

## О ПОСТРОЕНИИ УТОЧНЕННЫХ УРАВНЕНИЙ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ ПЛАСТИН

*Представлены ключевые этапы развития обобщенных динамических теорий изгибных колебаний стержней, пластин и оболочек, основанных на сдвиговой модели выдающегося отечественного ученого С. П. Тимошенко, предложенной в 1921 г. [40]. Приведено математическое построение уравнений теории пластин, полученных как гиперболические аппроксимации задачи эластодинамики для слоя. Определено аналитическое выражение коэффициента толщинного сдвига. Рассматриваются некоторые современные исследования. В качестве примера исследуется распространение волн вдоль упруго защемленной полосы.*

**Введение.** Уточненные уравнения для пластин были написаны Я. С. Уфляндом в 1948 г. [14]. Фундаментальный вклад в развитие теории Тимошенко был внесен в 1951 г. Р. Миндлиным [28], обобщившим теорию балки Тимошенко на пластины. Содержательный фундаментальный обзор исследований в этой области до 1972 г. был проведен Э. И. Григолюком и И. Т. Селезовым [4]. В дальнейшем в 1960 г. было проведено построение как известных уточненных уравнений теории пластин, так и новых более высокого порядка, как гиперболических аппроксимаций задачи эластодинамики для слоя [13]. В данном сообщении показаны этапы развития метода степенных рядов, начиная от Коши 1828 г. [16] и Пуассона 1829 г. [30], и его приложения. Построено и приведено обобщенное уравнение теории пластин, включающее известные уравнения и более точные без введения физических гипотез и корректирующего коэффициента сдвига. Показано соответствие и различие уравнений, полученных в [28], и более точных, полученных в [13].

Для построения уточненных теорий применялись метод степенных рядов, асимптотические и некоторые другие методы. Асимптотические методы в динамике стержней, пластин и оболочек начали развиваться значительно позже, чем в других естественных науках. Все известные методы сводятся, по существу, к уменьшению тем или иным способом размерности трехмерной задачи теории упругости, т. е. приведению трехмерной задачи к двумерной.

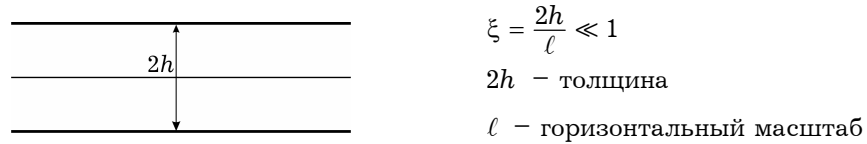
В последние годы наряду с аналитическими методами получают все большее развитие вычислительные компьютерные подходы. Составлены надежные вычислительные программы. Однако проведение вычислений часто тем более в размерных величинах снижает возможности установления закономерностей. Один из путей понижения размерности краевой задачи состоит в сведении ее к граничным интегральным уравнениям. Другой путь состоит в преобразовании ее к задаче отыскания минимума функционала, записанного по границе области [3]. Применение сплайн-функций в задаче приведения позволит рассматривать более высокие моды и можно построить очень эффективный алгоритм, который действительно будет промежуточным между теорией пластин и теорией упругости. Однако, это не метод построения моделей, а просто приложение вычислительной математики.

**1. О развитии метода Коши – Пуассона приведения трехмерной задачи к двумерной.** Метод степенных рядов ведет свое начало от работ выдающихся математиков прошлого века Коши и Пуассона [16, 30]<sup>1</sup>. Они выводили приближенные уравнения пластин, исходя из того, что пластина

<sup>1</sup> Эти работы были рассмотрены в 1958 г. в библиотеке Ленина (г. Москва)

представляет собой область в трехмерном пространстве, один размер которой (толщина) мал по сравнению с остальными, и поэтому решения разыскивались в виде степенных рядов по толщинной координате. Этот метод получил дальнейшее развитие и применение для построения уточненных моделей пластин и оболочек. Рис. 1 показывает применение метода степенных рядов для построения приближенных моделей пластин и оболочек.

### Разложения в степенные ряды



### Эластодинамика слоя

#### Коши (1828), Пуассон (1829)

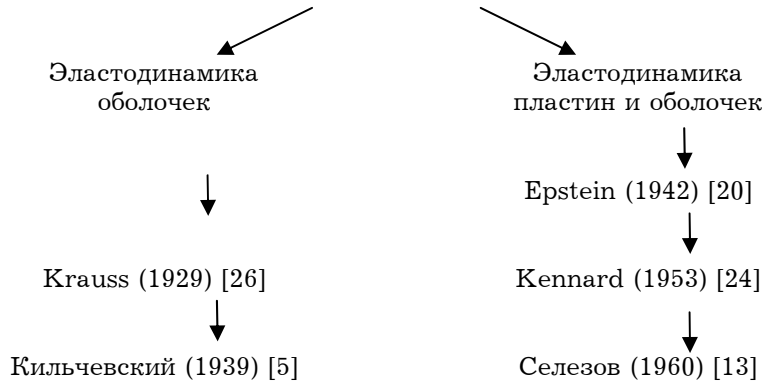


Рис. 1. Эволюция алгоритма Коши – Пуассона.

Как видно из рис. 1, метод сначала применялся к статике оболочек (колонка слева), затем к динамике пластин и оболочек (колонка справа).

**2. Уточненные известные и новые более высокого порядка уравнения как гиперболические аппроксимации задачи эластодинамики слоя.** Рассмотрим приведение трехмерной задачи эластодинамики для слоя к двумерному на основе метода степенных рядов по толщинной координате  $x_3$  к гиперболическим моделям. Редукция получаемого при этом множества математических аппроксимаций позволяет построить уточненные модели, улучшающие классические модели. Представленный здесь алгоритм приводит к вырождению исходной начально-краевой задачи по малой толщинной координате  $\xi$  и уменьшает размерность задачи:

$$(x_1, x_2, x_3, t) \rightarrow (x_1, x_2, t). \quad (1)$$

Однако это достигается вырождением спектра исходной задачи.

Рассмотрим задачу эластодинамики для бесконечного слоя толщины  $2h$ , ограниченного поверхностями  $x_3 = \pm h$  в области

$$\Omega = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1, x_2 \in (-\infty, \infty), x_3 \in \left[ -\frac{\xi}{2}, \frac{\xi}{2} \right] \right\}, \quad \xi = \frac{2h}{\ell}, \quad (2)$$

в прямоугольной декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$ , где  $\ell$  – гори-

горизонтальный масштаб слоя. Начально-краевая задача для вектора смещения  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3 = w)$  формулируется следующим образом: необходимо найти вектор-функцию  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3, t)$  как решение в области  $\Omega \times [0, T]$ ,  $T > 0$ , гиперболических уравнений

$$\nabla^2 u_k + (1 + \lambda/G) \partial_k (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \partial_{tt} u_k, \quad k = 1, 2, 3, \quad (3)$$

которые удовлетворяют граничным условиям для компонент тензора напряжения на поверхностях слоя  $x_3 = \pm \xi/2$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{33} \Big|_{x_3=\xi/2} &= q^{\pm}(x_1, x_2, t), \\ \sigma_{3i} \Big|_{x_3=-\xi/2} &= p_i^{\pm}(x_1, x_2, t), \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4)$$

и начальным условиям при  $t = 0$ :

$$u_k \Big| = 0, \quad \partial_t u_k \Big| = 0, \quad k = 1, 2, 3. \quad (5)$$

Всюду введены безразмерные величины. В качестве характерных масштабов приняты: длина  $\ell$ , модуль сдвига  $G$  и скорость распространения волн сдвига  $c_s = \sqrt{G/\rho}$ . Предполагается, что  $\lambda$  и  $G$  – постоянные величины.

В дальнейшем предполагаем, что толщина слоя мала,  $\xi \ll 1$ , и, таким образом, естественно применить разложение по безразмерной координате  $x_3$  относительно срединной поверхности  $x_3 = 0$ , таким образом, понижая размерность задачи [35, 36]. Это приводит к вырождению исходной гиперболической модели, когда возможны три случая вырождения, приводящие к уравнениям параболического, гиперболического и смешанного типа. Только вырождение гиперболической модели в гиперболическую модель корректно и имеет физический смысл при условии, что скорость распространения возмущений конечна [10].

Искомые функции представим в виде степенных рядов

$$u_k(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{m=0}^{\infty} u_{km}(x_1, x_2, t) x_3^m, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

В результате исходная задача (2)–(5) приводится к определению бесконечного числа функций  $u_{km}$ , которые удовлетворяют бесконечной системе дифференциальных уравнений и рекуррентным соотношениям. В свою очередь, эта бесконечная система распадается на две независимые подсистемы, соответствующие симметричной (плоской) и асимметричной (изгиб) деформации срединной поверхности  $x_3 = 0$ . Случай симметричных колебаний рассмотрен в [37].

Рассмотрим случай асимметричных деформаций (суммирование проводится от  $s = 0$  до  $s = \infty$ ):

$$\begin{aligned} e(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{e}_{(2s+1)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s+1}, \quad e = u_{i,i}, \quad i = 1, 2, \\ w(x_1, x_2, x_3, t) &= \sum_{s=0}^{\infty} \tilde{w}_{(2s)}(x_1, x_2, t) x_3^{2s}, \\ \sum_{s=0}^{\infty} [(2s+1)\tilde{e}_{2s+1} + \nabla^2 \tilde{w}_{2s}] 2^{-2s} \xi^{2s} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{2} (p_1^+ + p_1^-) + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{1}{2} (p_2^+ + p_2^-), \\ \sum_{s=0}^{\infty} \left[ -\tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{2s+1} L_s \tilde{w}_{2s} \right] 2^{-(2s+1)} \xi^{2s+1} &= \frac{1}{2} (q^+ - q^-), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\tilde{w}_{2s+2} &= -\frac{1+\lambda/G}{(2s+2)(2+\lambda/G)}\tilde{e}_{2s+1} - \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2+\lambda/G)}L_s\tilde{w}_{2s}, \\ \tilde{e}_{2s+3} &= \frac{1}{(2s+2)(2s+3)}\left[-L_e + \frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G}\nabla^2\right]\tilde{e}_{2s+1} + \\ &\quad + \frac{1}{(2s+1)(2s+2)(2s+3)}\frac{1+\lambda/G}{2+\lambda/G}\nabla^2 + L_s\tilde{w}_{2s},\end{aligned}$$

где

$$L_s = c_s^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \quad L_e = c_e^2\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$e$  – дивергенция планарных смещений;  $w$  – отклонение;  $p_i^\pm$  и  $q^\pm$  – сдвиговая и нормальная нагрузки вдоль поверхностей конца слоев, а  $c_s$  и  $c_e$  – скорости распространения сдвиговых и дилатационных волн.

Уравнение (7) дает точное решение задачи. Редукция этой системы позволяет получить ряд аппроксимаций различного рода. Гиперболическое вырождение начально-краевой задачи для конечной гиперболической системы уравнений произвольного порядка в  $\mathbb{R}^n$  на основе метода степенных рядов рассмотрена в [36]. Таким образом, были установлены необходимые и достаточные условия вырождения: полнота редуцированной системы и сохранение всех пространственно-временных дифференциальных операторов до определенного порядка.

Усечение уравнения (7) до седьмого порядка включительно приводит к трехмодовой (толщинные волновые моды) аппроксимации, которая может быть приведена к следующему уравнению:

$$\begin{aligned}&\left\{\left\langle\left(\xi\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \nabla^2 \nabla^2\right)_K - \xi^3 a_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2\right\rangle_R + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right\}_{TM} - \xi^5 b_1 \nabla^2 \nabla^2 \nabla^2 + \\ &\quad + \xi^5 b_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \nabla^2 - \xi^5 b_3 \frac{\partial^4}{\partial t^4} \nabla^2 + \xi^5 b_4 \frac{\partial^6}{\partial t^6}\left\}_{TMS} \right\} w = \\ &= \left\{\left[1 - \xi^2 d_1 \nabla^2 + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]_{TM} + \right. \\ &\quad \left. + \xi^4 d_3 \nabla^2 \nabla^2 - \xi^4 d_4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \xi^4 d_5 \frac{\partial^4}{\partial t^4}\right\}_{TMS} (q^+ - q^-). \quad (8)\end{aligned}$$

С. П. Тимошенко [40] обобщил параболическую модель Бернулли – Эйлера изгибных колебаний балки на гиперболическую модель на феноменологической основе, вводя поправки, ответственные за деформации толщинного сдвига и инерцию вращения. На этой основе Миндлин [28] обобщил параболическую модель Кирхгофа изгибных колебаний пластин [25] (оператор  $K$  в уравнении (8)) на гиперболическую модель (двухмодовая модель – операторы  $TM$ ). Более общая гиперболическая модель [13] была построена как математическая аппроксимация без введения феноменологических предположений (трехмодовая аппроксимация – операторы  $TMS$ ), включая также двумерную систему как частный случай.

**3. Коэффициент сдвига.** Необходимо отметить, что коэффициенты  $a_p$ ,  $b_q$  и  $d_r$  в уравнении (8) зависят только от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Это позволяет найти точную величину коэффициента сдвига

$$k^2 = \frac{2}{2 - \nu + \sqrt{1/2 + \nu^2}} \quad (9)$$

из сопоставления приведенного ниже уравнения (10) с корректирующим коэффициентом сдвига и уравнения  $\{\cdot\}_{TM}$  в (8), полученного как математическая аппроксимация. Более точное значение коэффициента сдвига получается из полного оператора  $\{\cdot\}_{TMS}$  в (8).

Уточненные уравнения колебаний пластин Миндлина основаны на таком же распределении перемещений, как и в модели Тимошенко. Разрешающее уравнение относительно прогиба  $w_0$  имеет вид

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h} \nabla^2 \nabla^2 - \frac{D}{k^2 G h} + \frac{I}{h} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \frac{\rho I}{k^2 G h} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right\} w_0 = \left\{ \frac{1}{\rho h} + \frac{I}{k^2 G h^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{D}{k^2 G \rho h^2} \nabla^2 \right\} q, \quad (10)$$

где  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жесткость;  $\rho$  – плотность;  $h$  – толщина;  $k^2$  – коэффициент сдвига;  $G$  – модуль сдвига;  $I$  – момент инерции;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $t$  – время;  $q$  – поперечная нагрузка;  $\nabla^2$  – лапласиан.

Из сопоставления уравнения (10) и более точного уравнения (8) видно их различие: уравнение (8) учитывает три волновых моды, в отличие от двух мод в (10).

В модели Тимошенко применительно к пластинам учет напряжений толщинного сдвига проведен отказом от гипотезы нормальности линейного элемента к срединной поверхности пластины. В то же время, предполагается, что элемент, первоначально линейный и нормальный к срединной поверхности, остается и после деформации линейным. Это не согласуется с параболическим законом изменения напряжений толщинного сдвига. В случае статического изгиба пластины Власов [2] ликвидировал эту несогласованность посредством изгиба первоначально прямолинейного элемента пластины. Соответствующий аналог в теории стержней был рассмотрен ранее [9]. Кроме того, попытка учитывать поперечный сдвиг более точно была предпринята в работе [34].

Уточненная теория слоистых композитных пластин с учетом реального (параболического) распределения поперечных напряжений по толщине пластины была развита Редди [32]. В дальнейшем учитывались деформации сдвига более высокого порядка для слоистых композитных пластин [33]. Необходимо отметить, что выведенная система трех уравнений в перемещениях имеет очень громоздкий вид и их применение к решению задач возможно лишь с привлечением компьютерных вычислений.

**4. О корректности постановки задач и разрешимости.** При решении краевых задач уточненные уравнения дополняются граничными условиями, соответствующими модели Тимошенко. При этом весьма существенным является вопрос о корректности граничных условий. Корректные граничные условия записаны в работе [41], где приведено также доказательство существования второго спектра (см. также [4, с. 80]). Еще раньше в некоторых более ранних и современных работах уравнения балки Тимошенко решались с граничными условиями классической теории, соответствующей одноמודовому приближению [43]. Поэтому все дальнейшие рассуждения и выводы о частотных спектрах и смысле второго спектра остаются под вопросом [1, 8, 15, 18, 29].

Отметим также принципиальное различие между уравнением Рэлея (одноמודовая аппроксимация)

$$\xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \xi^3 a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} = q^+ - q^- \quad (11)$$

и уравнением Тимошенко (двухмодовая аппроксимация)

$$\begin{aligned} \xi \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \xi^3 a_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \xi^3 a_2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \xi^3 a_3 \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \\ = \left( 1 - \xi^2 d_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \xi^2 d_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (q^+ - q^-). \end{aligned} \quad (12)$$

Классический метод разделения переменных [11]

$$w(x, t) = W(x)T(t)$$

приводит в первом случае (уравнение (11)) к полному разделению переменных, а во втором случае (уравнение (12)) переменные не разделяются.

В заключение отметим, что динамическая реакция анизотропных слоистых композитных пластин на стационарное случайное возбуждение в [17] исследована на основе работы I. Elishakoff [19].

Модели динамики стержней, пластин и оболочек, учитывающие деформации сдвига и инерции вращения, применяются в современных расчетах элементов различных конструкций [6, 7, 21–23, 27, 31, 38, 39, 42, 44].

**5. Распространение волн вдоль полосы с упруго защемленными краями.** Рассматривается задача распространения гармонических волн в бесконечной упругой пластине шириной  $b$  с упруго защемленными краями. Движение упругой пластины описывается уточненной теорией Миндлина, учитывающей инерцию вращения и деформации поперечного сдвига [12]

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{D}{\rho h} \nabla^4 - \left( \frac{D}{k_s^2 G h} + \frac{I}{h} \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 + \frac{\rho I}{k_s^2 G h} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \right] w = 0, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} D(1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_2^2} + \left[ D(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2k_s^2 G h - 2\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_1 = \\ = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ D(1 + \nu) \nabla^2 + 2k_s^2 G h - \frac{\rho D(1 + \nu)}{k_s^2 G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right\} w, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x_1 \partial x_2} + \left[ D(1 - \nu) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2k_s^2 G h - 2\rho I \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \psi_2 = \\ = 2 \left[ \frac{\partial}{\partial x_2} \left( D \nabla^2 + k_s^2 G h - \frac{D \rho}{k_s^2 G} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \right] w. \end{aligned} \quad (15)$$

Краевые условия, соответствующие упругому защемлению, принимаются в виде

$$\begin{aligned} w|_{x_2=0} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=0} = R_1 \psi_2, \\ w|_{x_2=b} = 0, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2} \Big|_{x_2=b} = -R_2 \psi_2, \end{aligned} \quad (16)$$

где  $w$  – прогиб;  $\psi$  – угол поворота;  $I = h^3/12$  – момент инерции поперечного сечения;  $h$  – толщина;  $R_1$  и  $R_2$  – жесткости упругих защемлений на поворот краев;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $G = E/[2(1 + \nu)]$  – постоянная Ламе;  $k_s^2 = 2/(2 - \nu + \sqrt{0.5 + \nu^2})$  – коэффициент сдвига [13]. В (13)–(16) и далее введены безразмерные величины по формулам (звездочки в изложении опущены)

$$(x_1^*, x_2^*, w^*, h^*) = \frac{1}{\ell}(x_1, x_2, w, h), \quad t^* = t \frac{v}{\ell}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_0},$$

$$D^* = \frac{D}{\ell^3 \rho v^3}, \quad G^* = \frac{G}{\rho v^2}, \quad I^* = \frac{I}{\ell^3}, \quad \{R_1^*, R_2^*\} = \ell \{R_1, R_2\},$$

где  $\ell$  и  $v$  – характерные длина и скорость.

Решение определяем в классе бегущих волн:

$$f(x_1, x_2, t) = \bar{f}(x_2) e^{i(kx_1 - \omega t)}. \quad (17)$$

Тогда уравнения (13)–(15) с учетом (17) примут вид

$$D \frac{d^4 \bar{w}}{dx_2^4} + \left( \frac{D}{k_s^2 Gh} + \frac{I}{h} \right) \omega^2 \frac{d^2 \bar{w}}{dx_2^2} + \left\{ \frac{Dk^4}{\rho h} + \frac{\rho I \omega^4}{k_s^2 Gh} - \left[ \omega^2 + \left( \frac{D}{k_s^2 Gh} + \frac{I}{h} \right) \omega^2 k^2 \right] \right\} \bar{w} = 0, \quad (18)$$

$$D(1-v) \frac{d^2 \bar{\psi}_1}{dx_2^2} + [-k^2 D(1-v) - 2k_s^2 Gh + 2\rho I \omega^2] \bar{\psi}_1 = ik \left[ D(1-v) \frac{d^2}{dx_2^2} + k^2 D(1+v) + 2k_s^2 Gh + \frac{\rho \omega^2 D(1+v)}{k_s^2 G} \right] \bar{w}, \quad (19)$$

$$[-k^2 D(1-v) - 2k_s^2 Gh + 2\rho \omega^2 I] \bar{\psi}_2 = 2 \left[ \frac{d}{dx_2} \left( D \frac{d^2}{dx_2^2} - k^2 D + 2k_s^2 Gh + \frac{\omega^2 \rho D}{k_s^2 G} \right) \right] \bar{w} + ik D(1-v) \frac{d \bar{\psi}_1}{dx_2}. \quad (20)$$

В общем случае решение рассматриваемой задачи имеет вид

$$\bar{w} = C_1 e^{-\alpha_1 x_2} + C_2 e^{\alpha_1 x_2} + C_3 e^{-\alpha_3 x_2} + C_4 e^{\alpha_3 x_2}, \quad (21)$$

$$\bar{\psi}_1 = \frac{\eta_1 e^{-\alpha_1 x_2}}{\alpha_1^2 - \eta^2} C_1 + \frac{\eta_1 e^{\alpha_1 x_2}}{\alpha_1^2 - \eta^2} C_2 + \frac{\eta_3 e^{-\alpha_3 x_2}}{\alpha_3^2 - \eta^2} C_3 + \frac{\eta_3 e^{\alpha_3 x_2}}{\alpha_3^2 - \eta^2} C_4, \quad (22)$$

$$\bar{\psi}_2 = \xi_1 \alpha_1 e^{-\alpha_1 x_2} C_1 - \xi_1 \alpha_1 e^{\alpha_1 x_2} C_2 + \xi_3 \alpha_3 e^{-\alpha_3 x_2} C_3 - \xi_3 \alpha_3 e^{\alpha_3 x_2} C_4, \quad (23)$$

где

$$\alpha_{1,3} = -\beta \pm \sqrt{-k^4 + \beta_2 k^2 + \beta_3},$$

$$\eta_{1,3} = ik \frac{1+v}{1-v} \left( \alpha_{1,3}^2 - k^2 + \frac{2k_s^2 Gh}{D(1+v)} + \frac{\rho \omega^2}{k_s^2 G} \right),$$

$$\xi_{1,3} = \frac{2}{\eta^2(1-v)} \left[ \alpha_{1,3}^2 - k^2 + \frac{ik \eta_{1,3}(1-v)}{2(\alpha_{1,3}^2 - \eta^2)} + \frac{k_s^2 Gh}{D} + \frac{\omega^2 \rho}{k_s^2 G} \right],$$

$$\beta_1 = \frac{\rho h}{2D} \left( \frac{D}{k_s^2} + \frac{I}{h} \right) \omega^2, \quad \beta_2 = 2\beta_1, \quad \eta = k^2 - \frac{2(\rho \omega^2 I - k_s^2 Gh)}{D(1-v)},$$

$$\beta_3 = \frac{\rho^2 h^2}{4D^2} \left[ \left( \frac{D}{k_s^2 Gh} + \frac{I}{h} \right)^2 - \frac{4DI}{k_s^2 Gh} \right] \omega^4 + \frac{\rho h \omega^2}{D}.$$

Подставляя решения (21)–(23) в краевые условия (16), получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\alpha_1^2 + R_1\alpha_1)\xi_1 & (\alpha_1^2 - R_1\alpha_1)\xi_1 & (\alpha_3^2 + R_1\alpha_3)\xi_3 & (\alpha_3^2 - R_1\alpha_3)\xi_3 \\ e^{-\alpha_1 b} & e^{\alpha_1 b} & e^{-\alpha_3 b} & e^{\alpha_3 b} \\ (\alpha_1^2 - R_2\alpha_1)\xi_1 e^{-\alpha_1 b} & (\alpha_1^2 + R_2\alpha_1)\xi_1 e^{\alpha_1 b} & (\alpha_3^2 - R_2\alpha_3)\xi_3 e^{-\alpha_3 b} & (\alpha_3^2 + R_2\alpha_3)\xi_3 e^{\alpha_3 b} \end{vmatrix} = 0. \quad (24)$$

Численные расчеты корней дисперсионного уравнения (24) выполнены для волновых чисел  $kb \in [0.01, 10]$  при следующих безразмерных параметрах: характерная длина  $b = 1$ ,  $\rho = 1$ ,  $D = 2.974 \cdot 10^{-10}$ ,  $c_r = 1.231$ ,  $I = 8.333 \cdot 10^{-11}$ ,  $R_1 = -10$ ,  $R_2 = 10$ . В качестве характерных величин принимали скорость распространения волн по теории Тимошенко  $v = c_r = \sqrt{Gk_s^2/\rho}$  и ширину пластины  $\ell = b$ . Результаты расчетов зависимости фазовой скорости  $c_p = \omega/k$  от частоты  $\omega$  для различных толщин пластины представлены на рис. 2.

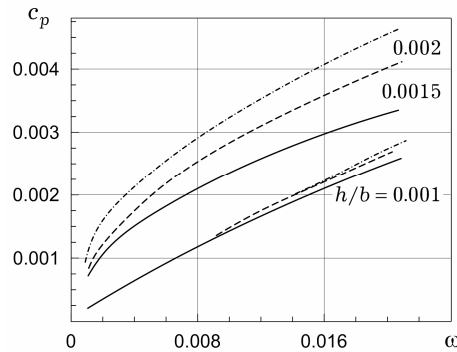


Рис. 2. Зависимость фазовой скорости  $c_p$  от круговой частоты  $\omega$  при различных толщинах.

Из проведенного анализа следует, что в заданном интервале изменения волнового числа дисперсионное уравнение (24) имеет два действительных корня, причем один корень слабо зависит от толщины  $h$ , в то время как второй существенно зависит. Приведенные графики иллюстрируют дисперсионные свойства системы, в частности, видно, что с увеличением толщины пластины дисперсия возрастает.

1. Бахвалов Н. С., Эглит М. Э. Об уравнениях высокого порядка точности, описывающих колебания тонких пластин // Прикл. математика и механика. – 2005. – 69, № 4. – С. 656–675.
2. Власов Б. Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 12. – С. 57–60.
3. Гольдштейн Р. В. Дополнение. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред // Механика: Новое в зарубежной науке. Вып. 15: Метод граничных интегральных уравнений. – Москва: Мир, 1978. – С. 183–206.
4. Григolloк Э. И., Селезов И. Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Сер. Механика твердых деформируемых тел. – Москва: ВИНТИ, 1973. – 5. – 272 с.
5. Кильчевский Н. А. Обобщение современной теории оболочек // Прикл. математика и механика. – 1939. – 2, № 4. – Р. 427–438.
6. Кудряшов А. Б. Балочный конечный элемент на основе теории С. П. Тимошенко // Труды ЦАГИ. – 2004. – № 2664. – С. 207–212. (04.11–16В.111).



7. Ледорезов П. Ф. Об учете поперечных сдвигов и инерции вращения при вибрационном изгибе вязкоупругой пластинки-полосы // *Механика деформируемых сред* (Саратовск. гос. ун-т). – 2002. – № 14. – С. 144–151.
8. Нестеренко В. В. К теории поперечных колебаний балки Тимошенко // *Прикл. математика и механика*. – 1993. – **57**, № 4. – С. 83–91.
9. Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др. Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении: расчеты при статистической нагрузке. – Москва: Машгиз, 1950. – 703 с.
10. Селезов И. Т. Концепция гиперболичности в теории управляемых динамических систем // *Кибернетика и вычисл. техника*. – 1969. – Вып. 1. – С. 131–137.
11. Селезов И. Т., Кривонос Ю. Г. Математические методы в задачах распространения и дифракции волн. – Киев: Наук. думка, 2012. – 232 с.
12. Селезов И. Т., Ткаченко В. А., Дьяченко Ю. П. Распространение гармонических волн в пластине типа Тимошенко с упруго-защемленными краями // *Конф. «Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред»* (Армения, Горис, март 1989). – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1990. – С. 240–243.
13. Селезов И. Т. Дослідження поперечних коливань пластини // *Прикл. механіка*. – 1960. – **6**, № 3. – С. 319–327.
14. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин // *Прикл. математика и механика*. – 1948. – **12**, № 3. – С. 287–300.
15. Barbashov V. M., Nesterenko V. V. Continuous symmetries in field theory // *Fortschr. Phys./Prog. Phys.* – 1983. – **31**, No. 10. – P. 535–567.
16. Cauchy A. L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une lame solide. *Exercices Math.* – 1828. – **3**. – P. 245–326.
17. Celebraum G., Elishakoff I., Librescu L. Random vibration of laminated plates modeled within the first order shear deformation theory // *J. Compos. Struct.* – 1989. – **12**. – P. 97–111.
18. Chervyakov A. M., Nesterenko V. V. Is it possible to assign physical meaning to field theory with higher derivatives? // *Phys. Rev. D.* – 1993. – **48**, No. 12. – P. 5811–5817.
19. Elishakoff I. Solution manual to accompany probabilistic methods in the theory of structures. – New York: Wiley Intersci, 1985. – 317 p.
20. Epstein P. S. On the theory of elastic vibrations in plates and shells // *J. Math. Phys.* – 1942. – **21**, No. 3. – P. 198–209.
21. Hutchinson J. R. On Timoshenko beams of rectangular cross-section // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 2004. – **71**, No. 3. – P. 359–367.
22. Hutchinson J. R. Shear coefficients for Timoshenko beam theory // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 2001. – **68**, No. 1. – P. 87–92.
23. Jing L. S., Lia S. J. Free vibration of an extensible rotating inclined Timoshenko beam // *J. Sound Vib.* – 2007. – **304**, No. 3–5. – P. 606–624.
24. Kennard E. H. The new approach to shells theory: circular cylinders // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 1953. – **20**, No. 1. – P. 33–40.
25. Kirchhoff G. R. Vorlesungen über mathematische Physik. *Mechanik*. – Leipzig: Teubner, 1876; Кирхгоф Г. Механика. Лекции по математической физике. – Москва: Изд-во АН СССР, 1962. – 404 с.
26. Krauß F. Über die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie schwach deformierter Schalen // *Math. Ann.* – 1929. – **101**, No. 1. – P. 61–92.
27. Lin T., Li Q. Transient elastic wave propagation in an infinite Timoshenko beam on viscoelastic foundation // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, No. 13–14. – P. 3211–3228.
28. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 1951. – **18**, No. 1. – P. 31–38.
29. Nesterenko V. V. Singular Lagrangians with higher derivatives // *J. Phys. A. Math. Gen.* – 1989. – **22**, No. 10. – P. 1673–1687.
30. Poisson S. D. Memoire sur l'équilibre et le mouvement des corps elastiques // *M<sup>3</sup>t. Acad. Roy. Sci.* – 1829. – **8**. – P. 357–570.
31. Rao G. V., Saheb Meera K., Janardhan G. R. Large-amplitude free vibrations of uniform Timoshenko beams. A novel formulation // *AIAA Journal*. – 2007. – **45**, No. 11. – P. 2810–2812.
32. Reddy J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates // *Trans. ASME J. Appl. Mech.* – 1984. – **51**, No. 4. – P. 745–752.
33. Reddy J. N., Arciniega R. A. Shear deformation plate and shell theories: from Stavsky to present // *Mech. Adv. Mater. Struct.* – 2004. – **11**, No. 6. – P. 535–582.

34. *Saunders H.* Extension of the Myklestad matrix method to include rotary inertia and shear deformation // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1960. – **32**, No. 3. – P. 403–410.
35. *Selezov I.* Some hyperbolic models for wave propagation // *Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. 7th Int. Conf. in Zurich, 1998, Vol. 2 (Int. Ser. of Numerical Mathematics. Vol. 130 / Ed. by M. Fey and R. Jeltsch).* – Basel/Switzerland: Birkhauser Verlag, 1999. – Vol. 2. – P. 833–842.
36. *Selezov I. T.* Degenerated hyperbolic approximations of the wave theory of elastic plates // *Ser. Operator Theory: Advances and Applications. Vol. 117. Differential Operators and Related Topics (Proc. Mark Krein Int. Conf. Odessa, Ukraine, August 18–22, 1997).* – Basel/Switzerland: Birkhauser, 2000. – P. 339–354.
37. *Selezov I. T., Krivonos Yu. G.* A study of longitudinal waves in a plate on the basis of refined theories // *Int. Appl. Mech.* – 1973. – **9**, No. 11. – P. 1196–1201.  
То же: *Селезов И. Т., Кривonos Ю. Г.* Исследование продольных волн в пластине на основе уточненных теорий // *Прикл. механика.* – 1973. – **9**, № 11. – С. 56–63.
38. *Shimpi R. P.* Refined plate theory and its variants // *AIAA Journal.* – 2002. – **40**, No. 1. – P. 137–146.
39. *Śniady Paweł.* Dynamic response of Timoshenko beam to a moving force // *Trans ASME. J. Appl. Mech.* – 2008. – **75**, No. 2. – P. 024503/4 p. Doi:10.1115/1.2775500.
40. *Timoshenko S.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bar // *Phil. Mag.* – 1921. – Ser. 6. – **41**, No. 245. – P. 744–746.
41. *Traill-Nash R. W., Collar A. R.* The effect of shear flexibility and rotatory inertia on the bending vibrations of beams // *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* – 1953. – **6**, Pt. 2. – P. 186–222.
42. *Viola E., Ricci P., Aliabadi V. H.* Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method // *J. Sound Vib.* – 2007. – **304**, No. 1. – P. 124–153.
43. *Wang T. M.* Natural frequencies of continuous Timoshenko beams // *J. Sound Vib.* – 1970. – **13**, No. 4. – P. 409–414.
44. *Zietsman L., van Rensburg N. F. J., van der Merwe A. J.* A Timoshenko beam with tip body and boundary damping // *Wave Motion.* – 2004. – **39**. – P. 199–211.

#### ПРО ПОБУДОВУ УТОЧНЕНИХ РІВНЯНЬ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ ПЛАСТИН

Подано ключові етапи розвитку узагальнених динамічних теорій згинних коливань стержнів, пластин та оболонок, що основані на зсувній моделі видатного вітчизняного вченого С. П. Тимошенка, запропонованій у 1921 р. [40]. Наведено математичну побудову рівнянь теорії пластин, одержаних як гіперболічні апроксимації задачі еластодинаміки для шару. Визначено аналітичний вираз коефіцієнта товщинного зсуву. Розглянуто деякі сучасні дослідження. Як приклад досліджено розповсюдження хвиль уздовж пружно защемленої смуги.

#### ON DEVELOPING REFINED EQUATIONS OF VIBRATIONS OF ELASTIC PLATES

The key stages in the development of generalized dynamic theory of bending vibrations of rods, plates and shells are presented, which are based on the shear model of our outstanding scientist Timoshenko proposed in 1921 [40]. Mathematical constructions of the equations of the theory of plates derived as hyperbolic approximations of the elastodynamic problem for a layer are presented. The analytic expression for the thickness-shear coefficient is obtained. Some modern investigations are considered. As an example, the propagation of elastic waves along the clamped strip is investigated.

Ин-т гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено  
21.05.13