

ВИПРОМІНЮВАННЯ ЗВУКУ ЛІТАКОМ ПІД ЧАС РОЗБІГУ НА ЗЛІТНІЙ СМУЗІ

Розглядається задача випромінювання звуку літаком під час старту на стадії його розбігу по злітній смугі летовища в умовах дії вітру. Носіями звуку є авіаційні двигуни, які в задачі моделюються точковими джерелами, що рухаються в повітрі із сталим прискоренням паралельно до плоскої поверхні поділу акустичного і пружного твердого тіла просторів. Розв'язок задачі одержано за допомогою інтегрального перетворення Фур'є за часом і просторовими координатами, а також методу стаціонарної фази. Виконано числовий аналіз просторово-часових розподілів звукового тиску і рівнів звукового тиску для випадку розбігу шестимоторного літака типу Ан-225 «Мрія».

1. Постановка задачі. Летовища, з яких стартують або на які приземлюються повітряні лайнери, є місцями концентрації підвищеного шуму, а отже, джерелами розповсюдження акустичних хвиль на прилеглі околиці. У цьому зв'язку в останні роки проблема авіаційного акустичного клімату привернула значну увагу дослідників [8, 12, 17], зокрема, в галузі вимірювання рівня акустичного тиску [7], емпіричних методів його оцінки [19, 20], а також проблем оптимізації [5, 11] і редукції авіаційного шуму [13] та захисту від нього [18]. Математичне моделювання акустичних хвильових процесів, яке здатне допомогти оцінити у широкому масштабі цього типу небезпечну загрозу для здоров'я людей [10], розвинуто ще недостатньо.

У цій статті зроблено спробу виконання такого моделювання. Внаслідок складності цієї проблеми воно обмежене дослідженням процесу випромінювання акустичної енергії літаком лише на стадії його стартового розбігу.

Розглянемо задачу випромінювання звуку літаком, що стартує. Траєкторія руху такого об'єкту складається з чотирьох частин. Перша частина – це прискорений рух літака по злітній смугі летовища, починаючи з вихідної точки старту. Друга – прискорений рух в повітрі на деякій невеликій висоті, паралельно до злітної смуги. Третя – рух по криволінійній траєкторії з виходом на четверту частину траєкторії – руху вгору зі сталою швидкістю під деяким кутом до злітної смуги.

У цій статті досліджуємо процес генерування шуму під час розгону літака на першій частині траєкторії старту, оскільки вона найтриваліша і проходить, як правило, поблизу заселених місцевостей.

Замінімо двигуни на точкові джерела звуку з певною інтенсивністю і круговою частотою гармонічних коливань Ω . Спочатку розглянемо одне джерело звуку, яке рухається у площині Oxz на висоті $z = z_0$ над площиною $z = 0$ поділу акустичного ($z > 0$) і пружного ($z < 0$) середовищ. Враховуватимемо також вплив зустрічного вітру, внаслідок чого акустичне середовище рухається зі сталою швидкістю \mathbf{v}_w під кутом θ_w до осі Ox паралельно до поверхні $z = 0$, причому $\pi/2 \leq \theta_w \leq 3\pi/2$.

Зауважимо, що у роботі [15] вивчали подібну задачу моделювання автомобільного шуму на прямій ділянці дороги, де припускали, що рух точкових джерел відбувається зі сталою швидкістю. У розглядуваній задачі рух джерела відбувається з прискоренням, тим не менше у багатьох моментах методика дослідження для обох випадків залишається подібною.

Для опису випромінювання звуку потрібно розв'язати рівняння руху [1]

$$\rho \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

і рівняння балансу маси

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{\rho c^2} \frac{dp(\mathbf{x}, t)}{dt}, \quad (2)$$

де ρ – густина акустичного середовища; c – швидкість звуку в ньому; $p(\mathbf{x}, t)$ – акустичний тиск; $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ – вектор швидкості частинок середовища; $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ – вектор масової сили; $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \mathbf{i}_z z$ – радіус-вектор у тривимірному просторі, а $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{i}_x x + \mathbf{i}_y y$ – радіус-вектор в площині Oxz ; t – час. Вплив руху акустичного середовища враховується у записі глобальної похідної за часом:

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla,$$

де $\partial/\partial t$ – локальна похідна за часом; ∇ – оператор Гамільтона (градієнт):

$$\nabla = \nabla_{\perp} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \nabla_{\perp} = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y},$$

а вектор \mathbf{v}_w має лише дві компоненти:

$$\mathbf{v}_w = (v_{wx}, v_{wy}, 0), \quad v_{wx} = v_w \cos \theta_w, \quad v_{wy} = v_w \sin \theta_w.$$

Оскільки вектор швидкості частинок акустичного середовища має вигляд

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad (3)$$

де $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – вектор переміщень частинок в середовищі, то на основі рівнянь (1) і (2) одержуємо хвильове рівняння відносно акустичного тиску:

$$\begin{aligned} \nabla^2 p(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial^2 p(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + 2\mathbf{v}_w \cdot \nabla_{\perp} p(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}_w \cdot \nabla_{\perp} \nabla_{\perp} p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_w \right] = \\ = \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}, t), \quad z > 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Нехай точкове джерело звуку рухається уздовж прямої $0 \leq x \leq x_0$, $y = 0$, $z = z_0$. Для випадку руху цього джерела з прискоренням масова сила матиме вигляд

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0 G(\boldsymbol{\xi}, t) \delta(z - z_0),$$

де

$$G(\boldsymbol{\xi}, t) = \delta[x - v_1(t)t] \delta(y) [H(x) - H(x - x_0)] H(t) \exp(-i\Omega t),$$

$\mathbf{F}_0 = (F_{0x}, F_{0y}, F_{0z})$ – вектор сталих дійсних амплітуд масової сили; $\delta(x)$ – функція Дірака; $H(t)$ – функція Гевісайда; $v_1(t)$ – змінна швидкість руху джерела, яку вважатимемо лінійною функцією часу:

$$v_1(t) = v_0 + w_0 t, \quad (5)$$

v_0 – швидкість руху джерела в момент проходження точки $x = 0$, $y = 0$, яку виберемо за початкову точку спостереження при $t = 0$; w_0 – прискорення розбігу. У момент часу $t = t_0$ – початку піднесення джерела над поверхнею $z = 0$, його швидкість дорівнює $v_1(t_0) = v_2$, тобто довжина траси руху джерела в площині $z = z_0$ становить

$$x_0 = v_1(t_0)t_0 = v_2 t_0. \quad (6)$$

За формулами (5), (6) можемо одержати рівняння відносно t_0 :

$$w_0 t_0^2 + v_0 t_0 - x_0 = 0,$$

звідки

$$t_0 = \frac{1}{2w_0} \left(\sqrt{v_0^2 + 4w_0x_0} - v_0 \right). \quad (7)$$

Рівняння (4) виконується для акустичної хвилі, випроміненої рухомих джерелом, тобто $p(\mathbf{x}, t) = p_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)$. Для звуку, відбитого від межі поділу двох середовищ $z = 0$, тобто для $p(\mathbf{x}, t) = p_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t)$ також виконуються рівняння (1), (2), (3), (4), але у цьому випадку масова сила відсутня, $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = 0$.

На поверхні $z = 0$ повинні виконуватись умови спряження двох середовищ:

$$\sigma_z + p_{\text{tot}} = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \quad u_{sz} = u_{\text{tot},z},$$

де p_{tot} і $u_{\text{tot},z}$ – повний тиск і повне переміщення частинок в акустичному півпросторі $z > 0$:

$$p_{\text{tot}} = p_{\text{rad}} + p_{\text{ref}}, \quad u_{\text{tot},z} = u_{\text{rad},z} + u_{\text{ref},z}.$$

Для півпростору $z < 0$, заповненого пружним матеріалом, вектор переміщення $\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t)$ пов'язаний зі скалярним $\varphi(\mathbf{x}, t)$ і векторним $\Psi(\mathbf{x}, t)$ потенціалами [6]:

$$\mathbf{u}_s(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \Psi(\mathbf{x}, t),$$

причому ці потенціали задовольняють хвильові рівняння

$$\nabla^2\varphi - \frac{1}{c_L^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla^2\Psi - \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (9)$$

де додатково

$$\nabla \cdot \Psi = 0.$$

Напруження і переміщення у пружному матеріалі пов'язані з потенціалами співвідношеннями [6]:

$$\begin{aligned} \sigma_z &= \lambda \nabla^2\varphi + 2\mu \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_{xz} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi_z}{\partial y} - \frac{\partial\Psi_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \right) \right], \\ \tau_{yz} &= \mu \left[2 \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial\Psi_z}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y} \right) \right], \\ u_{sz} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\Psi_y}{\partial x} - \frac{\partial\Psi_x}{\partial y}, \end{aligned}$$

де λ і μ – параметри Ляме. У формулах (8), (9) $c_L = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho_s}$ і $c_T = \sqrt{\mu/\rho_s}$ – швидкості поздовжніх і поперечних хвиль у пружному тілі; ρ_s – густина матеріалу; $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$ – оператор Лапласа.

2. Одержання аналітичних співвідношень для акустичного тиску і рівня акустичного тиску. Для розв'язування задачі застосуємо інтегральне перетворення Фур'є за часом t і змінними x, y [4]:

$$f^{\text{F}}(\mathbf{k}, z, \omega) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} d\mathbf{x} dt,$$

причому обернене перетворення Фур'є одержуємо у вигляді

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int f^F(\mathbf{\kappa}, z, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi})} d\mathbf{\kappa} d\omega,$$

де $\mathbf{\kappa} = (k_x, k_y)$, $\boldsymbol{\xi} = (x, y)$, $d\mathbf{\kappa} = dk_x dk_y$, $d\boldsymbol{\xi} = dx dy$.

Розв'язавши задачу у трансформантах Фур'є і перейшовши до оригіналів, після деяких перетворень одержимо такі формули для акустичного тиску [14]:

$$P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0 \cdot \nabla P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t), \quad (10)$$

$$P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}_0 \cdot \tilde{\nabla} P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t), \quad (11)$$

де $\tilde{\nabla} \equiv \nabla_{\perp} - \mathbf{i}_z \partial / \partial z$, а функції $P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t)$ і $P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t)$ мають зміст акустичних потенціалів:

$$P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} G^F(k_x, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}) + ik_{zw}|z-z_0|} \frac{d\mathbf{\kappa} d\omega}{k_{zw}}, \quad (12)$$

$$P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} G^F(k_x, \omega) R_s^F(\mathbf{\kappa}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{\kappa} \cdot \boldsymbol{\xi}) + ik_{zw}(z+z_0)} \frac{d\mathbf{\kappa} d\omega}{k_{zw}}, \quad (13)$$

причому

$$G^F(k_x, \omega) = \int_0^{t_0} \exp\{i[(\omega - \Omega) - k_x(v_0 + w_0 t)]t\} dt, \quad R_s^F(\mathbf{\kappa}, \omega) = \frac{\Phi^-(\mathbf{\kappa}, \omega)}{\Phi^+(\mathbf{\kappa}, \omega)},$$

$$\Phi^{\pm}(\mathbf{\kappa}, \omega) = (k_T^2 - 2\kappa^2)^2 + 4\kappa^2 k_{zL} k_{zT} \pm N_s k_T^2 \left(\frac{c}{c_T}\right)^2 (1 - \mathbf{M}_w \cdot \mathbf{\kappa})^2 \frac{k_{zL}}{k_{zw}},$$

$$k_{zA} = \sqrt{k_A^2 - \kappa^2}, \quad \text{Im } k_{zA} \geq 0, \quad k_A = \frac{\omega}{c_A}, \quad A = L, T,$$

$$k_{zw} = \sqrt{(k - \mathbf{M}_w \cdot \mathbf{\kappa})^2 - \kappa^2}, \quad \text{Im } k_{zw} \geq 0,$$

$$k = \frac{\omega}{c}, \quad \kappa = |\mathbf{\kappa}| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}, \quad \mathbf{M}_w = \frac{\mathbf{v}_w}{c}, \quad N_s = \frac{\rho}{\rho_s}.$$

Тут k – хвильове число акустичного середовища; \mathbf{M}_w – вектор чисел Маха для вітру; $R_s^F(\mathbf{\kappa}, \omega)$ – трансформанта Фур'є коефіцієнта відбиття акустичної хвилі від пружного півпростору.

Використовуючи результати роботи [14], інтеграли (12) і (13) можемо записати у вигляді

$$P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{t_0} \frac{e^{-i\Omega t'}}{R_w[\mathbf{x}(t')]} \delta\{f[\mathbf{x}(t'), t - t']\} dt' \Big|_{z \rightarrow z - z_0}, \quad (14)$$

$$P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{i}{4\pi} \int_0^{t_0} \frac{e^{-i\Omega t'}}{R_w[\mathbf{x}(t')]} R_s[\mathbf{x}(t')] \delta\{f[\mathbf{x}(t'), t - t']\} dt' \Big|_{z \rightarrow z + z_0}, \quad (15)$$

де

$$f[\mathbf{x}(t'), t - t'] = t - t' - \frac{1}{c\alpha} \{R_w[\mathbf{x}(t')] - \mathbf{M}_w \cdot \boldsymbol{\xi}(t')\},$$

$$R_w[\mathbf{x}(t)] = \sqrt{\alpha_y x^2(t) + \alpha_x y^2 + \beta x(t)y + \alpha z^2},$$

$$R_s[\mathbf{x}(t)] = V^-[\mathbf{x}(t)] / V^+[\mathbf{x}(t)],$$

$$\begin{aligned}
V^\pm[\mathbf{x}(t)] &= \{S_T^2 - 2S^2[\mathbf{x}(t)]\}^2 + 4S^2[\mathbf{x}(t)]S_{zL}[\mathbf{x}(t)]S_{zT}[\mathbf{x}(t)] \pm \\
&\quad \pm N_s S_T^2 (c/c_T)^2 \{\alpha_{xy} - \mathbf{M}_w \cdot \mathbf{S}[\mathbf{x}(t)]\}^2 S_{zL}[\mathbf{x}(t)]/S_z[\mathbf{x}(t)], \\
S[\mathbf{x}(t)] &= |\mathbf{S}[\mathbf{x}(t)]|, \quad \mathbf{S}[\mathbf{x}(t)] = \mathbf{r}[\boldsymbol{\xi}(t)]/R_w[\mathbf{x}(t)] - \mathbf{M}_w, \\
\mathbf{r}[\boldsymbol{\xi}(t)] &= (\alpha_y x(t) + \beta y, \beta x(t) + \alpha_x y), \quad S_{zA}[\mathbf{x}(t)] = \sqrt{S_A^2 - S^2[\mathbf{x}(t)]}, \\
S_A &= \alpha c/c_A, \quad A = L, T, \quad S_z[\mathbf{x}(t)] = \alpha z/R_w[\mathbf{x}(t)], \\
\mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{i}_z z, \quad \boldsymbol{\xi}(t) = (x(t), y), \quad x(t) = x - v_1(t)t, \\
\alpha_x &= 1 - M_{wx}^2, \quad \alpha_y = 1 - M_{wy}^2, \quad \alpha = 1 - M_w^2, \quad \beta = 2M_{wx}M_{wy}.
\end{aligned}$$

Тут $R_s[\mathbf{x}(t)]$ – коефіцієнт відбиття звукової хвилі від поверхні пружного півпростору. Зауважимо, що формула (14) одержана точно, а формула (15) – наближено за допомогою методу стаціонарної фази [4] без урахування малого внеску від поверхневої хвилі типу Релея.

Для обчислення інтегралів у формулах (14) і (15) використаємо властивості функції Дірака [2]:

$$\delta\{f[\mathbf{x}(t'), t - t']\} = \sum_j \frac{\delta(t' - t_j)}{\left| \frac{df[\mathbf{x}(t'), t - t']}{dt'} \right|_{t'=t_j[\mathbf{x}(t), t]}}, \quad (16)$$

$$\int_a^b g(t') \delta(t - t') dx' = g(t)[H(t - a) - H(t - b)], \quad (17)$$

де $t_j[\mathbf{x}(t), t]$, $j = 1, 2, \dots$, – корені рівняння $f[\mathbf{x}(t'), t - t'] = 0$. Після деяких перетворень рівняння для знаходження коренів запишемо у вигляді

$$f_0(\tau) = 1 + d_1[\mathbf{x}(t), t]\tau + \{d_2[\mathbf{x}(t), t] - 1\}\tau^2 + d_3[\mathbf{x}(t), t]\tau^3 + d_4[\mathbf{x}(t), t]\tau^4 = 0, \quad (18)$$

де

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{c(t - t')\sqrt{\alpha_y}}{R[\mathbf{x}(t)]}, \quad R[\mathbf{x}(t)] = \sqrt{x^2(t) + y^2 + z^2}, \\
d_1[\mathbf{x}(t), t] &= \frac{2}{\sqrt{\alpha_y} R[\mathbf{x}(t)]} [M_0 a(t)x(t) - M_{wy}y], \\
d_2[\mathbf{x}(t), t] &= \frac{M_0}{\alpha_y} \left[M_0 a^2(t) - \frac{2a_0 x(t)}{c} \right], \\
d_3[\mathbf{x}(t), t] &= \frac{2M_0^2 a_0 a(t) R[\mathbf{x}(t)]}{c\sqrt{\alpha_y^3}}, \\
d_4[\mathbf{x}(t), t] &= \frac{\{M_0 a_0 R[\mathbf{x}(t)]\}^2}{c\alpha_y^2},
\end{aligned}$$

$$M_0 = v_0/c, \quad a(t) = -(1 + a_0 t) + v_{wx}/v_0, \quad a_0 = w_0/v_0.$$

Точне розв'язання алгебраїчного рівняння 4-го порядку (18) є досить громіздким, тому скористаємось наближеним методом розв'язування, використовуючи той факт, що число Маха M_0 руху звукового джерела є малою величиною. Для цього застосуємо метод Ньютонa, вибравши за стартове значення кореня величину $\tau = 1$, що відповідає хвилі, розбіжній від джерела звуку. В результаті одержимо один (фізичний) наближений розв'язок:

$$\tau_1[\mathbf{x}(t), t] \approx 1 - \frac{f_0(1)}{f_0'(1)} = 1 + \frac{\sum_{m=1}^4 d_m[\mathbf{x}(t), t]}{2 - \sum_{m=1}^4 m d_m[\mathbf{x}(t), t]}, \quad (19)$$

причому

$$0 \leq t_1[\mathbf{x}(t), t] = t - \frac{R[\mathbf{x}(t)]}{c\sqrt{\alpha_y}} \tau_1[\mathbf{x}(t), t] \leq t_0. \quad (20)$$

Оминаючи проміжні перетворення за формулами (14), (15) з використанням (16), (17) і (20), одержимо

$$P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\langle -i\Omega\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t]\}\rangle}{\tilde{R}_w[\mathbf{x}(t), t]} \times \\ \times \langle H\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t]\} - H\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t] - t_0\}\rangle \Big|_{z \rightarrow z - z_0}, \quad (21)$$

$$P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \frac{\exp\langle -i\Omega\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t]\}\rangle}{\tilde{R}_w[\mathbf{x}(t), t]} \times \\ \times R_s[\mathbf{x}(t)] \langle H\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t]\} - H\{t - t_1[\mathbf{x}(t), t] - t_0\}\rangle \Big|_{z \rightarrow z + z_0}, \quad (22)$$

де

$$\tilde{R}_w[\mathbf{x}(t), t] = M_{wx}(t)x(t) + M_{wy}y + c\{\alpha(t) + 2M_0a_0x(t)/c\}t_1[\mathbf{x}(t), t] - \\ - 3M_0M_{wx}(t)a_0t_1^2[\mathbf{x}(t), t] - 2(M_0a_0)^2t_1^3[\mathbf{x}(t), t], \\ \alpha(t) = \alpha_y - M_{wx}^2(t), \quad M_{wx}(t) = M_{wx} - M_0(1 + 2a_0t).$$

Тоді на основі формул (10), (11), (21) і (22) після застосування операторів ∇ і $\tilde{\nabla}$ одержимо

$$p_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_0 K \cdot \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z - z_0, t] P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t), \quad (23)$$

$$p_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_0 K \cdot \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z + z_0, t] P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t), \quad (24)$$

де

$$\Phi[\mathbf{x}(t), t] = \Phi_0[\mathbf{x}(t), t] \left\{ 1 + \frac{i}{K\tilde{R}_w[\mathbf{x}(t), t]} [\alpha(t) + 2M_0a_0x(t)/c - \\ - 6M_0M_{wx}(t)a_0t_1[\mathbf{x}(t), t] - 6M_0^2a_0^2t_1^2[\mathbf{x}(t), t]] \right\} + \\ + \frac{i}{K\tilde{R}_w[\mathbf{x}(t), t]} \langle \{M_{wx}(t) + 2M_0a_0t_1[\mathbf{x}(t), t]\} \mathbf{i}_x + M_{wy} \mathbf{i}_y \rangle, \\ \Phi_0[\mathbf{x}(t), t] = -\langle \mathbf{x}(t) + M_0\{a(t) - a_0t_1[\mathbf{x}(t), t]\} \mathbf{i}_x - M_{wy} \mathbf{i}_y \rangle \times \\ \times ct_1[\mathbf{x}(t), t] / \Delta[\mathbf{x}(t), t], \\ \Delta[\mathbf{x}(t), t] = M_0a(t)x(t) - M_{wx}y + [M_0^2a^2(t) - 2M_0a_0x(t)/c - \alpha_y] ct_1[\mathbf{x}(t), t] + \\ + 3M_0^2a_0a(t)ct_1^2[\mathbf{x}(t), t] + 2M_0^2a_0^2ct_1^2[\mathbf{x}(t), t], \quad K = \Omega/c. \quad (25)$$

Використовуючи формули (23) і (24), одержуємо сумарну комплексну амплітуду акустичного тиску:

$$p_{\text{tot}}(\mathbf{x}, t) \equiv p_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t). \quad (26)$$

3. Числовий аналіз розподілу акустичного поля для випадку декількох джерел звуку. Виконаємо математичне моделювання випроміненого шуму у випадку шестимоторного літака. Для цього формулу для сумарного акустичного тиску запишемо у вигляді

$$p_{6,\text{tot}}(\mathbf{x}, t) = p_{\text{tot},r}(\mathbf{x}, t) + p_{\text{tot},\ell}(\mathbf{x}, t), \quad (27)$$

де $p_{\text{tot},r}(\mathbf{x}, t)$ і $p_{\text{tot},\ell}(\mathbf{x}, t)$ – акустичні тиски, збудені правими і лівими двигунами літака відповідно, причому

$$p_{\text{rad},r}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_{0,r}K \cdot \sum_{n=1}^3 \{ \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z, t] P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) \} \Big|_{x \rightarrow x-x_n, y \rightarrow y+y_n, z \rightarrow z-z_n}, \quad (28)$$

$$p_{\text{ref},r}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_{0,r}K \cdot \sum_{n=1}^3 \{ \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z, t] P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) \} \Big|_{x \rightarrow x-x_n, y \rightarrow y+y_n, z \rightarrow z+z_n}, \quad (29)$$

$$p_{\text{rad},\ell}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_{0,\ell}K \cdot \sum_{n=1}^3 \{ \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z] P_{\text{rad}}(\mathbf{x}, t) \} \Big|_{x \rightarrow x-x_n, y \rightarrow y-y_n, z \rightarrow z-z_n}, \quad (30)$$

$$p_{\text{ref},\ell}(\mathbf{x}, t) = i\mathbf{F}_{0,\ell}K \cdot \sum_{n=1}^3 \{ \Phi[\boldsymbol{\xi}(t), z] P_{\text{ref}}(\mathbf{x}, t) \} \Big|_{x \rightarrow x-x_n, y \rightarrow y-y_n, z \rightarrow z+z_n}, \quad (31)$$

де також припускаємо, що

$$\mathbf{F}_{0,r} = (F_{0x}, -F_{0y}, F_{0z}), \quad \mathbf{F}_{0,\ell} = (F_{0x}, F_{0y}, F_{0z}). \quad (32)$$

У формулах (28)–(31) $x_n, y_n, z_n, n = 1, 2, 3$, – координати точкових джерел звуку, якими замінено двигуни, в початковий момент часу $t = 0$.

Аналіз акустичного тиску виконаємо на основі формул (23)–(32). Припустимо, що компоненти векторних сил із формул (32) такі, що

$$F_{0x} = F_{0y} = F_{0z} = F_0.$$

Можна показати, що

$$F_0 K = 8\pi \cdot 10^{(I_0/20)-5},$$

де I_0 – інтенсивність шуму окремого авіаційного двигуна на віддалі 1 м.

Для розрахунків виберемо $I_0 = 120$ дБ, що з певним наближенням відповідає турбореактивним двигунам типу Д-18Г – «Мотор Січ» літака Ан-225 («Мрія» – кодова назва НАТО «Cossack»). Аналогічно, за основну частоту коливань двигунів з широкого частотного спектру виберемо ту, на якій амплітуди коливань є найбільшими [3, 9]. У цьому випадку покладаємо $\Omega = 6$ кГц. Геометричні параметри джерел вибираємо такими (в метрах)*: $x_1 = 9.2, x_2 = 4.0, x_3 = 0; y_1 = 9.5, y_2 = 17.3, y_3 = 24.5; z_1 = 4.8, z_2 = 4.3, z_3 = 4.0$.

Літак рухається у повітрі, густина якого $\rho = 1293$ кг/м³ і швидкість звуку $c = 331$ м/с, по злітній смузі, покритій бетоном, для якого на основі роботи [16] можна одержати густину матеріалу $\rho_s = 2617$ кг/м³, швидкості поздовжніх і поперечних хвиль $c_L = 4377$ м/с і $c_T = 2413$ м/с відповідно.

Обчислення виконаємо, припускаючи, що точки спостереження розміщені на висоті $z = 10$ м від поверхні землі.

Швидкість розбігу в момент часу $t = 0$, який вибираємо за початковий, дорівнює $v_0 = 20$ км/год, а в момент закінчення розбігу $v_2 = 300$ км/год. Якщо вважати, що довжина розбігу з прискоренням $w_0 = 2.16$ м/с² дорівнює $x_0 = 3000$ м**, то тривалість руху літака по злітній смузі складатиме $t_0 = 36$ с.

* <http://mil.in.ua/produksiya/bagatotsilovyy-transportnyy-litak-an-225-mriya>.

** На випробовуваннях довжина пробігу Ан-225 бувала й значно меншою – близько 950 м (див.: kvs-vm.narod.ru/statii/an-225.html).

На рис. 1 зображено сигнал у вигляді повного (випроміненого і відбитого) акустичного тиску $p(t) = \text{Re}(p_{6,\text{tot}})$ (в Паскалях), обчисленого у точці $x = 1500$ м, $y = -450$ м на згаданій вище висоті $z = 10$ м в часовому інтервалі, що відповідає часу спостереження розбігу літака. Вплив вітру тут не враховано.

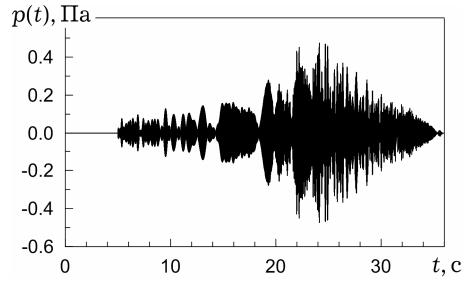


Рис. 1

З цього рисунка можна зауважити, що структура сигналу суттєво неоднорідна: він фактично складається з декількох квазімонохроматичних сигналів різної амплітуди і частоти, що є наслідком суперпозиції звукових хвиль, випромінених точковими джерелами і відбитими від бетонної основи, і ефекту Доплера. Розрахунки за формулою (7) при $x_0 \rightarrow x$ і $t_0 \rightarrow t$ показують, що літак перетинатиме площину $x = 1500$ м, $0 \leq |y| < \infty$, $z = 10$ м у момент $t = 25.1$ с. З графіка також видно, що при пробігу літака в моменті часу, коли він знаходиться найближче до точки спостереження, амплітуда сигналу є найбільшою, порядку 0.5 Па. Різка поява і зникнення сигналу на початку і наприкінці хвильового пакету відповідає моментам набігання до точки спостереження переднього і заднього фронтів хвилі для меншого і більшого значення часу відповідно.

Рис. 2 і рис. 3 ілюструють вплив вітру на цей акустичний сигнал, що моделюється у тій самій точці спостереження. При цьому на рис. 2 зображено залежність акустичного тиску у цій точці від зміни швидкості вітру при $v_w = 20, 40, 60, 80$ км/год за умови сталого напрямку вітру (вибрано $\theta_w = 180^\circ$). Графіки на рис. 3 ілюструють залежність цього акустичного тиску від зміни напрямку вітру (вибрано $\theta_w = 180^\circ, 150^\circ, 120^\circ, 90^\circ$) при швидкості вітру $v_w = 40$ км/год.

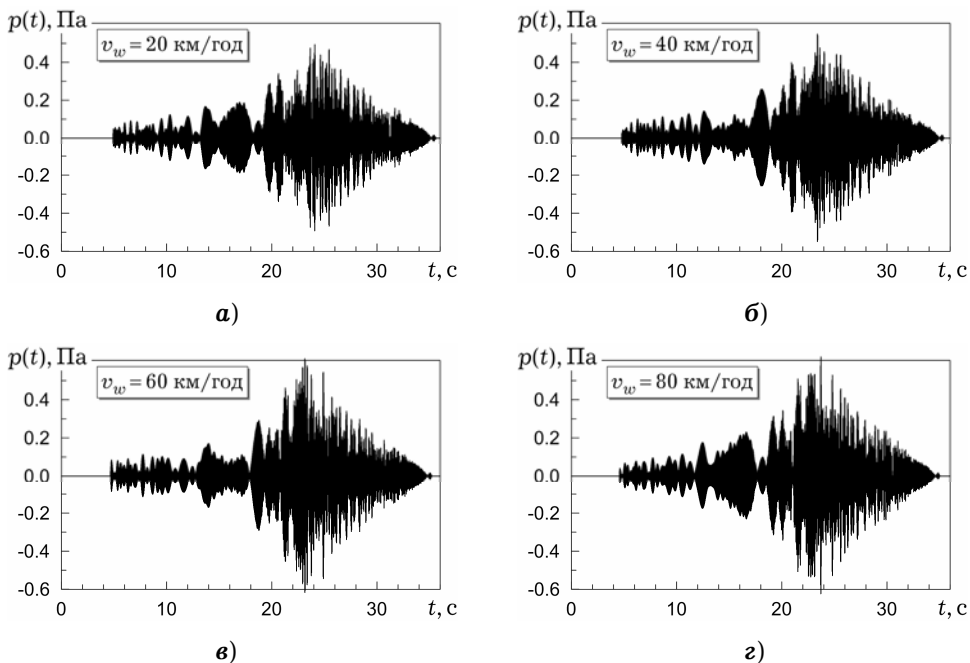


Рис. 2

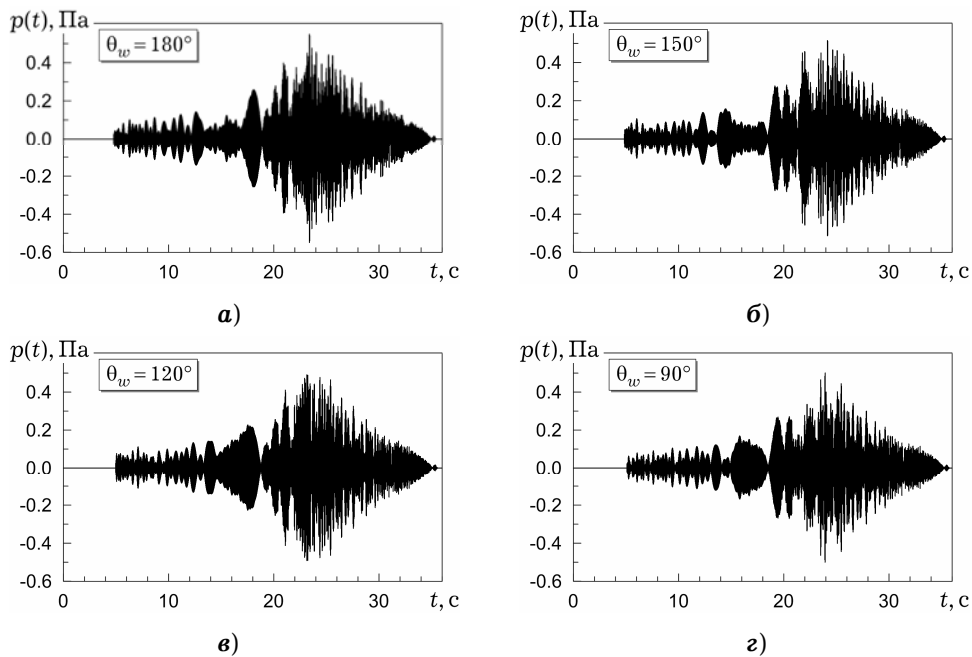


Рис. 3

Обчислення показують, що зміни швидкості і напрямку вітру значно впливають на структуру сигналу і його амплітуду. При цьому максимальна амплітуда сигналу в момент проходження літака біля точки спостереження збільшується зі збільшенням швидкості зустрічного вітру. При сталій швидкості вітру (в розглядуваному випадку $v_w = 40$ км/год) амплітуда сигналу є найбільшою при прямому зустрічному вітрі ($\theta_w = 180^\circ$).

Структура досліджуваного сигналу стає більш виразною, якщо обчислити енергетичну акустичну характеристику – рівень акустичного тиску

$$I(\mathbf{x}, t) = 20 \lg \left(\frac{|p_{6,\text{tot}}(\mathbf{x}, t)|}{p_0} \right), \quad (33)$$

де $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ Па – порогове значення акустичного тиску.

На рис. 4 показано зміну в часі цієї характеристики, обчисленої у тій же точці спостереження, що й амплітуди акустичного тиску. Розрахунки виконано без урахування впливу вітру. На графіку бачимо, що рівень акустичного тиску від літака, що наближається до точки спостереження, характеризується значною змінністю його амплітуди з максимальними значеннями понад 85 дБ. При віддаленні літака від цієї точки середня амплітуда сигналу поступово зменшується (від 80 до 70 дБ), але структура його має значний коливний характер.

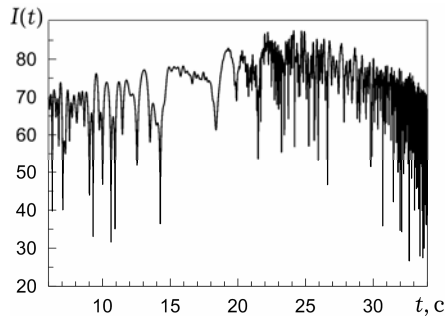


Рис. 4

Більш детально вплив параметрів вітру на рівень акустичного тиску можна зауважити, фіксуючи певні моменти часу. Обчислення виконано для точок спостереження, розташованих паралельно до руху літака на віддалі $y = -450$ м і висоті $z = 10$ м у момент часу $t = 25.1$ с, тобто, коли найближче джерело звуку (правий крайній двигун літака) міститься в точці $x = (v_0 + w_0 t) = 1500$ м, $y_3 = -25.5$ м, $z_3 = 4.0$ м.

На рис. 5 зображено залежність рівня акустичного тиску в точках спостереження від швидкості вітру в межах від 0 до 120 км/год при вітрі, спрямованому проти руху джерел звуку ($\theta_w = 180^\circ$). На рис. 6 подано подібну характеристику, але при цьому вітер має незмінну швидкість $v_w = 60$ км/год, а його напрям змінюється з лівого крила літака на праве. Як бачимо, вплив параметрів вітру на випромінюваний сигнал характеризується значною динамічністю.

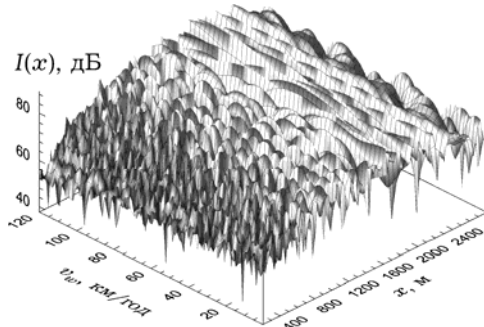


Рис. 5

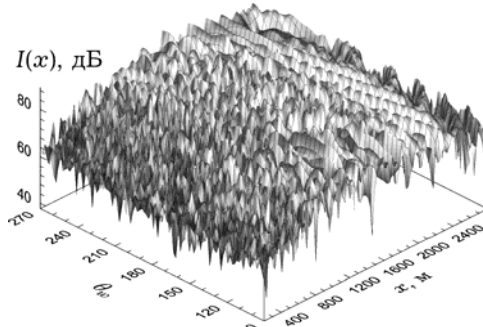


Рис. 6

Просторовий розподіл рівня акустичного тиску $I(x, y)$, обчисленого за формулою (33) для того ж моменту часу $t = 25.1$ с, ілюструє рис. 7. Миттєва швидкість літака у цей час дорівнює $v_1 = 215.2$ км/год. З обчислень, виконаних за умови відсутності вітру, випливає, що випромінювання звуку має локальний характер з високим рівнем акустичного тиску (понад 115 дБ) у безпосередній близькості від рухомого повітряного корабля. На рисунку помітні характерні скошені фазові фронти змінної інтенсивності шуму, що розбігаються від центральної частини підвищеного рівня акустичного тиску.

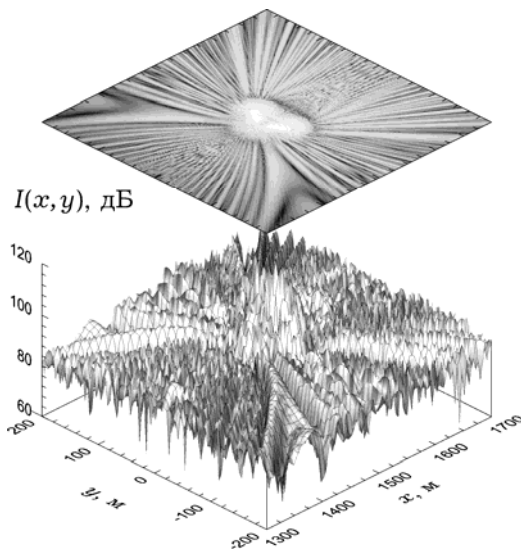
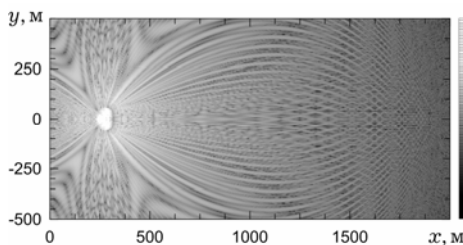
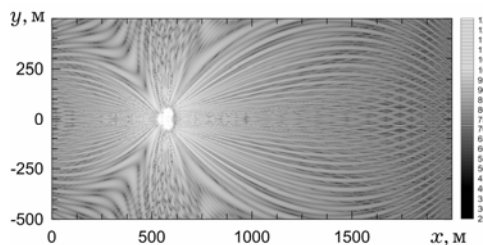


Рис. 7

На рис. 8 зображено результати обчислень тиску $I(x, y)$ при $t = 10, 15, 20, 25$ с, що відповідає перебуванню джерел звуку на осі розбігу літака приблизно в точках $x = 271, 569, 975, 1489$ м. З цих ілюстрацій видно, що в площині, паралельній до поверхні землі, літак має вигляд акустичної антени з характеристикою напрямленості у вигляді чотирьох пелюсток.



а) $t = 10$ с



б) $t = 15$ с

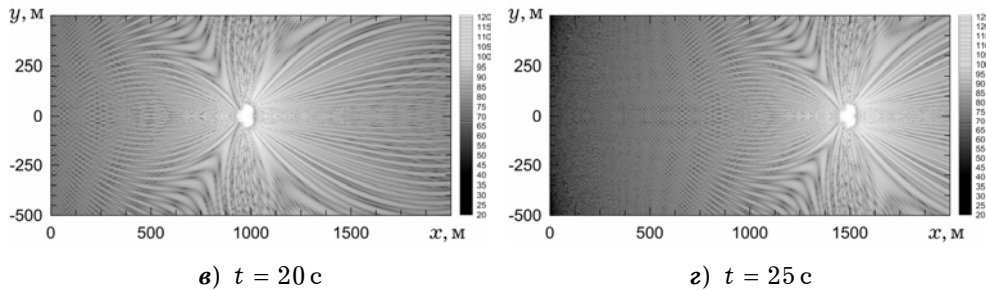


Рис. 8

4. Висновки. Одержано аналітичні співвідношення для опису поширення звуку від точкового джерела, яке рухається в акустичному рухомому середовищі зі сталим прискоренням паралельно до поверхні поділу акустичного і пружного півпросторів. На основі принципу суперпозиції задачу узагальнено на випадок декількох точкових джерел, якими моделюємо двигуни літака під час його розбігу на летовищі. Як приклад розглянуто поширення звукових імпульсів від шестимоторного транспортного турбореактивного літака типу Ан-225 «Мрія».

З проведеного числового аналізу випливає, що підвищений рівень акустичного тиску (понад 100 дБ), випромінюваний літаком, скупчується переважно безпосереднього біля цього рухомого об'єкту. Поверхню амплітуди рівня акустичного тиску геометрично можна окреслити півкулею з радіусом приблизно 50 м. При цьому амплітуда спадає від 120 дБ на вершині кулі до 80 дБ на периферії. Зовні цієї області внаслідок суперпозиції хвиль, випромінених від шести точкових джерел і відбитих від злітної смуги у вигляді бетонної поверхні, акустичне поле має складний характер з неоднаковим рівнем акустичного тиску у різних напрямках.

Дослідження показали, що на достатній віддалі від двигунів літака акустичне поле має виразні чотири бічні фронти підвищеної амплітуди (порядку 80 дБ). Тому сигнали, які спостерігаються на певній віддалі від осі старту, мають вигляд декількох поєднаних між собою квазімонохроматичних сигналів різної частоти (наслідок ефекту Доплера) і амплітуди. З числового аналізу також видно, що на віддалі 500 м від осі злітної смуги під час розбігу літака рівень акустичного тиску коливається від 90 до 75 дБ.

Запропоноване моделювання може бути кроком до наступних досліджень такого типу з метою опрацювання методики побудови динамічних карт акустичного шуму поблизу злітних смуг для літаків різних типів, розробки рекомендацій для виконання вимірювань і редукції рівня авіаційного шуму з метою зниження його шкідливого впливу на оточуюче середовище і людей.

Автори присвячують цю роботу світлій пам'яті професора Ярослава Романовича Дашкевича, якому належить ідея проведення такого дослідження.

1. Бреховских Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. – Москва: Наука, 1989. – 415 с.
2. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – Москва: Мир, 1978. – 520 с.
3. Самохин В. Ф. Шум ГТД. Введение в авиационную акустику. – Москва: Моск. авиац. ин-т, 2007. – 152 с. – (gendocs.ru/v148/?download=1)
4. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. – Москва: Мир, 1978. – Т. 1. – 548 с.
5. Abdallah L., Haddou M., Khardi S. Optimization of operational aircraft parameters reducing noise emission // Appl. Math. Sci. – 2010. – 4, No. 9-12. – P. 515-535.
6. Achenbach J. D. Wave propagation in elastic solids. – Amsterdam-London: North-Holland Publ. Co.; New York: Amer. Elsevier Publ. Co., 1973. – 425 p.
7. Arafat M. H., Osman T. A., Abdel-Latif I. A. Noise assessment and mitigation schemes for Hurgada airport // Appl. Acoust. – 2007. – 68, No. 11-12. – P. 1373-1385.

8. *Brouwer H. H., Rienstra S. W.* Aeroacoustics research in Europe: The CEAS-ASC report on 2007 highlights // *J. Sound Vib.* – 2008. – **318**, No. 4-5. – P. 625–654.
9. *Cawthorn J. M., Morris G. J., Hayes C.* Measurement of performance, inlet flow characteristics, and radiated noise for a turbojet engine having choked inlet flow // NASA TN D-3929; Langley Research Center Langley Station, Hampton, Va. – Washington, D.C., 1967. – 43 p. – ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=19670015731.
10. *Eriksson Ch., Bluhm G., Hilding A., Östenson C.-G., Pershagen G.* Aircraft noise and incidence of hypertension – Gender specific effects // *Environmental Res.* – 2010. – **110**, No. 8. – P. 764–772.
11. *Khaldi S.* Aircraft flight path optimization: The Hamilton–Jacobi–Bellman considerations // *Appl. Math. Sci.* – 2012. – **6**, No. 25-28. – P. 1221–1249.
12. *Makarewicz R., Golebiewski R.* Aircraft noise propagation – the simplest case // *Arch. Acoust.* – 2002. – **27**, No. 2. – P. 109–116.
13. *Neise W., Enghardt L.* Technology approach to aero engine noise reduction // *Aerospace Sci. and Technol.* – 2003. – **7**, No. 5. – P. 352–363.
14. *Piddubniak O., Piddubniak N.* Sound radiation from a roundabout // *Arch. Acoust.* – 2010. – **35**, No. 3. – P. 437–456.
15. *Piddubniak O., Piddubniak N., Teodorczyk T., Abramczyk J.* Radiation of roadway noise in windy conditions // *Direct and Inverse Problems of Electromagnetic and Acoustic Wave Theory: Proc. XIVth Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 21–24, 2009.* – Lviv, 2009. – P. 243–250.
16. *Qixian L., Bungey J. H.* Using compression wave ultrasonic transducers to measure the velocity of surface waves and hence determine dynamic modulus of elasticity for concrete // *Constr. Build. Mater.* – 1996. – **10**, No. 4. – P. 237–242.
17. *Raghunathan S., Kim H. D., Setoguchi T.* Impulse noise and its control // *Prog. Aerosp. Sci.* – 1998. – **34**, No. 1-2. – P. 1–44.
18. *Rajpert T.* Hałas lotniczy i sposoby jego zwalczania. – Warszawa: Wyd-wa Komunikacji i Łączności, 1980. – 387 s.
19. *Zaporozhets O. I., Tokarev V. I.* Aircraft noise modeling for environmental assessment around airports // *Appl. Acoust.* – 1998. – **55**, No. 2. – P. 99–127.
20. *Zaporozhets O., Tokarev V., Attenborough K.* Predicting noise from aircraft operated on the ground // *Appl. Acoust.* – 2003. – **64**, No. 10. – P. 941–953.

ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА САМОЛЕТОМ ВО ВРЕМЯ РАЗБЕГА ПО ВЗЛЕТНОЙ ПОЛОСЕ

Рассматривается задача излучения звука самолетом во время старта на стадии его разбега по взлетной полосе аэродрома в условиях действия ветра. Носителями звука являются авиационные двигатели, которые моделируются в задаче точечными источниками, передвигающимися в воздухе с постоянным ускорением параллельно к плоской поверхности раздела акустического и упругого твердого полупространств. Решение задачи получено с помощью интегрального преобразования Фурье по времени и пространственным координатам, а также метода стационарной фазы. Выполнен численный анализ пространственно-временных распределений звукового давления и уровней звукового давления для случая разбега шестимоторного самолета типа Ан-225 «Мрия».

SOUND RADIATION FROM AIRCRAFT DURING TAKE-OFF RUN ON RUNWAY

The problem of sound radiation from airplane during start on runway of aerodrome in wind action conditions is considered. The carriers of sound are aircraft engines, which are modeled by point sources moving in air with constant acceleration parallel to the plane interface between acoustic and solid elastic half-spaces. The solution of the problem is obtained using the integral Fourier transforms over time and space coordinates, and also stationary phase method. The numerical analysis of spatial-time distributions of sound pressure and sound pressure levels is carried out for the case of start of six-engine airplane of An-225 «Mriya» type.

Політехніка Лодзька, Лодзь, Польща,
Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
28.06.12