Постановка задачі. Нехай ізотропний пружний півпростір $y \geq 0$ знаходиться в умовах антиплоскої деформації і містить похиле смугове жорстке включення товщини h , що виходить на його поверхню під кутом α і займає у площині Oxy відрізок довжини $2a$ (рис. 1). У півпросторі відбуваються гармонічні коливання внаслідок дії на включення зсувної уздовж осі Oz сили $Pe^{-i\omega t}$. Надалі множник

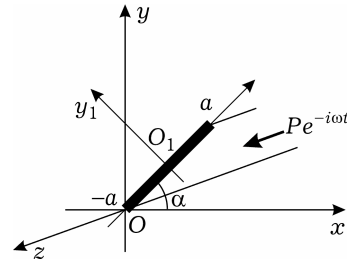


Рис. 1

$e^{-i\omega t}$, що визначає залежність від часу, опускаємо. За таких умов єдину відмінну від нуля z -компоненту вектора переміщень визначається з рівняння Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \alpha_2^2 W = 0, \quad \alpha_2^2 = \frac{\rho \omega^2}{G}, \quad (1)$$

де ρ – густина, G – модуль зсуву пружного середовища.

Оскільки поверхню півпростору вважаємо вільною від напружень, то на ній для дотичного напруження $\tau_{zy} = G \frac{\partial W}{\partial y}$ виконується рівність

$$\tau_{zy}(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \quad (2)$$

Граничні умови на включенні з огляду на його малу товщину h формулюємо на його серединній поверхні. Для цього вводимо локальну систему координат $O_1x_1y_1$ так, що вісь O_1x_1 спрямована вздовж відрізка, що займає включення, а центр O_1 співпадає з серединою цього відрізка (див. рис. 1).

Тоді точка O_1 має координати $x_{01} = a \cos \alpha$, $y_{01} = a \sin \alpha$, а зв'язок між координатами в обох системах здійснюється за формулами

$$\begin{aligned} x &= (a + x_1) \cos \alpha - y_1 \sin \alpha, & x_1 &= x \cos \alpha + y \sin \alpha - a, \\ y &= (a + x_1) \sin \alpha + y_1 \cos \alpha, & y_1 &= -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3)$$

Нехай $W_1(x_1, y_1)$ – переміщення $W(x, y)$, де x і y подані формулами (3). Тоді при повному зчепленні включення з півпростором повинна виконуватись рівність

$$W_1(x_1, 0) = d, \quad -a \leq x_1 \leq a, \quad (4)$$

де стала d – це невідома амплітуда зсувних коливань включення під дією прикладеної сили P .

Окрім того, на поверхні включення повинно бути розривним дотичне напруження $\tau_{zy_1} = G \frac{\partial W_1}{\partial y_1}$, для стрибка якого введемо позначення

$$\chi(x_1) = \tau_{zy_1}(x_1, +0) - \tau_{zy_1}(x_1, -0), \quad -a < x_1 < a. \quad (5)$$

Сталу d у правій частині рівності (4) визначаємо з рівняння руху включення, яке при гармонічних коливаннях має вигляд

$$-ahw^2\rho_0 d = P + \int_{-a}^a \chi(\eta) d\eta, \quad (6)$$

де ρ_0 – густина включення.

За таких умов необхідно визначити напружений стан у півпросторі та амплітуду коливань включення.

Зведення вихідної граничної задачі до сингулярного інтегрального рівняння. Розв'язання сформульованої граничної задачі почнемо з побудови у системі координат $O_1x_1y_1$ розривного розв'язку рівняння Гельмгольца (1) зі стрибком (5). Такий розривний розв'язок визначається формулою [8]:

$$W_1^1(x_1, y_1) = \int_{-a}^a \chi(\eta) r_2(\eta - x_1, y_1) d\eta, \quad (7)$$

де

$$r_2(\eta - x_1, y_1) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\gamma_2(\beta)|y_1|}}{2\gamma_2(\beta)} e^{i\beta(\eta - x_1, y_1)} d\beta = -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{(\eta - x_1)^2 + y_1^2}),$$

$$\gamma_2(\beta) = \sqrt{\beta^2 - x_2^2}.$$

Після цього в системі Oxy розв'язок розшукуємо у вигляді

$$W(x, y) = W_0^0(x, y) + W_0^1(x, y), \quad (8)$$

де

$$W_0^1(x, y) = W_1^1(x \cos \alpha + y \sin \alpha - a, -x \sin \alpha + y \cos \alpha).$$

$W_0^0(x, y)$ – розв'язок рівняння Гельмгольца (1) такий, що для (8) виконується умова (2). Це означає, що повинна виконуватись рівність

$$\tau_{yz}^{00}(x, 0) = -\tau_{yz}^{01}(x, 0), \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau_{yz}^{0k} = G \frac{\partial W_0^k}{\partial y}, \quad k = 0, 1.$$

Такий розв'язок $W_0^0(x, y)$ рівняння (1) побудовано методом інтегральних перетворень (за змінною x здійснювали інтегральне перетворення Фур'є):

$$W_0^0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(\eta)}{G} R_0(\eta, x, y) d\eta, \quad (9)$$

де

$$R_0(\eta, x, y) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{((\eta + a) \sin \alpha + y)^2 + ((\eta + a) \cos \alpha - x)^2}).$$

Таким чином, переміщення у півпросторі можна знайти за формулами (7)–(9) через стрибок напружень (5) на включенні. Для його визначення з крайової умови (4) можемо отримати сингулярне інтегральне рівняння. Щоб сингулярна складова цього ядра містила особливість у вигляді ядра Коші, замість (4) слід використати [8] умови

$$\frac{\partial W_1}{\partial x_1}(x_1, 0) = 0, \quad -a \leq x_1 \leq a_1, \quad W_1^0(-a, 0) = d. \quad (10)$$

Перша рівність у (10) є результатом диференціювання (4) за x_1 , а друга – умова еквівалентності продиференційованої рівності до вихідної.

Щоб задовольнити умови (10), переміщення у системі координат $O_1x_1y_1$, пов'язане з включенням, подаємо у вигляді

$$W_1(x_1, y_1) = W_1^1(x_1, y_1) + W_1^0(x_1, y_1), \quad (11)$$

де перший доданок – розривний розв'язок (7), а другий отримуємо з (9) при перетворенні координат за формулами (3):

$$W_1^0(x_1, y_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{\chi(\eta)}{G} R_1(\eta, x_1, y_1) d\eta, \quad (12)$$

де

$$R_1(\eta, x_1, y_1) = -\frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(x_2 \sqrt{Q}),$$

$$Q = (\eta + a)^2 + (a + x_1)^2 + y_1^2 - 2(\eta + a)[(a + x_1) \cos 2\alpha - y_1 \sin 2\alpha].$$

Результатом підстановки (7), (12) у (10) є таке сингулярне інтегральне рівняння з додатковою умовою:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi(\tau) \left[-\frac{1}{\tau - \zeta} - \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta + 1)}{q^2(\tau, \zeta)} + R(\tau - \zeta) + F(\tau, \zeta) \right] d\tau = 0, \quad -1 < \zeta < 1,$$

$$\int_{-1}^1 \varphi(\tau) [-\ln(1 + \tau) + R_0(\tau + 1)] d\tau = d_0. \quad (13)$$

У рівняннях (13) введено такі позначення:

$$\eta = a\tau, \quad x_1 = a\zeta, \quad \varphi(\tau) = \frac{\chi(a\tau)}{G}, \quad d_0 = \frac{d}{a},$$

$$q^2(\tau, \zeta) = (\tau + 1)^2 + (\zeta + 1)^2 - 2(\tau + 1)(\zeta + 1) \cos 2\alpha. \quad (14)$$

Функції $R(\tau - \zeta)$, $F(\tau, \zeta)$, $R_0(\tau + 1)$ визначаємо при вилученні сингулярних складових ядер інтегральних операторів за допомогою розвинень функцій Ганкеля у ряди [2]. Вони мають такі асимптотики:

$$R(Y) = O(Y \ln |Y|), \quad Y \rightarrow 0, \quad R_0(Y) = O(1), \quad Y \rightarrow 0,$$

$$F(\tau, \zeta) = ((\eta + 1) \cos 2\alpha - (\zeta + 1)) q \ln q (1 + O(q^2)), \quad q \rightarrow 0.$$

До рівнянь (13) необхідно ще додати рівняння для визначення невідомої амплітуди коливань включення (6), яке після введення позначень (14) набуває вигляду

$$d_0 = -\frac{1}{2\varepsilon \bar{\rho} x_0^2} \left(\rho_0 + \int_{-1}^1 \varphi(\tau) d\tau \right), \quad (15)$$

де

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0}{\rho}, \quad \varepsilon = \frac{h}{a}, \quad x_0 = x_2 a, \quad \rho_0 = \frac{P}{aG}.$$

Числове розв'язання сингулярного рівняння. Наявність у сингулярній складовій інтегрального рівняння (13) нерухомої особливості при $\tau = \zeta = -1$ впливає на асимптотику його розв'язку в околі точки $\tau = -1$. Особливість розв'язку в околі цієї точки може бути визначена шляхом дослідження асимптотичних властивостей сингулярних інтегралів [7] або шляхом дослідження символу сингулярного ядра [3]. В результаті встановлено, що невідому функцію потрібно розшукувати у вигляді

$$\varphi(\tau) = (1 - \tau)^{-1/2} (1 + \tau)^{-\delta} \psi(\tau), \quad (16)$$

де степеневий показник δ визначається рівністю

$$\delta = \begin{cases} \frac{2\alpha - \pi}{2(\pi - \alpha)}, & 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi - 2\alpha}{2\alpha}, & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases}$$

Функція $\psi(\tau)$ є такою, що задовольняє умови Гельдера при $\tau \in (-1, 1)$.

Тепер, якщо розглянути функцію

$$\psi_0(\tau) = \psi(\tau) - \frac{\psi(1)}{2}(1 + \tau) - \frac{\psi(-1)}{2}(1 - \tau), \quad (17)$$

то можна бачити, що $\psi_0(\pm 1) = 0$. Тому можна вважати, що

$$\psi_0(\tau) = (1 - \tau^2)g(\tau), \quad (18)$$

де $g(\tau)$ – нова невідома функція, яка повинна задовольняти умови Гельдера при $\tau \in (-1, 1)$. Підставивши (17), (18) у (16), отримуємо таке подання

розв'язку інтегрального рівняння (13):

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = & (1 - \tau)^{1/2}(1 + \tau)^{1-\delta} g(\tau) + (1 - \tau)^{1/2}(1 + \tau)^{-\delta} \frac{\Psi(-1)}{2} + \\ & + (1 - \tau)^{-1/2}(1 + \tau)^{1-\delta} \frac{\Psi(1)}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Далі наближений метод розв'язування ґрунтується на апроксимації функції $g(\tau)$ інтерполяційним многочленом $(n - 1)$ -го степеня:

$$\begin{aligned} g(\tau) = g_{n-1}(\tau), \quad g_{n-1}(\tau) = & \sum_{m=1}^n g_m \frac{P_n^{1/2,1-\delta}(\tau)}{(\tau - \tau_m)(P_n^{1/2,1-\delta}(\tau_m))'}, \\ g_m = g(\tau_m), \quad P_n^{1/2,1-\delta}(\tau_m) = & 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Тоді для сингулярного інтеграла з ядром Коші справджується така квадратурна формула [1]:

$$\int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau)^{1/2}(1 + \tau)^{1+\delta} g(\tau)}{\tau - \zeta_k} d\tau = \sum_{m=1}^n g_m \frac{A_{1m}}{\tau - \zeta_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1, \quad (21)$$

де ζ_k , $k = 1, 2, \dots, n + 1$, – корені функції Якобі другого роду $J_n^{1/2,1-\delta}(\zeta)$, а $A_{1m} = A_m^{1/2,1-\delta}$ – коефіцієнти відповідної квадратурної формули Гаусса – Якобі. Формула (21) дає можливість застосовувати для розв'язання (13) метод колокації з використанням $n + 1$ коренів функції Якобі другого роду як вузлів колокації. Але для цього слід вивести квадратурні формули для інших сингулярних інтегралів.

Використання подання (19) робить необхідним обчислення таких інтегралів з ядром Коші:

$$b_k^- = \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau)^{1/2}(1 + \tau)^{-\delta}}{\tau - \zeta_k} d\tau, \quad b_k^+ = \int_{-1}^1 \frac{(1 - \tau)^{-1/2}(1 + \tau)^{1-\delta}}{\tau - \zeta_k} d\tau.$$

Їх значення знаходимо методом, викладеним у [9], що ґрунтується на їх перетворенні до згортки Мелліна. Далі застосування теореми про згортку дає можливість подати ці інтеграли у вигляді суми лишків у полюсах підінтегральних функцій. Наслідком цих дій є наступні формули:

$$\begin{aligned} b_k^- = & \begin{cases} B^+ \left(\frac{1 - \zeta_k}{2} \right), & 0 \leq \zeta_k < 1, \\ C^+ \left(\frac{1 + \zeta_k}{2} \right), & -1 < \zeta_k < 0, \end{cases} \\ b_k^+ = & \begin{cases} B^- \left(\frac{1 - \zeta_k}{2} \right), & 0 \leq \zeta_k < 1, \\ C^- \left(\frac{1 + \zeta_k}{2} \right), & -1 < \zeta_k < 0, \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned} B^+(y) = & 2^{1/2-\delta} \Gamma(1 - \delta) \cos \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2 + \delta + j)}{\Gamma(1/2 + j)} y^j, \\ B^-(y) = & -2^{1/2-\delta} \Gamma(3/2) \operatorname{ctg} \pi \delta \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2 + j)}{j!} y^{-\delta+j} - \right. \\ & \left. - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2 + \delta + j)}{\Gamma(1 + \delta + j)} y^j \right], \end{aligned}$$

$$C^+(y) = -2^{1/2-\delta} \Gamma(2-\delta) \cos \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+\delta+j)}{\Gamma(3/2+j)},$$

$$C^-(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma(1/2) \operatorname{ctg} \pi \delta \left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+j)}{j!} y^{1-\delta+j} - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-1/2+\delta+j)}{\Gamma(\delta+j)} y^j \right].$$

З (21), (22) випливає остаточною формула для інтеграла з ядром Коші:

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\tau - \zeta_k} = \sum_{m=1}^n g_m \frac{A_{1m}}{\tau_m - \zeta_k} + \frac{\Psi(-1)}{2} G_k^- + \frac{\Psi(1)}{2} G_k^+. \quad (23)$$

Наступним є обчислення інтеграла з нерухою особливістю

$$E_k = \int_{-1}^1 \frac{(\tau+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)}{q^2(\tau, \zeta_k)} (1-\tau)^{1/2} (1+\tau)^{1-\delta} g(\tau) d\tau. \quad (24)$$

Нехай σ , $0 < \sigma < 1$, – деяке додатне число. У випадку $1 + \zeta_k > \sigma$ інтеграл (24) не є сингулярним і його можна обчислити за допомогою квадратурних формул Гаусса – Якобі з відповідною ваговою функцією [4]. Якщо ж $1 + \zeta_k \rightarrow 0$, то $g(\tau)$ слід замінити інтерполяційним многочленом (20) і скористатися рівністю

$$\begin{aligned} \frac{(\tau+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)}{(\tau - \tau_m) q^2(\tau, \zeta)} &= \frac{(\tau_m+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} \cdot \frac{1}{(\tau - \tau_m)} - \\ &- \frac{(\tau_m+1)}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} \cdot \frac{(\tau_m+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} + \\ &+ \frac{(\zeta_k+1)}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} \cdot \frac{(\tau+1) - (\zeta_k+1) \cos 2\alpha}{q^2(\tau_m, \zeta_k)}. \end{aligned}$$

Внаслідок цього інтеграл (24) набуває вигляду

$$E_k = \sum_{m=1}^n \frac{g_m}{(P_n^{1/2, 1-\delta}(\tau_m))' q^2(\tau_m, \zeta_k)} [((\tau_m+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)) h_m + (\tau_m+1) H_{km}^{(2)} + (\zeta_k+1) H_{km}^{(1)}], \quad (25)$$

де позначено

$$h_m = \int_{-1}^1 \frac{(1-\tau)^{1/2} (1+\tau)^{1-\delta}}{\tau - \tau_m} P_n^{1/2, 1-\delta}(\tau) d\tau,$$

$$H_{km}^{(1)} = \int_{-1}^1 \frac{(\tau+1) - (\zeta_k+1) \cos 2\alpha}{q^2(\tau, \zeta_k)} (1-\tau)^{1/2} (1+\tau)^{1-\delta} P_n^{1/2, 1-\delta} d\tau,$$

$$H_{km}^{(2)} = \int_{-1}^1 \frac{(\tau+1) \cos 2\alpha - (\zeta_k+1)}{q^2(\tau, \zeta_k)} (1-\tau)^{1/2} (1+\tau)^{1-\delta} P_n^{1/2, 1-\delta} d\tau.$$

Перший інтеграл з (25) подається через функцію Якобі другого роду:

$$h_m = J_n^{1/2, 1-\delta}(\tau_m).$$

Для цієї функції доведено рівність

$$J_n^{\alpha,\beta}(\tau_m) = [P_n^{\alpha,\beta}(\tau_m)]' A_m^{\alpha,\beta}, \quad P_n^{\alpha,\beta}(\tau_m) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

де $A_m^{\alpha,\beta}$ – коефіцієнти квадратурної формули Гаусса – Якобі з відповідною вагою функцією [10]. Тому остаточно для цього інтеграла маємо

$$h_m = A_{1m} (P_n^{1/2,1-\delta}(\tau_m))'. \quad (26)$$

Інші інтеграли, що входять у (25), за допомогою методу, що ґрунтується на застосуванні інтегрального перетворення Мелліна [9], подаємо збіжними при $0 \leq 1 + \zeta_k < \sigma < 1$ степеневими рядами:

$$H_k^{(\ell)} = B_n^{(\ell)}(y), \quad \ell = 1, 2, \quad y = \frac{1 + \zeta_k}{2}, \quad (27)$$

де

$$\begin{aligned} B_n^{(1)}(y) &= \frac{2^{3/2-\delta} \Gamma(3/2 + n)}{n!} \left[\operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} y^j \cos \theta j + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \pi \delta} \sum_{j=0}^{\infty} b_{jn} y^j \cos \theta(\delta - 1 - j) \right], \\ B_n^{(2)}(y) &= \frac{2^{3/2-\delta} \Gamma(3/2 + n)}{n!} \left[\operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} a_{jn} y^j \cos \theta(j + 1) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sin \pi \delta} \sum_{j=0}^{\infty} b_{jn} y^{1-\delta+j} \cos \theta(\delta - 2 - j) \right], \quad \theta = \pi - 2\alpha, \\ a_{jn} &= \frac{(-1)^j (n + j)! \Gamma(-3/2 - \eta + \delta + j)}{j! \Gamma(\delta + j)}, \\ b_{jn} &= \frac{(-1)^j \Gamma(2 - \delta + j + n) \Gamma(-1/2 - \eta + j)}{j! \Gamma(2 - \delta + j)}. \end{aligned}$$

В результаті врахування (26), (27) і об'єднання обох випадків отримуємо таку формулу для обчислення інтегралів (24):

$$E_k = \sum_{m=1}^n g_m \frac{D_{km}}{q^2(\tau_m, \zeta_k)}, \quad (28)$$

де

$$\begin{aligned} D_{km} &= A_{1m} ((\tau_m + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)), \quad 1 + \zeta_k > \sigma > 0, \\ D_{km} &= A_{1m} ((\tau_m + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)) + \frac{(\tau_m + 1) H_k^{(2)} + (\zeta_m + 1) H_k^{(1)}}{(P_n^{1/2,1-\delta}(\tau_m))'}, \\ &0 \leq \zeta_k + 1 < \sigma. \end{aligned}$$

Інтеграли

$$\begin{aligned} d_k^+ &= \int_{-1}^1 \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)}{q^2(\tau, \zeta_k)} (1 - \tau)^{-1/2} (1 + \tau)^{1-\delta} d\tau, \\ d_k^- &= \int_{-1}^1 \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)}{q^2(\tau, \zeta_k)} (1 - \delta)^{1/2} (1 + \tau)^{-\delta} d\tau \end{aligned}$$

обчислюємо за формулами, аналогічними до (28):

$$d_k^\pm = \begin{cases} \sum_{m=1}^n A_m^\pm \frac{(\tau_m^\pm + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)}{q^2(\tau_m^\pm, \zeta_k)}, & 1 + \zeta_k > \sigma > 0, \\ b^\pm \left(\frac{1 + \zeta_k}{2} \right), & 0 < 1 + \zeta_k < \sigma, \end{cases}$$

$$P_n^{-1/2, 1-\delta}(\tau_m^+) = 0, \quad P_n^{1/2, -\delta}(\tau_m^-) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n. \quad (29)$$

У формулі (29) $A_m^+ = A_m^{-1/2, 1-\delta}$, $A_m^- = A_m^{-1/2, -\delta}$, A_m^\pm – коефіцієнти формул Гаусса – Якобі з відповідними ваговими функціями. Функції $b^\pm(y)$ подаємо рядами:

$$b^+(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left[\operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(-1/2 + \delta + j)}{\Gamma(\delta + j)} y^j \cos \theta(j+1) + \frac{1}{\sin \pi \delta} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(-1/2 + j)}{j!} y^{1-\delta+j} \cos \theta(2 - \delta + j) \right],$$

$$b^-(y) = 2^{1/2-\delta} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \left[-\operatorname{ctg} \pi \delta \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(-1/2 + \delta + j)}{\Gamma(1 + j + \delta)} y^j \cos \theta(j+1) + \frac{1}{\sin \pi \delta} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{\Gamma(-1/2 + j)}{j!} y^{-\delta+j} \cos \theta(j-1-\delta) \right].$$

Згідно з (28), (29) формула для обчислення інтеграла з нерухомою особливістю має вигляд

$$\int_{-1}^1 \frac{(\tau + 1) \cos 2\alpha - (\zeta_k + 1)}{q^2(\tau, \zeta_k)} \varphi(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n g_m \frac{D_{km}}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} + \frac{\Psi(1)}{2} d_k^+ + \frac{\Psi(-1)}{2} d_k^-. \quad (30)$$

Для обчислення інтегралів з логарифмічною особливістю функцію $g(\tau)$ наближаємо інтерполяційним многочленом (20), який попередньо перетворюємо за тотожністю Дарбу – Крістофеля [10]:

$$g(\tau) \approx g_{n-1}(\tau) = \sum_{m=1}^n A_m g_m \sum_{j=0}^{n-1} \frac{P_j^{1/2, 1-\delta}(\tau) P_j^{1/2, 1-\delta}(\tau_m)}{\sigma_j^2},$$

$$\sigma_j^2 = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2 + j) \Gamma(2 - \delta + j)}{(5/2 - \delta + 2j) j! \Gamma(5/2 - \delta + j)}.$$

Після цього отримуємо формулу

$$\int_{-1}^1 \ln(1 + \tau)(1 - \tau)^{1/2} (1 + \tau)^{1-\delta} g(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n A_m q_m g_m,$$

$$q_m = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{u_j}{\sigma_j^2} P_j^{1/2, 1-\delta}(\tau_m), \quad (31)$$

де

$$u_j = \int_{-1}^1 (1 - \tau)^{1/2} (1 + \tau)^{1-\delta} P_j^{1/2, 1-\delta}(\tau) d\tau, \quad j = 0, 1, \dots, n.$$

Ці інтеграли також обчислюємо з використанням ортогональних многочленів [9] і остаточно для них маємо

$$u_0 = \frac{2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2)}{\Gamma(7/2-\delta)} (\ln 2 + \psi(2-\delta) - \psi(7/2-\delta)),$$

$$u_j = \frac{(-1)^{j+1} 2^{5/2-\delta} \Gamma(3/2+j) \Gamma(2-\delta)}{j \Gamma(7/2-\delta+j)}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Тут $\psi(x)$ – логарифмічна похідна Γ -функції.

Аналогічно знаходимо наступні інтеграли:

$$q^+ = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{-1/2} (1+\tau)^{1-\delta} \ln(1+\tau) d\tau = \Gamma(1/2)U,$$

$$q^- = \int_{-1}^1 (1-\tau)^{1/2} (1+\tau)^{1-\delta} \ln(1+\tau) d\tau = \Gamma(1-\delta)U, \quad (32)$$

де

$$U = \frac{2^{3/2-\delta} \Gamma(2-\delta)}{\Gamma(5/2-\delta)} (\ln 2 + \psi(2-\delta) - \psi(5/2-\delta)).$$

Згідно з (31), (32) остаточною формулою для інтеграла з логарифмічною функцією має вигляд

$$\int_{-1}^1 \ln(1+\tau) \varphi(\tau) d\tau = \sum_{m=1}^n A_m q_m g_m + \frac{\psi(1)}{2} q^+ + \frac{\psi(-1)}{2} q^-. \quad (33)$$

Знайдені формули для сингулярних інтегралів (23), (30), (33), а також квадратурні формули Гаусса – Якобі, що застосовуються до інтегралів з регулярними ядрами, дають можливість замінити (13), (15) наступною системою лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n g_m \left[-\frac{A_m}{\tau_m - \zeta_k} - \frac{D_{km}}{q^2(\tau_m, \zeta_k)} + A_m(\tau_m, \zeta_k) \right] + \frac{\psi(1)}{4\pi} (-b_k^+ - d_k^+ +$$

$$+ D_k^+) + \frac{\psi(-1)}{4\pi} (-b_k^- - d_k^- + D_k^-) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n+1,$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n g_m A_m (-q_m + R_0(\tau_m + 1)) + \frac{\psi(1)}{4\pi} (b^+ - q^+) + \frac{\psi(-1)}{4\pi} (b^- - q^-) = d_0,$$

$$d_0 = -\frac{1}{2\varepsilon \bar{\rho} \alpha_0^2} \left(P_0 + \frac{\psi(1)}{2} q_0^+ + \frac{\psi(-1)}{2} q_0^- + \sum_{m=1}^n g_m A_m \right). \quad (34)$$

В результаті розв'язання системи (34) будуть знайдені $g_m = g(\tau_m)$, $m = 1, 2, \dots, n$, $\psi(1)$, $\psi(-1)$, d_0 . Після цього наближений розв'язок системи визначається формулами (19), (20).

Однією з важливих характеристик напруженого стану поблизу включення є коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). Він визначається з відомого асимптотичного подання [11] напружень в околі кінця включення і може бути знайдений за формулою

$$K = \lim_{\eta \rightarrow a-0} \sqrt{a-\eta} \chi(\eta). \quad (35)$$

З урахуванням (14), (19) після обчислення границі отримуємо просту формулу для безпосереднього визначення КІН:

$$K = G \sqrt{a} 2^{-\delta} \psi(1). \quad (36)$$

Результати числового аналізу та висновки. При реалізації запропонованого методу розв'язування, у першу чергу, здійснено числове дослідження його практичної збіжності. Обчислення проводили за такими даними: $\bar{\rho} = 1$, $\varepsilon = 0.05$, $p_0 = 1$, $\alpha = 45^\circ$. В результаті розрахунків за формулою (36) побудовано графіки залежності абсолютної величини безрозмірного КІН $k = K/G\sqrt{a}$ від безрозмірного хвильового числа x_0 , що показано на рис. 2. Криві відповідають значенням кількості вузлів інтерполяції $n = 5, 10, 15, 20, 25$ у наближенні (20).

Можна бачити, що в області низьких частот ($x_0 \leq 2.5$) для досягнення досить високої точності (відносна похибка не перевищує 1%) достатньо використовувати $n = 5$ вузлів інтерполяції. В усьому розглянутому частотному діапазоні ($0 \leq x_0 \leq 9$) для отримання значень КІН з похибкою, меншою ніж 0.1%, вистачає $n = 15$ вузлів інтерполяції у формулі (20).

Графіки на рис. 3 ілюструють вплив на залежність КІН від частоти x_0 кута α нахилу включення. Криві відповідають значенням $\alpha = 5^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 75^\circ, 90^\circ$. Характерною особливістю усіх кривих є наявність частоти, при якій спостерігається максимум абсолютного значення КІН, що перевищує його статичне значення. Величина цієї частоти залежить від кута нахилу включення. При низькочастотних коливаннях, $x_0 < 1$, найбільша концентрація напружень спостерігається поблизу включення, перпендикулярного до межі півпростору. Якщо частота коливань є досить високою, $x_0 > 1$, то найбільші значення КІН мають включення, нахилені під малим кутом до границі півпростору.

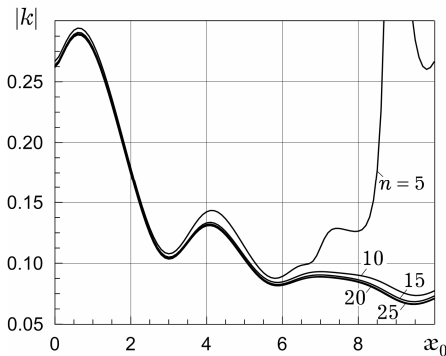


Рис. 2

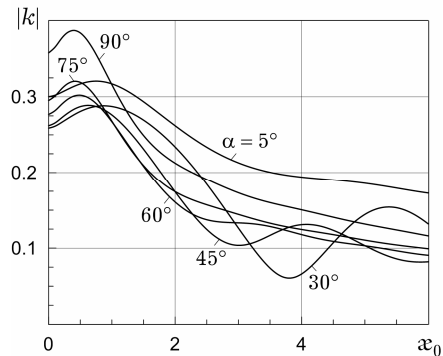


Рис. 3

Результати аналогічних досліджень абсолютної величини амплітуди коливань включення $|d_0|$ показано на рис. 4. Криві відповідають значенням кута нахилу включення $\alpha = 5^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Наведені графіки показують, що амплітуда коливань стрімко спадає при збільшенні частоти, а найбільшу амплітуду коливань мають включення, нахилені під малим кутом до поверхні півпростору.

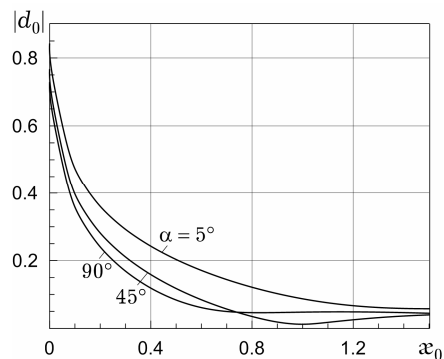


Рис. 4

Викладені вище результати дозволяють зробити такі висновки:

- врахування дійсної особливості розв'язку інтегрального рівняння і використання для інтеграла з нерухою особливістю спеціальної квадратурної формули дозволили створити наближений метод розв'язування цього рівняння, який має швидку практичну збіжність.

- встановлено існування частоти, при якій КІН досягає свого максимального значення і перевищує значення КІН при статичному навантаженні. Ця частота залежить від кута нахилу включення до межі півпростору.

- при низькочастотному навантаженні найбільша концентрація напружень спостерігається в околі включення, перпендикулярного до межі, а при коливаннях з досить високою частотою – в околі включення з кутом нахилу, близьким до 0.

1. Андреев А. В. Прямой численный метод решения сингулярных интегральных уравнений первого рода с обобщенными ядрами // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2005. – № 1. – С. 126–146.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.
То же: *Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials. – New York McGraw-Hill, 1953.*
3. Дудучава Р. В. Интегральные уравнения свертки с разрывными предсимволами, сингулярные интегральные уравнения с неподвижными особенностями и их приложения к задачам механики // Тр. Тбилисск. мат. ин-та им. А. М. Разматзе АН ГССР. – 1979. – **60**. – 135 с.
4. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
5. Попов В. Г. Вертикальные колебания жесткого краевого включения под действием гармонической нагрузки // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 7. – С. 46–55.
Те same: *Popov V. G. Vertical vibrations of a rigid edge inclusion under a harmonic load // Int. Appl. Mech. – 1995. – 31, No. 7. – P. 542-550.*
6. Попов В. Г. Взаимодействие плоской гармонической волны Рэлея с тонким жестким краевым включением, сцепленным с упругой средой // Прикл. математика и механика. – 1997. – **61**, № 2. – С. 255–262.
Те same: *Popov V. G. Interaction of a plane harmonic Rayleigh wave with a thin rigid edge inclusion coupled with an elastic medium // J. Appl. Math. Mech. – 1997. – 61, No. 2. – P. 245-252.*
7. Попов В. Г. Дифракция упругих волн сдвига на включении сложной формы, расположенном в неограниченной упругой среде // Гидроаэромеханика и теория упругости: Численные и аналитические методы решения задач гидроаэродинамики и теории упругости. – Днепропетровск: Днепропетр. гос. ун-т, 1986. – С. 121–127.
8. Попов В. Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жесткое включение // Динам. системы. – 1993. – Вып. 12. – С. 35–41.
9. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 342 с.
10. Сёге Г. Ортогональные многочлены. – Москва: Физматгиз, 1962. – 501 с.
11. Сулим Г. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. – Львів: Досл.-вид. центр НТШ, 2007. – 716 с.
12. Atkinson C. Some ribbon-like inclusion problems // Int. J. Eng. Sci. – 1973. – **11**, No. 2. – P. 243–266.
13. Kondo T., Kobayashi M., Sekine H. The flat inclusion problem in bonded dissimilar anisotropic elastic media under longitudinal shear loading // Acta Mech. – 1997. – **121**, No. 1-4. – P. 131–142.
14. Li Z. L., Achenbach I. D. Interaction of Rayleigh wave with a disband in a material interphase normal to a free surface // Ultrasonics. – 1991. – **29**, No. 1. – P. 45–52.
15. Sekine H. Thermal stresses around a ribbon-like inclusion in a semi-infinite medium under uniform heat flow // J. Elasticity. – 1978. – **8**, No. 1. – P. 81–95.

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В УСЛОВИЯХ АНТИПЛОСКОЙ
ДЕФОРМАЦИИ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ТОНКИМ ЖЕСТКИМ ПОЛОСОВЫМ
ВКЛЮЧЕНИЕМ, КОТОРОЕ ПЕРЕСЕКАЕТ ГРАНИЦУ**

Определяется напряженное состояние, которое возникает в упругом полупространстве с тонким жестким полосовым краевым включением, наклоненном к границе под произвольным углом, при гармонических колебаниях продольного сдвига. Для полученного сингулярного интегрального уравнения с неподвижной особенностью предложен численный метод решения, в котором учитывается особенность решения и который основывается на использовании специальных квадратурных формул для вычисления сингулярных интегралов.

**HARMONIC OSCILLATIONS UNDER ANTIPLANE
DEFORMATION OF HALF-SPACE WITH THIN RIGID STRIP
INCLUSION WHICH CROSSES THE SURFACE**

The stress state arising in elastic half-space space with the thin strip border inclusion slopped at arbitrary angle to the surface under harmonic oscillations of the longitudinal shear is determined. For the obtained singular integral equation with a fixed feature the numerical method of solution is proposed which takes into account the peculiarity of the solution and which is based on the use of special quadrature formulas for the calculation of singular integrals.

Одеська нац. морська акад., Одеса

Одержано
24.01.13