УДК 517.95

Н. П. Процах

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З НЕВІДОМОЮ ФУНКЦІЄЮ ПРОСТОРОВОЇ ЗМІННОЇ У ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від просторової змінної множника правої частини слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння. Знайдено умови, за яких існує та є єдиним узагальнений розв'язок цієї задачі, який належить до просторів Соболєва.

Вступ. Змішані задачі та задачу Коші для ультрапараболічних рівнянь використовують для опису багатьох явищ фізики, механіки і біології [8, 11]. Якщо ж за відомими наслідками явища потрібно визначити його причину, то виникають обернені задачі [3, 7, 10, 13]. Обернені задачі визначення правих частин рівнянь із частинними похідними розглянуто у працях [1, 3, 7, 9, 10]. Для встановлення їх розв'язності використовувалися методи послідовних наближень [1], метод інтегральних рівнянь і принцип Шаудера [3, 9, 10], методи регуляризації [7].

У цій праці розглянуто обернену задачу з інтегральною умовою перевизначення знаходження невідомого множника правої частини слабко нелінійного ультрапараболічного рівняння, який залежить від просторової змінної. Встановлено умови, за яких існує єдиний узагальнений розв'язок цієї задачі. Використовуючи метод Гальоркіна, також знайдено умови однозначної розв'язності в просторах Соболєва відповідної змішаної задачі для розглянутого рівняння. Зауважимо, що змішані задачі для нелінійних ультрапараболічних рівнянь раніше розглядалися у працях [5, 12, 14].

1. Формулювання задачі. Нехай Ω і D − обмежені відповідно в $\mathbb{R}^n$ і $\mathbb{R}^\ell$ області з межами $\partial\Omega \in C^1$ і $\partial D \in C^1$; $x \in \Omega$, $y \in D$, $t \in (0,T)$, де T − фіксоване число з інтервалу $(0,\infty)$, $Q_\tau = \Omega \times D \times (0,\tau)$, $\tau \in (0,T]$, $G = \Omega \times D$.

Позначимо $\Sigma_T = \partial\Omega \times D \times (0,T)$; $S_T = \Omega \times \partial D \times (0,T)$; $G_\xi = \{(x,y,t) : (x,y) \in G,\ t = \xi\}$, $\xi \in [0,T]$.

Використовуватимемо простори $L^\infty(\cdot)$, $L^2(\cdot)$, $W^{1,2}(\cdot)$ [2, с. 37], $C^k(O)$ [2, с. 32], $W_0^{1,2}(\cdot)$ [2, с. 44].

Введемо такі простори:

$V(0,T;\, W(G)) := \{w : [0,T] \to W(G);\ \|w(\cdot,\cdot,t); W(G)\| \in V(0,T)\}$ (де V, W − банахові простори);

$$W_{1,0}^{1,2}(D) := \{w : w \in W^{1,2}(D),\ w\big|_{\Gamma_1} = 0\},$$

$$V_1(Q_T) := \{w : w,\ w_{x_i} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\},$$

$$V_2(G) := L^2(D; W_0^{1,2}(\Omega)),$$

$$V_3(Q_T) := \{w : w, w_{x_i},\ w_{y_j} \in L^2(Q_T),\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,\ell,\ w\big|_{S_T^1} = 0,\ w\big|_{\Sigma_T} = 0\},$$

$$V_4(G) = \{w : w,\ w_{y_i} \in L^2(G),\ w|_{\Omega\times\Gamma_1} = 0,\ i = 1,\ldots,\ell\},$$

$$V_5(G) = \{w : w,\ w_{x_i}, w_{x_i y_j}, w_{y_j} \in L^2(G),\ i = 1,\ldots,n,\ j = 1,\ldots,\ell\}.$$

Через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначимо скалярний добуток між просторами $V_2^*(G)$ і $V_2(G)$.

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2013. – 56, № 2. – С. 20-36.

В області Q_T розглянемо задачу для рівняння

$$u_t + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i} - \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,y,t) u_{x_i})_{x_j} + c(x,y,t)u + g(x,y,t,u) =$$
$$= f(x,y,t) f_0(y) + q(x,y,t) \qquad (1)$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G, \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$u|_{\Sigma_T} = 0, \qquad u|_{S_T^1} = 0, \qquad (3)$$

та умовою перевизначення

$$\int_0^T \int_\Omega K(x,t) u(x,y,t)\, dx\, dt = E(y), \qquad y \in D. \qquad (4)$$

Тут $u(x,y,t)$, $f_0(y)$ − невідомі функції; $S_T^1 = \{(x,y,t) \in S_T : \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) \cos(\nu, y_i) < 0\}$, ν − одинична зовнішня нормаль до S_T. Припускатимемо, що виконується умова

(**S**) існує така поверхня з додатною мірою Лебега $\Gamma_1 \subset \partial D \subset R^{\ell-1}$, що $S_T^1 = \Omega \times \Gamma_1 \times (0,T)$,

а дані задачі (1)−(4) справджують такі умови:

(**A**) $a_{ij} \in L^\infty(Q_T)$, $i,j = 1,\dots,n$, $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t)\xi_i\xi_j \ge a_0 |\xi|^2$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, a_0 − додатна стала;

(**C**) $c \in L^\infty(Q_T)$, $c(x,y,t) \ge c_0$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, c_0 − стала;

(**E**) $E \in W^{1,2}(D)$;

(**F**) $f \in C([0,T]; L^2(G))$;

(**H**) функція $g(x,y,t,\xi)$ вимірна за змінними (x,y,t) в області Q_T для всіх $\xi \in \mathbb{R}^1$ і неперервна за ξ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$, причому така, що існує додатна стала g^0, що $|g(x,y,t,\xi) - g(x,y,t,\eta)| \le g^0 |\xi - \eta|$ для майже всіх $(x,y,t) \in Q_T$ та всіх $\xi, \eta \in \mathbb{R}^1$;

(**K**) $K \in C^1([0,T]; C^1(\bar\Omega))$, $K|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0$, $K(x,0) = K(x,T) = 0$ для всіх $x \in \Omega$;

(**L**) $\lambda_i \in C(\bar D)$, $\lambda_{iy_i} \in L^\infty(D)$ для всіх $i = 1,\dots,\ell$;

(**U**) $u_0, u_{0,y_j} \in L^2(G)$, $j = 1,\dots,\ell$, $u_0\big|_{\partial\Omega \times D} = 0$, $u_0\big|_{\Omega \times \Gamma_1} = 0$.

2. Існування та єдиність розв'язку задачі (1)−(3). Припустимо, що права частина рівняння (1) є відомою, тобто $f_0(y) = f_0^*(y)$, де $f_0^* \in W^{1,2}(D)$ − відома функція. Розглянемо в області Q_T змішану задачу для рівняння (1) з початковою умовою (2) та крайовими умовами (3).

Означення 1. Функцію $u^*(x,y,t)$ назвемо *узагальненим розв'язком* задачі (1)−(3), якщо $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, справджується умова (2) і для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$ виконується рівність

$$\int_0^T \left\langle u_t^*, v\right\rangle dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_i} + c(x,y,t) u^* v + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u^*) v \right] dx\, dy\, dt = \int_{Q_T} [f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t)] v\, dx\, dy\, dt\,. \tag{5}$$

Лема 1. *Якщо функція* w *є узагальненим розв'язком задачі* (1)−(3)*, то вона справджує нерівність*

$$\frac{1}{2}\int_{G_\tau} |w|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \int_{Q_\tau} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) w_{y_i} w + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) w_{x_i} w_{x_j} + \right.$$

$$+ c(x,y,t)|w|^2 + g(x,y,t,w)w - (f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t))w +$$

$$\left. + \frac{\alpha}{2}|w|^2 \right] e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \ge \frac{1}{2}\int_G |u_0(x,y)|^2\, dx\, dy \tag{6}$$

для всіх $\tau \in (0,T]$ *та довільного фіксованого числа* $\alpha \in \mathbb{R}$*, причому при* $u_0(x,y) \equiv 0$ *в* (5) *досягається знак рівності.*

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення леми 1 із [5]. ♦

Доведемо існування та єдиність розв'язку змішаної задачі (1)−(3).

Теорема 1. *Нехай справджуються умови* (**A**), (**C**), (**H**), (**L**), (**F**), (**U**), (**S**) *і, крім того*:

1°) $a_{ijx_i}, c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $q_{y_k}, f_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $i, j = 1,\ldots,n$, $k = 1,\ldots,\ell$, $f_0^* \in W^{1,2}(D)$;

2°) *існує така стала* g^1*, що для майже всіх* $(x,y,t) \in Q_T$ *та всіх* $\xi \in \mathbb{R}^1$ *виконуються нерівності* $\left| g_{y_i}(x,y,t,\xi) \right| \le g^1$, $i = 1,\ldots,\ell$ *;*

3°) $q|_{S_T^1} = 0$, $\left. f_0^* \right|_{\Gamma_1} = 0$.

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)−(3).

Д о в е д е н н я. Нехай $\{\varphi^k\}_{k=1}^\infty$ − ортогональна база простору $W_0^{1,2}(\Omega)$, ортонормована в $L^2(\Omega)$, де φ^k − власні функції задачі $\Delta_x u = \nu u$, $u|_{\partial\Omega} = 0$, які відповідають власним значенням ν_k, і нехай $\{\psi^m\}_{m=1}^\infty$ − ортогональна база простору $W_{1,0}^{1,2}(D)$, ортонормована в $L^2(D)$, де ψ^m, $m \ge 1$, − власні функції задачі

$$\Delta_y u = \mu u, \qquad u|_{\Gamma_1} = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\Gamma_2} = 0\,, \tag{7}$$

які відповідають власним значенням μ_m. Тут $\Delta_x = \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2}$; $\Delta_y = \dfrac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2}{\partial y_\ell^2}$. Тоді за лемою 2 [5], $\{\varphi^k(x)\psi^m(y)\}_{k,m=1}^\infty$ − база простору $V_5(G)$, ортонормована в $L^2(G)$.

Розглянемо функцію

$$u^{*,N}(x,y,t) = \sum_{k,m=1}^{N} c_{k,m}^N(t)\varphi^k(x)\psi^m(y), \qquad N \in \mathbb{N}\,,$$

де $c_{k,m}^N(t)$, $k, m = 1,\ldots,N$, є розв'язком задачі

$$\int_G \Bigg[u_t^{*,N} \varphi^k(x)\psi^m(y) + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i}^{*,N} \varphi^k(x)\psi^m(y) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^{*,N} \varphi_{x_i}^k(x)\psi^m(y) +$$

$$+ c(x,y,t) u^{*,N} \varphi^k(x)\psi^m(y) + g(x,y,t,u^{*,N})\varphi^k(x)\psi^m(y) -$$

$$- (f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t))\varphi^k(x)\psi^m(y) \Bigg] dx\,dy = 0\,, \qquad (8)$$

$$c_{k,m}^N(0) = u_{0,k,m}^N\,, \qquad (9)$$

$$u_0^N(x,y) = \sum_{k,m=1}^{N} u_{0,k,m}^N \varphi^k(x)\psi^m(y), \qquad \lim_{N\to\infty} \left\| u_0^N - u_0 \right\|_{V_4(G)} = 0\,.$$

Згідно з теоремою Каратеодорі [4, с. 54], розв'язок цієї задачі існує і належить до простору $C^1([0,\tau_0])$, де $\tau_0 \le T$. З оцінок, проведених нижче, випливатиме, що цей розв'язок можна продовжити на весь проміжок $[0,T]$.

Позначимо $\lambda^1 = \max_i \operatorname{ess\,sup}_D \left| \lambda_{iy_i}(y) \right|$. Домножимо (8) на $c_{k,m}^N(t) e^{-\alpha t}$, де $\alpha = \lambda^1 - 2c_0 + 3g^0 + 3$, підсумуємо за k і m від 1 до N та проінтегруємо по t від 0 до τ. Одержимо

$$\int_{Q_\tau} \Bigg[u_t^{*,N} u^{*,N} + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i}^{*,N} u^{*,N} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^{*,N} u_{x_j}^{*,N} +$$

$$+ c(x,y,t)(u^{*,N})^2 + g(x,y,t,u^{*,N}) u^{*,N} -$$

$$- (f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t)) u^{*,N} \Bigg] e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt = 0\,. \qquad (10)$$

Оскільки

$$\int_{Q_\tau} g(x,y,t,u^{*,N}) u^{*,N} e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt \le \frac{3g^0}{2} \int_{Q_\tau} \left| u^{*,N} \right|^2 e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2g^0} \int_{Q_\tau} |g(x,y,t,0)|^2 e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt\,,$$

$$\int_{Q_\tau} (f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t)) u^{*,N} e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt \le \int_{Q_\tau} \left| u^{*,N} \right|^2 e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{Q_\tau} (|f(x,y,t)|^2 \left| f_0^*(y) \right|^2 + |g(x,y,t,0)|^2) e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt\,,$$

а оцінки інших доданків рівності (10) повторюють оцінки $I_1 - I_4$ з [5], то з (10) одержимо

$$\int_G \left| u^{*,N} \right|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \int_{Q_\tau} \Bigg[2a_0 \sum_{i=1}^{n} \left| u_{x_i}^{*,N} \right|^2 + \left| u^{*,N} \right|^2 \Bigg] e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \le$$

$$\le \int_G \left| u_0^N(x,y) \right|^2 dx\,dy +$$

$$+ \int_{Q_\tau} (|f(x,y,t)|^2 \left| f_0^*(y) \right|^2 + |q(x,y,t)|^2) e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt\,. \qquad (11)$$

Тоді з оцінки (11) випливає, що

$$\int_G \left|u^{*,N}(x,y,\tau)\right|^2 dx\,dy \le M_1, \qquad \tau \in [0,T]\,, \tag{12}$$

$$\int_{Q_T} \left(\left|u^{*,N}\right|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|u^{*,N}_{x_i}\right|^2 \right) dx\,dy\,dt \le M_1\,, \tag{13}$$

де стала

$$M_1 := \frac{e^{\alpha T}}{\min\{1, 2a_0\}} \left[\int_G |u_0(x,y)|^2\, dx\,dy + \int_{Q_T} \left(|f(x,y,t)|^2 \left|f_0^*(y)\right|^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + |q(x,y,t)|^2 \right) dx\,dy\,dt \right]$$

не залежить від N.

Домножимо (8) на власне значення μ_m задачі (7) та використаємо (7):

$$\int_{Q_\tau} \left[-u^{*,N}_t \Delta_y u^{*,N} - \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u^{*,N}_{y_i} \Delta_y u^{*,N} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^{*,N}_{x_i} \Delta_y u^{*,N}_{x_j} - \right.$$

$$- c(x,y,t) u^{*,N} \Delta_y u^{*,N} - g(x,y,t,u^{*,N}) \Delta_y u^{*,N} +$$

$$\left. + (f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t)) \Delta_y u^{*,N} \right] e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt = 0\,, \tag{14}$$

де $\alpha_1 = 3\ell\lambda^1 + c^2 - 2c_0 + 4 + 2g^1$, а $c^2 = \max\limits_i \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \left|c_{y_i}(x,y,t)\right|$.

Оцінимо кожний доданок цієї рівності, враховуючи умови теореми:

$$I_1 := -\int_{Q_\tau} u^{*,N}_t \sum_{i=1}^{\ell} u^{*,N}_{y_i y_i} e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt = \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 \tau}\, dx\,dy -$$

$$- \frac{1}{2} \int_G \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^N_{0 y_i}\right|^2 dx\,dy + \frac{\alpha_1}{2} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_2 := -\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u^{*,N}_{y_i} \sum_{j=1}^{\ell} u^{*,N}_{y_j y_j} e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt \ge$$

$$\ge -\frac{3}{2} \ell \lambda^1 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt -$$

$$- \frac{1}{2} \int_{S^1_\tau} \sum_{i,j=1}^{\ell} \lambda_i(y) \left|u^{*,N}_{y_j}\right|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\alpha_1 t}\, d\sigma\,dt\,,$$

$$I_3 := -\sum_{j=1}^{\ell} \int_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u^{*,N}_{x_i} u^{*,N}_{y_j y_j x_i} e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt \ge$$

$$\ge \frac{a_0}{2} \sum_{j=1}^{\ell} \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left|u^{*,N}_{y_j x_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt - \frac{(a^1)^2 \ell}{2a_0} M_1\,,$$

де $a^1 = \max\limits_{i,j} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} \left|a_{i y_j}(x,y,t)\right|^2$,

$$I_4 := -\int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} c(x,y,t) u^{*,N} u^{*,N}_{y_i y_i} e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt \ge -\frac{1}{2} c^2 \int_{Q_\tau} \left(\ell \left|u^{*,N}\right|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 \right) e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt + c_0 \int_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} \left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\, dx\,dy\,dt\,,$$

$$I_5 := -\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{\ell} g(x,y,t,u^{*,N})u^{*,N}_{y_iy_i}e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt \ge -\frac{g^1}{2}\Bigg[\int\limits_{Q_\tau}\Big(\ell\left|u^{*,N}\right|^2 +$$

$$+2\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 - \frac{1}{2g^1}\sum_{i=1}^{\ell}\left|g_{y_i}(x,y,t,0)\right|^2\Big)e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt\Bigg],$$

$$I_6 := \sum_{i=1}^{\ell}\int\limits_{Q_\tau}(f(x,y,t)f_0^*(y)+q(x,y,t))u^{*,N}_{y_iy_i}e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \frac{3}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\left|f_{y_i}(x,y,t)\right|^2\left|f_0^*(y)\right|^2 + |f(x,y,t)|^2\left|f^*_{0y_i}(y)\right|^2 +$$

$$+\left|q_{y_i}(x,y,t)\right|^2\Big)e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt.$$

На підставі оцінок $I_1 - I_6$ з (14) одержимо

$$\int\limits_{G_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 e^{-\alpha_1\tau}\,dx\,dy + \int\limits_{Q_\tau}\left[\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{*,N}_{y_i}\right|^2 + a_0\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n}\left|u^{*,N}_{x_iy_j}\right|^2\right]e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{G}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^N_{0y_i}\right|^2 dx\,dy + \frac{(a^1)^2\ell}{a_0}M_1 +$$

$$+(c^2+g^1)\ell\int\limits_{Q_\tau}\left|u^{*,N}\right|^2 e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\left|f_{y_i}(x,y,t)\right|^2\left|f_0^*(y)\right|^2 + |f(x,y,t)|^2\left|f^*_{0y_i}(y)\right|^2 +$$

$$+\frac{1}{g^1}\left|g_{y_i}(x,y,t,0)\right|^2 + \left|q_{y_i}(x,y,t)\right|^2\Big)e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt. \qquad (15)$$

З оцінки (15) випливає, що

$$\int\limits_{G}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{*,N}_{y_i}(x,y,\tau)\right|^2 dx\,dy \le M_2\Bigg[\int\limits_{G}\Big(\sum_{i=1}^{\ell}\left|u_{0y_i}(x,y)\right|^2 + \left|u_0(x,y)\right|^2\Big)dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\Big(\left|g_{y_i}(x,y,t,0)\right|^2 + \left|q_{y_i}(x,y,t)\right|^2 + \left|f_{y_i}(x,y,t)\right|^2\left|f_0^*(y)\right|^2 +$$

$$+|f(x,y,t)|^2\left|f^*_{0y_i}(y)\right|^2\Big)e^{-\alpha_1 t}\,dx\,dy\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\Big(|g(x,y,t,0)|^2 +$$

$$+|f(x,y,t)|^2\left|f_0^*(y)\right|^2 + |q(x,y,t)|^2\Big)dx\,dy\,dt\Bigg], \quad \tau\in[0,T], \qquad (16)$$

де стала M_2 не залежить від N.

Нехай P_N – оператор проектування $L^2(G)$ на $\{\varphi^k(x)\psi^m(y)\}_{k,m=1}^N$. Оператори P_N рівномірно обмежені у просторах $\mathcal{L}\{L^2(G), L^2(G)\}$, $\mathcal{L}\{L^2(G)+V_2^*(G), L^2(G)+V_2^*(G)\}$. З рівняння (8) випливає, що

$$u_t^{*,N} = -P_N\left(\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)u^{*,N}_{y_i}\right) - P_N\left(\sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x,y,t)u^{*,N}_{x_i})_{x_j}\right) -$$

$$-P_N(c(x,y,t)u^{*,N}) - P_N(g(x,y,t,u^{*,N})) +$$

$$+P_N(f(x,y,t)f_0^*(y)+q(x,y,t)).$$

Тому
$$\left\| u_t^{*,N} \right\|_{L^2(Q_T)+L^2((0,T);V_2^*(G))} \le M_3\,, \tag{17}$$
де стала M_3 не залежить від N.

З оцінок (12), (13), (16), (17) випливає існування такої підпослідовності послідовності $\{u^{*,N}\}_{N=1}^{\infty}$ (за якою збережемо те саме позначення), що при $N \to \infty$
$$u^{*,N} \to u^* \quad *\text{-слабко в } L^\infty((0,T);L^2(G)),$$
$$u^{*,N} \to u^* \quad \text{слабко в } L^2(0,T;W^{1,2}(G)),$$
$$u_t^{*,N} \to u_t^* \quad \text{слабко в } L^2(Q_T) + L^2((0,T);V_2^*(G)). \tag{18}$$

Для $u^{*,N}$ виконуються вкладення
$$u_t^{*,N} \in L^2((0,T);V_2^*(G) + L^2(G)),$$
$$u^{*,N} \in V_1(Q_T) \subset L^2((0,T);V_2(G) \cap L^2(G)).$$

Оскільки $V_2(G) \cap L^2(G) \subset L^2(G) \subset V_2^*(G) + L^2(G)$ і вкладення $V_2(G) \cap$ $\cap L^2(G) \subset L^2(G)$ компактне, то, згідно з теоремою про компактність [6, с. 70], послідовність $u^{*,N} \to u^*$ при $N \to \infty$ в $L^2(Q_T)$ і майже всюди в Q_T. Тому, згідно з умовою (**H**) і збіжностями (18), $g(x,y,t,u^{*,N}) \to g(x,y,t,u^*)$ в $L^2(Q_T)$.

Домножимо (8) на довільну функцію $z_{k,m}^{N_0} \in C^1([0,T])$, підсумуємо за k, m від 1 до N_0 та проінтегруємо по t від 0 до T. Оскільки простір $V_5(G)$ компактно вкладений в простір $V_2(G)$, виконуються збіжності (18), то перейшовши в (8) до границі при $N \to \infty$ і врахувавши щільність множини $\bigcup\limits_{N_0=1}^{\infty} \mathcal{M}_{N_0}$, $\mathcal{M}_{N_0} = \left\{ w : w(x,y,t) = \sum\limits_{k,m=1}^{N_0} z_{k,m}^{N_0}(t)\varphi^k(x)\psi^m(y) \right\}$ у просторі $V_1(Q_T)$, отримаємо рівність
$$\int_0^T \left\langle u_t^*, v \right\rangle dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i}^* v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^* v_{x_i} + c(x,y,t)u^* v + \right.$$
$$\left. + g(x,y,t,u^*)v - f(x,y,t)v \right] dx\,dy\,dt = 0\,,$$
правильну для всіх функцій $v \in V_1(Q_T)$.

Із вкладень $u_t^* \in L^2((0,T);V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, $u^* \in L^2((0,T);V_2(G)) \cap L^2(Q_T)$ та теореми 1.17 [2] випливає, що $u^* \in C([0,T];L^2(G))$. Крім того, цілком аналогічно, як у [6, с. 27], доводимо, що $u^*(x,y,0) = u_0(x,y)$. Тому u^* є розв'язком змішаної задачі (1)–(3).

Теорему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**C**), (**H**), (**L**), (**F**), (**U**), (**S**). *Тоді задача* (1)–(3) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 2 із [5]. ♦

3. Існування та єдиність розв'язку задачі (1)–(4).

Означення 2. Пару функцій $(u(x,y,t), f_0(y))$ назвемо *узагальненим розв'язком задачі* (1)–(4), якщо $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T];L^2(G))$, $u_t \in L^2(0,T;V_2^*(G)) +$ $+ L^2(Q_T)$, $f_0 \in W^{1,2}(D)$, $f_0|_{\Gamma_1} = 0$, причому ці функції для всіх $v \in V_1(Q_T)$

задовольняють інтегральну рівність

$$\int_0^T \langle u_t, v\rangle dt + \int_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i} v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i} v_{x_j} + c(x,y,t)uv + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u)v \right] dx\,dy\,dt = \int_{Q_T} (f(x,y,t) f_0(y) + q(x,y,t)) v\,dx\,dy\,dt \tag{19}$$

і, крім того, функція $u(x,y,t)$ задовольняє умови (2) і (4).

Лема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1 та умови* (**K**), (**E**). *Для того щоб пара функцій* $(u(x,y,t), f_0(y))$, *де* $u \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, $f_0 \in W^{1,2}(D)$, $f_0|_{\Gamma_1} = 0$ *була узагальненим розв'язком задачі* (1)–(4) *необхідно та достатньо, щоб для всіх* $v \in V_1(Q_T)$ *ця пара задовольняла рівність* (19), *а також початкову умову* (2) *і рівність*

$$f_0(y) \int_0^T \int_\Omega K(x,t) f(x,y,t)\,dx\,dt = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) E_{y_i}(y) - \int_0^T \int_\Omega K(x,t) q(x,y,t)\,dx\,dt -$$

$$- \int_0^T \int_\Omega \left(\left(\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x,y,t) K_{x_j}(x,t)\right)_{x_i} + K_t(x,t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - K(x,t) c(x,y,t) \right) u - K(x,t) g(x,y,t,u) \right) dx\,dt, \quad y \in D. \tag{20}$$

Д о в е д е н н я. Нехай $(u^*(x,y,t), f_0^*(y))$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(4). Помножимо (1) на $K(x,t)$ та проінтегруємо по $\Omega \times [0,T]$. Врахувавши умови (**K**) і (4), отримаємо

$$\int_0^T \int_\Omega \left[-K_t(x,t) u^* - \sum_{i,j=1}^{n} \left(K_{x_j}(x,t) a_{ij}(x,y,t)\right)_{x_i} u^* + K(x,t) c(x,y,t) u^* + \right.$$

$$\left. + K(x,t) g(x,y,t,u^*) \right] dx\,dt + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) E_{y_i}(y) =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega K(x,t)(f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t))\,dx\,dt, \quad y \in D. \tag{21}$$

З (21) випливає, що пара функцій $(u^*(x,y,t), f_0^*(y))$ задовольняє (20). Крім того, u^* є узагальненим розв'язком прямої задачі (1)–(3) з функцією $f_0^*(y)$ замість $f_0(y)$ у правій частині рівняння (1). Тому виконується умова (2), а також рівність (19) для всіх $v \in V_1(Q_T)$ при $f_0(y) = f_0^*(y)$.

Нехай тепер $f_0^*|_{\Gamma_1} = 0$, $u^* \in V_3(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$, $u_t^* \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$ і для них виконуються умова (2) та рівності (19), (20) для всіх $v \in V_1(Q_T)$. Тоді u^* є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3) з правою частиною $f(x,y,t) f_0^*(y) + q(x,y,t)$ у рівнянні (1). За умов леми цей розв'язок існує і є єдиним.

Покладемо $E^*(y) = \int_{G_t} K(x,t) u^*(x,y,t)\,dx\,dt$, $y \in D$. Очевидно, що $E^* \in W^{1,2}(D)$. Так само, як при доведенні необхідності, знайдемо, що

$$f_0^*(y)\int_0^T\int_\Omega K(x,t)f(x,y,t)\,dx\,dt = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)E_{y_i}^*(y) -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega K(x,t)q(x,y,t)\,dx\,dt -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\Bigg(\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,y,t)K_{x_j}(x,t)\big)_{x_i} + K_t(x,t) -$$
$$- K(x,t)c(x,y,t)\Bigg)u^* - K(x,t)g(x,y,t,u^*)\Bigg)\,dx\,dt, \quad y\in D. \quad (22)$$

З іншого боку, $f_0^*(y)$ та $u^*(x,y,t)$ задовольняють рівність

$$f_0^*(y)\int_0^T\int_\Omega K(x,t)f(x,y,t)\,dx\,dt = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)E_{y_i}(y) - \int_0^T\int_\Omega K(x,t)q(x,y,t)\,dx\,dt -$$
$$-\int_0^T\int_\Omega\Bigg(\Bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,y,t)K_{x_j}(x,t)\big)_{x_i} + K_t(x,t) -$$
$$- K(x,t)c(x,y,t)\Bigg)u^* - K(x,t)g(x,y,t,u^*)\Bigg)\,dx\,dt, \quad y\in D. \quad (23)$$

Із (22) та (23) випливає, що

$$\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)E_{y_i}^*(y) = \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)E_{y_i}(y), \qquad y\in D. \quad (24)$$

З рівності (24) та умови (3), отримуємо, що $E_3^*(y) = E(y)$, а отже, для $u^*(x,y,t)$ виконується умова (4).

Лему доведено. ♦

Введемо позначення

$$K(y) := \int_0^T\int_\Omega K(x,t)f(x,y,t)\,dx\,dt,$$

$$A(y) := \sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)E_{y_i}(y) - \int_0^T\int_\Omega K(x,t)q(x,y,t)\,dx\,dt,$$

$$B(x,y,t) := -K_t(x,t) + K(x,t)c(x,y,t) - \sum_{i,j=1}^{n}\big(a_{ij}(x,y,t)K_{x_j}(x,t)\big)_{x_i},$$

$$f_1 = \sup_D\int_0^T\int_\Omega (f(x,y,t))^2\,dx\,dt,$$

$$M_4 = \frac{4}{-3\ell\lambda^1 + c^2 - 2c_0 + 3 + 2g^1 + \dfrac{a_0}{\theta}},$$

$$\text{якщо} \qquad -3\ell\lambda^1 + c^2 - 2c_0 + 3 + 2g^1 + \frac{a_0}{\theta} > 0,$$

$$M_4 = 4T^2e^{-(-3\ell\lambda^1 + c^2 - 2c_0 + 3 + 2g^1 + a_0/\theta)T+1},$$

$$\text{якщо} \qquad -3\ell\lambda^1 + c^2 - 2c_0 + 3 + 2g^1 + \frac{a_0}{\theta} \le 0.$$

Тоді на підставі (20) за умови $K(y)\ne 0$ отримаємо рівність

$$f_0(y) = \frac{1}{K(y)}\left[A(y) + \int_0^T\int_\Omega (B(x,y,t)u + K(x,t)g(x,y,t,u))\,dx\,dt\right], \quad y\in D. \quad (25)$$

Припустимо, що для $T > 0$ виконуються умови

$$\frac{4f_1}{\left(-\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \frac{2a_0}{\theta}\right)^2 \inf\limits_D |K(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (B(x,y,t) + K(x,t)g^0)^2 \, dx\, dy\, dt < 1 ,$$

$$\text{якщо} \qquad -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \frac{2a_0}{\theta} > 0 ,$$

$$\frac{Tf_1 e^{(\ell\lambda^1 - 2c_0 + 2g^0 - \frac{2a_0}{\theta} + 1)T + 1}}{\inf\limits_D |K(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (B(x,y,t) + K(x,t)g^0)^2 \, dx\, dy\, dt < 1 ,$$

$$\text{якщо} \qquad -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \frac{2a_0}{\theta} \le 0 . \tag{26}$$

Теорема 3. *Нехай виконуються умови* (**A**), (**C**), (**L**), (**U**), (**H**), (**E**), (**K**), (**F**), (**S**) *та нехай* $a_{ijy_k}, a_{ijx_i}, c_{y_k} \in L^\infty(Q_T)$, $f_{y_k}, q_{y_k} \in L^2(Q_T)$, $i, j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, \ell$, $q|_{S_T^1} = 0$ *і, крім того,* $K(y) \ne 0$ *для всіх* $y \in D$ *та*

$$\left[A(y) + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega K(x,t) g(x,y,t,0)\, dx\, dt \right]\Bigg|_{S_T^1} = 0 ,$$

а число T *задовольняє умови* (26) *та умову*

$$\frac{8M_4 T f_1}{\inf\limits_D |K(y)|^2} \sup_D \int\limits_0^T \int\limits_\Omega [(B(x,y,t))^2 + (K(x,t)g^1)^2]\, dx\, dt < 1 .$$

Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)–(4).

Д о в е д е н н я. Побудуємо наближення $(u^m(x,y,t), f_0^m(y))$, розв'язку задачі (1)–(4), де функції $f_0^m(y)$, $m \in N$, визначаються так, що вони задовольняють систему рівностей

$$f_0^1(y) := 0 ,$$

$$f_0^m(y) = \frac{1}{K(y)} \left[A(y) + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega B(x,y,t) u^{m-1}\, dx\, dt + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T \int\limits_\Omega K(x,t) g(x,y,t,u^{m-1})\, dx\, dt \right], \qquad y \in D, \quad m \ge 2 , \tag{27}$$

а функції $u^m(x,y,t)$ задовольняють рівності

$$\int\limits_0^T \left\langle u_t^m, v \right\rangle dt + \int\limits_{Q_T} \left[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) u_{y_i}^m v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) u_{x_i}^m v_{x_j} + c(x,y,t) u^m v + \right.$$

$$\left. + g(x,y,t,u^m) v \right] dx\, dy\, dt =$$

$$= \int\limits_{Q_T} \left(f(x,y,t) f_0^m(y) + q(x,y,t) \right) v \, dx\, dy\, dt, \qquad m \ge 1 , \tag{28}$$

та умову

$$u^m(x,y,0) = u_0(x,y), \qquad (x,y) \in G , \tag{29}$$

причому рівність (28) виконується для всіх $v \in V_1(Q_T)$.

На підставі теорем 1 і 2 для кожного $m \in \mathbb{N}$ існує єдина функція $u^m \in \in V_3(Q_T) \bigcap C([0,T]; L^2(G))$ така, що $u_t^m \in L^2(0,T; V_2^*(G)) + L^2(Q_T)$, і справджуються рівності (28), (29), причому $f_0^m \in W^{1,2}(D)$, $f_0\big|_{\Gamma_1} = 0$.

Покажемо, що послідовність $\{(u^m(x,y,t), f_0^m(y))\}_{m=1}^{\infty}$ збігається до узагальненого розв'язку задачі (1)–(4). Позначимо

$$z^m := z^m(x,y,t) = u^m(x,y,t) - u^{m-1}(x,y,t),$$

$$r^m(y) = f_0^m(y) - f_0^{m-1}(y), \qquad m \ge 2.$$

Використавши рівності (28), знаходимо, що для всіх функцій $v \in \in V_1(Q_T)$ справджуються рівності

$$\int_0^T \left\langle z_t^m, v \right\rangle dt + \int_{Q_T} \Bigg[\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) z_{y_i}^m v + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z_{x_i}^m v_{x_j} + c(x,y,t) z^m v +$$

$$+ (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1}) v \Bigg] dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_T} r^m(y) f(x,y,t) v\,dx\,dy\,dt, \qquad m \ge 2. \tag{30}$$

Врахувавши лему 1, із (30) отримуємо

$$\frac{1}{2} \int_{G_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy + \int_{Q_\tau} \Bigg[\frac{\alpha}{2} \left| z^m \right|^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) z_{y_i}^m z^m +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) z_{x_i}^m z_{x_j}^m + c(x,y,t) \left| z^m \right|^2 +$$

$$+ (g(x,y,t,u^m) - g(x,y,t,u^{m-1})) z^m \Bigg] e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt =$$

$$= \int_{Q_\tau} r^m(y) f(x,y,t) z^m e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt, \quad \tau \in (0,T], \quad m \ge 2, \tag{31}$$

для довільного $\alpha \ge 0$. Використавши нерівність $|ab| \le \frac{\delta}{2} a^2 + \frac{1}{2\delta} b^2$, $\delta > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$, отримаємо

$$2 \int_{Q_\tau} r^m(y) f(x,y,t) z^m e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \le \delta f_1 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy +$$

$$+ \frac{1}{\delta} \int_{Q_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt, \qquad \tau \in (0,T], \quad m \ge 2.$$

На підставі умов (**A**), (**C**), (**H**), (**L**) з (31) випливають оцінки

$$\int_{G_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha\tau}\,dx\,dy + \int_{S_\tau^2} \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) \left| z^m \right|^2 \cos(\nu, y_i) e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} \Bigg[\left(\alpha - \ell\lambda^1 + 2c_0 - \frac{1}{\delta} - 2g^0 \right) \left| z^m \right|^2 +$$

$$+ 2a_0 \sum_{i=1}^{n} \left| z_{x_i}^m \right|^2 \Bigg] e^{-\alpha t}\,dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \delta f_1 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy, \quad \tau \in (0,T], \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0, \quad m \ge 2. \tag{32}$$

Для функцій $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ виконується нерівність Фрідріхса

$$\int_\Omega |v(x)|^2\, dx \le \theta \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| v_{x_i}(x) \right|^2 dx\,, \tag{33}$$

де стала θ залежить від Ω.

Із (32) та нерівності (33) випливає оцінка

$$\int_{G_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha\tau} dx\,dy + \left(\alpha - \ell\lambda^1 + 2c_0 - \frac{1}{\delta} - 2g^0 + \frac{2a_0}{\theta} \right) \int_{Q_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt \le$$

$$\le \delta f_1 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy, \quad \tau \in (0,T], \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0, \quad m \ge 2\,. \tag{34}$$

Позначимо

$$M_5 := \begin{cases} T f_1 e^{(\ell\lambda^1 - 2c_0 + 2g^0 - \frac{2a_0}{\theta} + 1)T + 1}, & -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta} \le 0, \\ \dfrac{4 f_1}{\left(-\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta} \right)^2}, & -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta} > 0, \end{cases}$$

$$M_6 := \frac{2 f_1}{-\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta}}\,.$$

Розглянемо такі випадки:

1°) $\quad -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta} > 0, \qquad \delta = \dfrac{2}{-\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta}}, \qquad \alpha = 0\,.$

Тоді з (34) випливають оцінки

$$\int_{Q_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha t}\, dx\,dy\,dt \le M_5 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy\,,$$

$$\int_{G_\tau} \left| z^m \right|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\,dy \le M_6 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy, \quad \tau \in (0,T], \quad m \ge 2\,. \tag{35}$$

2°) $\quad -\ell\lambda^1 + 2c_0 - 2g^0 + \dfrac{2a_0}{\theta} \le 0, \qquad \delta = T, \qquad \alpha = \ell\lambda^1 - 2c_0 + \dfrac{1}{T} + 2g^0 - \dfrac{2a_0}{\theta} + 1\,.$

Тоді з (34) маємо оцінку

$$\int_{Q_\tau} \left| z^m \right|^2 dx\,dy\,dt + \int_{G_\tau} \left| z^m \right|^2 dx\,dy \le M_5 \int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy, \ \tau \in (0,T], \ m \ge 2\,. \tag{36}$$

Оцінимо значення $\left| r^m(y) \right|$ для $m \ge 3$. На підставі (27) отримуємо, що

$$r^m(y) = \frac{1}{K(y)} \left[\int_0^T \int_\Omega B(x,y,t) z^{m-1}\, dx\,dt + \int_0^T \int_\Omega K(x,t)(g(x,y,t,u^{m-1}) - \right.$$

$$\left. - g(x,y,t,u^{m-2}))\, dx dt \right], \quad y \in D, \quad m \ge 3\,. \tag{37}$$

Піднесемо обидві частини рівності (37) до квадрата і, використавши нерівність Гельдера, проінтегруємо по y. Одержимо

$$\int_D \left| r^m(y) \right|^2 dy \le M_7 \int_{Q_T} \left| z^{m-1} \right|^2 dx\,dy\,dt\,, \tag{38}$$

де

$$M_7 := \frac{1}{\inf\limits_D |K(y)|^2} \int\limits_{Q_T} (B(x,y,t) + K(x,t)g^0)^2\, dx\, dy\, dt\,.$$

Із оцінок (33) і (38) випливає, що

$$\int\limits_D \left|r^{m+1}(y)\right|^2 dy \le M_7 \int\limits_{Q_T} \left|z^m\right|^2 dx\, dy\, dt \le M_8 \int\limits_D \left|r^m(y)\right|^2 dy\,,$$

де $M_8 := M_7 M_5$, $m \ge 2$. Звідси отримуємо

$$\int\limits_D \left|r^m(y)\right|^2 dy \le M_8 \int\limits_D \left|r^{m-1}(y)\right|^2 dy \le (M_8)^{m-2} \int\limits_D \left|r^2(y)\right|^2 dy, \quad m \ge 3\,. \tag{39}$$

Згідно з (26), $|M_8| < 1$. Використавши (39), отримаємо, що для всіх k, $m \ge 3$, $m \in \mathbb{N}$, справджується нерівність

$$\int\limits_D \left|f_0^{m+k}(y) - f_0^m(y)\right|^2 dy \le \sum_{i=m+1}^{m+k} \int\limits_D \left|r^i(y)\right|^2 dy \le \sum_{i=m+1}^{m+k} (M_8)^{i-2} \times$$

$$\times \int\limits_D \left|r^2(y)\right|^2 dy \le \frac{(M_8)^{m-1}(1-(M_8)^k)}{1-M_8} \int\limits_D \left|r^2(y)\right|^2 dy\,.$$

Звідси випливає, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке m_0 що для всіх k, $m \in \mathbb{N}$, $m > m_0$, виконуються нерівності $\left\|f_0^{m+k}(y) - f_0^m(y); L^2(D)\right\| \le \varepsilon$. Отже, послідовність $\{f_0^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(D)$.

Тоді з (36) та (39) випливає, що $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))$ і послідовність $\{f_0^m\}_{m=1}^{\infty}$ є фундаментальною в $L^2(D)$, а тому при $m \to \infty$

$$\begin{aligned} &u^m \to u \quad \text{сильно в } L^2(Q_T) \cap C([0,T]; L^2(G))\,, \\ &f_0^m \to f_0^m \quad \text{сильно в } L^2(D)\,. \end{aligned} \tag{40}$$

Крім того, з (32) випливає, що $u_{x_i}^m \to u_{x_i}$ слабко в $L^2(Q_T)$, $i = 1, \ldots, n$. З (16) випливають оцінки

$$\int\limits_{G_\tau} \sum_{i=1}^{\ell} \left|u_{y_i}^{m,N}\right|^2 dx\, dy \le M_9 \Bigg(\int\limits_{Q_T} \Bigg(|f(x,y,t)|^2 \left|f_0^m(y)\right|^2 + |q(x,y,t)|^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{\ell} \left|f_{y_i}(x,y,t)\right|^2 \left|f_0^m(y)\right|^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \left|q_{y_i}(x,y,t)\right|^2 +$$

$$+ |g(x,y,t,0)|^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \left|g_{y_i}(x,y,t,0)\right|^2 \Bigg) dx\, dy\, dt +$$

$$+ \int\limits_G \Bigg(|u_0(x,y)|^2 + \sum_{i=1}^{\ell} \left|u_{0y_i}(x,y)\right|^2 \Bigg) dx\, dy \Bigg) +$$

$$+ M_4 \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{\ell} |f(x,y,t)|^2 \left|f_{0y_i}^m(y)\right|^2 dx\, dy\, dt, \quad \tau \in [0,T]\,,$$

$$\left\|u_t^{m,N}; L^2(Q_T) + L^2(0,T; V_3^*(G))\right\| \le M_{10}\,, \tag{41}$$

де сталі M_9, M_{10} не залежать від N. Проінтегруємо (41) по τ від 0 до T і перейдемо до границі при $N \to \infty$. Оскільки $\left\|v; L^2(Q_T)\right\|^2 \le \varliminf\limits_{N\to\infty} \left\|v^N; L^2(Q_T)\right\|^2$ [2, с. 20], то отримаємо

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^m_{y_i}\right|^2 dx\,dy \le M_{11}T\left(\int\limits_D\left|f_0^m(y)\right|^2 dy + M_{12}\right)+$$

$$+M_4 f_1 T\int\limits_D\sum_{i=1}^{\ell}\left|f^m_{0y_i}(y)\right|^2 dy\,, \tag{42}$$

де сталі M_{11}, M_{12} не залежать від m.

З (27) випливає, що для всіх $i=1,\ldots,\ell$ маємо

$$f^m_{0y_i}(y)=\frac{1}{K(y)}\Big[-K_{y_i}(y)f_0^m(y)+A_{y_i}(y)+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega B_{y_i}(x,y,t)u^{m-1}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega B(x,y,t)u^{m-1}_{y_i}\,dx\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega K(x,t)g_{y_i}(x,y,t,u^{m-1})\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega K(x,t)g_{u^{m-1}}(x,y,t,u^{m-1})u^{m-1}_{y_i}\,dx\,dt\Big],\ \ y\in D,\ \ m\ge 2\,. \tag{43}$$

Піднесемо (43) до квадрата, проінтегруємо по D та оцінимо, застосувавши нерівність Гельдера:

$$\int\limits_D\sum_{i=1}^{\ell}\left|f^m_{0y_i}(y)\right|^2 dy\le\frac{8}{\inf\limits_D|K(y)|^2}\Big[\sum_{i=1}^{\ell}\sup_D\left|K_{y_i}(y)\right|^2\int\limits_D\left|f_0^m(y)\right|^2 dy+$$

$$+\int\limits_D\sum_{i=1}^{\ell}\left|A_{y_i}(y)\right|^2 dy+\sum_{i=1}^{\ell}\sup_D\int\limits_0^T\int\limits_\Omega (B_{y_i}(x,y,t))^2\,dx\,dt\,\times$$

$$\times\int\limits_{Q_T}\left|u^{m-1}\right|^2 dx\,dy\,dt+\sup_D\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(B(x,y,t))^2\,dx\,dt\,\times$$

$$\times\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{m-1}_{y_i}\right|^2 dx\,dy\,dt+\ell\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(K(x,t)g^0)^2\,dx\,dt\,\times$$

$$\times\int\limits_{Q_T}\left|u^{m-1}\right|^2 dx\,dy\,dt+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(K(x,t)g^1)^2\,dx\,dt\,\times$$

$$\times\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^{m-1}_{y_i}\right|^2 dx\,dy\,dt\,\Big],\qquad y\in D,\qquad m\ge 2\,. \tag{44}$$

Врахувавши (44), із (42) отримуємо оцінку

$$\int\limits_{Q_T}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u^m_{y_i}\right|^2 dx\,dy\,dt\le M_{13}\left(\int\limits_D\left|f_0(y)\right|^2 dy+1+\int\limits_{Q_T}\left|u^{m-1}\right|^2 dx\,dy\,dt\right), \tag{45}$$

де

$$M_{14}\;=T\max\Big\{M_{11}+\frac{8f_1M_4}{\inf\limits_D|K(y)|^2}\sum_{i=1}^{\ell}\sup_D\left|K_{y_i}(y)\right|^2,$$

$$M_{11}M_{12}+\frac{8f_1M_4}{\inf\limits_D|K(y)|^2}\int\limits_D\sum_{i=1}^{\ell}\left|A_{y_i}(y)\right|^2 dy\,,$$

$$\frac{8f_1M_4}{\inf\limits_D|K(y)|^2}\Big(\sum_{i=1}^{\ell}\sup_D\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(B_{y_i}(x,y,t))^2\,dx\,dt+$$

$$+\ell\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(K(x,t)g^0)^2\,dxdt\Big)\Big\},$$

$$M_{15} = 1 - \frac{8M_4Tf_1}{\inf\limits_{D}|K(y)|^2}\sup_{D}\int_0^T\int_\Omega [(B(x,y,t))^2 + (K(x,t)g^1)^2]\,dx\,dt\,,$$

$$M_{13} = \frac{M_{14}}{M_{15}}\,.$$

Зі збіжностей (40) випливає обмеженість правої частини нерівності (45). Тому отримаємо

$$\int_{G_\tau}\sum_{i=1}^{\ell}\left|u_{y_i}^m\right|^2 dx\,dy \le M_{16}, \qquad \tau \in [0,T],$$

$$\left\|u_t^m; L^2(Q_T) + L^2(0,T;V_3^*(G))\right\| \le M_{17}\,, \tag{46}$$

де сталі M_{16}, M_{17} не залежать від m. Із (46) випливає, що з послідовності $\{u^m\}_{m=1}^{\infty}$ можна вибрати підпослідовність (збережемо для неї те саме позначення), таку що

$$u_{y_i}^m \to u_{y_i} \quad \text{слабко в } L^2(Q_T), \quad i = 1,\ldots,\ell\,,$$

$$u_t^m \to u_t \quad \text{слабко в } L^2(Q_T) + L^2(0,T;V_3^*(G)). \tag{47}$$

Тоді й права частина (44) є обмеженою сталою, яка не залежать від m, а, отже,

$$f_{0y_i}^m \to f_{0y_i} \quad \text{слабко в } L^2(D), \qquad i = 1,\ldots,\ell\,. \tag{48}$$

Врахувавши (40), (46) (48) і лему 2, з (27) та (28) отримаємо, що $(u(x,y,t), f_0(y))$ – узагальнений розв'язок задачі (1)–(4) в області Q_T.

Теорему доведено. ♦

Теорема 4. *Нехай виконуютьcя умови теореми* 3. *Тоді задача* (1)–(4) *не може мати більше одного узагальненого розв'язку.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що $(u^{(1)}(x,y,t), f_0^{(1)}(y))$, $(u^{(2)}(x,y,t)$, $f_0^{(2)}(y))$ – два узагальнені розв'язки задачі (1)–(4). Тоді їх різниця $(\tilde u(x,y,t), \tilde f_0(y))$, де $\tilde u(x,y,t) = u^{(1)}(x,y,t) - u^{(2)}(x,y,t)$, $\tilde f_0(y) = f_0^{(1)}(y) - f_0^{(2)}(y)$ задовольняє умову $\tilde u(x,y,0) \equiv 0$ і рівність

$$\int_0^T \langle \tilde u_t, v\rangle\,dt + \Bigg[\int_{Q_T}\sum_{i=1}^{\ell}\lambda_i(y)\tilde u_{y_i}v + \sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,y,t)\tilde u_{x_i}v_{x_j} + c(x,y,t)\tilde u v +$$
$$+ (g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))v\Bigg]dx\,dy\,dt =$$
$$= \int_{Q_T} f(x,y,t)\tilde f_0(y)v\,dx\,dy\,dt \tag{49}$$

для всіх $v \in V_1(Q_T)$ та

$$\tilde f_0(y) = \frac{1}{K(y)}\Bigg[\int_0^T\int_\Omega B(x,y,t)\tilde u\,dx\,dt + \int_0^T\int_\Omega K(x,t)(g(x,y,t,u^{(1)}) -$$
$$- g(x,y,t,u^{(2)})\,dx\,dt\Bigg], \qquad y \in D\,. \tag{50}$$

Згідно із лемою 1, для пари функцій $(\tilde u(x,y,t), \tilde f_0(y))$ та $\alpha > 0, \delta > 0$ виконується рівність

$$\int\limits_{G_\tau} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\alpha |\tilde{u}|^2 + 2\sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i(y) \tilde{u}_{y_i} \tilde{u} + 2\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x,y,t) \tilde{u}_{x_i} \tilde{u}_{x_j} +$$

$$+ 2c(x,y,t)|\tilde{u}|^2 + 2(g(x,y,t,u^{(1)}) - g(x,y,t,u^{(2)}))\tilde{u} \Bigg] e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt =$$

$$= 2\int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t) \tilde{f}_0(y) \tilde{u} e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt, \qquad \tau \in (0,T].$$

Звідси так само, як з (31), отримаємо оцінку

$$\int\limits_{G_\tau} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha\tau}\, dx\, dy + \left(\alpha - \ell\lambda^1 + 2c_0 - \frac{1}{\delta} - 2g^0 + \frac{2a_0}{\theta} \right) \times$$

$$\times \int\limits_{Q_\tau} |\tilde{u}|^2 e^{-\alpha t}\, dx\, dy\, dt \le \delta f_1 \int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy, \qquad \tau \in (0,T]. \tag{51}$$

Аналогічно, як з (34), з нерівності (51) випливає оцінка

$$\int\limits_{Q_\tau} |\tilde{u}|^2\, dx\, dy\, dt \le M_3 \int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy, \qquad \tau \in (0,T], \qquad m \ge 2. \tag{52}$$

Використавши (50), так само, як при доведенні існування розв’язку, отримаємо

$$\int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy \le M_5 \int\limits_{Q_T} |\tilde{u}|^2\, dx\, dy\, dt.$$

Врахувавши оцінку (52) для $\tau = T$, знайдемо

$$\int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy \le M_6 \int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy.$$

Тому $(1 - M_6)\int\limits_D \left| \tilde{f}_0(y) \right|^2 dy \le 0$. Оскільки $|M_6| < 1$, то $\tilde{f}_0(y) \equiv 0$, а тому $f_0^{(1)}(y) \equiv$ $\equiv f_0^{(2)}(y)$. Тоді з (52) випливає, що $\int\limits_{Q_T} |\tilde{u}|^2\, dx\, dy \le 0$, а тому $u^{(1)} = u^{(2)}$ в Q_T.

Теорему доведено. ♦

Зауваження. Умова (26) виконується, зокрема, для достатньо малих T або для достатньо малих областей Ω.

1. *Бейлина Н. В.* О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения // Вестн. Самарск. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2011. – **23**, № 2. – С. 34–39.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – Москва: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Камынин В. Л.* Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // Мат. заметки. – 2005. – **77**, № 4. – С. 522–534.
   Те саме: *Kamynin V. L.* On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition // Math. Notes. – 2005. – **77**, No. 4. – P. 482–493.
4. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
5. *Лавренюк С. П., Процах Н. П.* Мішана задача для нелінійного ультрапараболічного рівняння, яке узагальнює рівняння дифузії з інерцією // Укр. мат. журн. 2006. – **58**, № 9. – С. 1192–1210.
   Те саме: *Lavrenyuk S. P., Protsakh N. P.* Mixed problem for a nonlinear ultraparabolic equation that generalizes the diffusion equation with inertia // Ukr. Math. J. – 2006. – **58**, No. 9. – P. 1347–1368.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 587 с.

7. *Павлов С. С.* Разрешимость обратной задачи восстановления внешнего воздействия в многомерном волновом уравнении // Вестн. Челябинск. Гос. Ун-та. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – № 26, вип. 13. – С. 27–37.
8. *Eidelman S. D., Ivasyshen S. D., Kochubei A. N.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type. – Basel: Birkhäuser, 2004. – 390 p. – (Ser. Operator Theory: Adv. And Appl. – Vol. 152.)
9. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type. – Lviv: VNTL Publ., 2003. – 238 p. – (Math. Studies: Monograph Ser. – Vol. 10.)
10. *Kozhanov A. I.* An inverse problem with an unknown coefficient and right-hand side for a parabolic equation. II // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2003. – **11**, No 5. – P. 505–522.
11. *Lanconelli E., Pascucci A., Polidoro S.* Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance // Nonlinear problems in mathematical physics and related topics II. In honor of Prof. O. A. Ladyzhenskaya. – New York: Kluwer Acad. Publ., 2002. – P. 243–265. – (Ser. International Mathematical Series, Vol. 2).
12. *Lavrenyuk S., Protsakh N.* Boundary value problem for nonlinear ultraparabolic equation in unbounded with respect to time variable domain // Tatra Mt. Math. Publ. – 2007. – **38**, No. 4. – P. 131–146.
13. *Lorenzi A.* Identification problems in Banach spaces for linear first-order partial differential equations in one space dimension and applications // J. Inverse Ill-Posed Probl. – 2012. – **20**, No. 1. – P. 65–102.
14. *Protsakh N.* Inverse problem for an ultraparabolic equation // Tatra Mt. Math. Publ. – 2013. – **54**, No. 1. – P. 133–151.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УЛЬТРАПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕИЗВЕСТНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Рассмотрена обратная задача определения зависящего от пространственной переменной множителя правой части слабо нелинейного ультрапараболического уравнения. Получены условия, при которых обобщенное решение задачи существует, является единственным и принадлежит пространствам Соболева.

INVERSE PROBLEM FOR ULTRAPARABOLIC EQUATION WITH UNKNOWN FUNCTION OF A SPATIAL VARIABLE IN THE RIGHT-HAND SIDE OF EQUATION

The inverse problem of determination of the multiplier, that depends on a spatial variable of the right-hand side for a semilinear ultraparabolic equation is considered. The conditions of existence, uniqueness of generalized solution of the problem in Sobolev spaces are obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
17.05.13