

ДОСЛІДЖЕННЯ ВПЛИВУ ПЛАСТИЧНОСТІ МАТЕРІАЛІВ НА МІЦНІСТЬ КОМПОЗИТНОГО З'ЄДНАННЯ

В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гопфа виконано розрахунок зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу двох різних матеріалів, один з яких є пластичним. Зона моделюється бічним відрізком розриву дотичного переміщення і відрізком розриву нормального переміщення на межі розділу. Досліджено вплив утворення пластичної зони на умови зрушення тріщини.

Експериментальні дослідження тріщин свідчать про складну структуру матеріалу поблизу кінця тріщини, зокрема, про наявність в околі вершини розвиненої пластичної зони і значно меншої від неї за розмірами зони передруйнування (process zone) [6–8]. Аналітичних моделей, що враховують одночасне існування обох зон, мало. У ряді робіт [3–5, 11] в ході розв'язання деяких симетричних задач механіки руйнування запропонована модель «тризубець», яка передбачає розвиток зони передруйнування в два етапи. На першому етапі з вершини тріщини під деяким кутом до її початкового напрямку симетрично поширюються дві вузькі пластичні смуги, що моделювалися відрізками розриву дотичного переміщення. Оскільки їх поява не знімає концентрацію напружень в околі вершини, то на наступному етапі відбувається утворення на продовженні тріщини зони передруйнування, що моделювалась відрізком розриву нормального переміщення.

У пропонованій роботі здійснено розрахунок початкової зони передруйнування в умовах плоскої деформації в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки ламаної межі розділу двох матеріалів, один з яких є пружнопластичним, інший – пружним. Поставлене завдання зведено до розв'язання двох задач. У першій виконано розрахунок вузької пластичної смуги, яка поширюється у пластичному матеріалі з вершини тріщини під кутом до межі розділу. У другій розв'язано задачу про зону передруйнування, що виникає на межі розділу після утворення бічної пластичної смуги. Отримані результати порівнюються з результатами розв'язання задачі про міжфазну зону передруйнування без урахування пластичності матеріалів композиту [1]. Зауважимо, що вплив пластичності матеріалів на міжфазну міцність у випадку тріщини на плоскій межі розділу матеріалів присвячена досить численна кількість досліджень, у тому числі за останнє десятиліття [12–16].

Розрахунок бічної пластичної смуги. В умовах плоскої деформації розглянемо задачу про розрахунок початкової пластичної зони в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу двох однорідних ізотропних середовищ з модулями Юнга E_1, E_2 і коефіцієнтами Пуассона ν_1, ν_2 . Припускаємо, що лише перший матеріал є пружнопластичним, тому в ньому відповідно з гіпотезою локалізації [10] при невеликих навантаженнях передбачається виникнення вузької смуги пластичності, що поширюватиметься з вершини тріщини під кутом β до межі розділу. Використовуючи модель Леонова – Панасюка – Дагдейла, пластичну смугу моделюватимемо розрізом, на якому діє сталє дотичне напруження τ_1 . На розрізі допускається стрибок лише дотичної складової переміщення. Довжина лінії розриву ℓ та її орієнтація визначаються в ході розв'язання задачі.

На початковому етапі розвитку довжина ℓ пластичної зони-смуги значно менша від довжини L тріщини та всіх інших розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною, що складається з двох клинів з межею розділу у формі сторін кута, з вершини якого в перший

матеріал виходить лінія розриву скінченної довжини, а вздовж однієї зі сторін – півнескінченна тріщина (рис. 1).

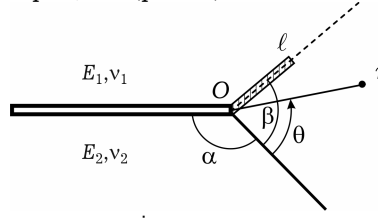


Рис. 1. Розрахункова схема задачі про визначення початкової пластичної зони.

Граничні умови на нескінченності визначаються асимптотичним розв'язком в околі кутової точки аналогічної задачі без лінії розриву, що відповідає кореням її характеристичного рівняння λ_i , дійсні частини яких містяться в інтервалі $(-1, 0)$. Характеристичне рівняння має вигляд [1]

$$D(\lambda) = 0, \quad (1)$$

де

$$D(\lambda) \equiv -(1 + \alpha_1)^2 t_1 - 4(1 + \alpha_1)(e - 1)t_1 t_2 - e^2(1 + \alpha_2)^2 t_3 + 4(e - 1)^2 t_1 t_3 + \\ + 4e(1 + \alpha_2)(e - 1)t_3 t_4 + 2e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1)t_5,$$

$$t_1 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \quad t_2 = \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$t_3 = (\lambda + 1)^2 \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)(2\pi - \alpha), \quad t_4 = \sin^2(\lambda + 1)\alpha,$$

$$t_5 = t_1 + \sin(\lambda + 1)\alpha \sin 2\lambda\pi \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha),$$

$$e = \frac{1 + \nu_2}{1 + \nu_1} \cdot \frac{E_1}{E_2}, \quad \alpha_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)}.$$

Коренів рівняння (1) в інтервалі $(-1, 0)$ може бути декілька, у тому числі можливі й два комплексно-спряжених [1], яким відповідають фізично некоректні просторові осциляції напружень і зміщень при наближенні до вершини кута. Нижче приймаємо, що $\text{Re } \lambda_1 \leq \text{Re } \lambda_2 < \lambda_3$.

Припускаючи, що береги тріщини вільні від навантаження, з урахуванням моделювання пластичної смуги відрізком розриву дотичного переміщення приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \theta = -\alpha : \quad & \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 2\pi - \alpha : \quad & \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 0 : \quad & \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = \langle u_\theta \rangle = 0, \\ \theta = \beta : \quad & \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \\ \theta = \beta, \quad r < \ell : \quad & \tau_{r\theta} = \tau_1, \\ \theta = \beta, \quad r > \ell : \quad & \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \beta, \quad r \rightarrow \infty : \quad & \tau_{r\theta} = \sum_i C_i F(\lambda_i, \beta) r^{\lambda_i} + o(1/r). \end{aligned}$$

Тут $\langle f \rangle$ – стрибок величини f ,

$$F(\lambda, \beta) = \frac{X}{(1 + \alpha_1)\Delta} \{ [e^2(1 + \alpha_2)^2 - e(1 + \alpha_1)(1 + \alpha_2) - 4(e - 1)^2 t_1 - \\ - 4e(1 + \alpha_2)(e - 1)t_3] h_1 + (1 + \alpha_1)[2t_1 h_2 + e(1 + \alpha_2)h_3] \},$$

$$X = \sqrt{\frac{(e + \alpha_1)}{8\pi(1 + e\alpha_2)}},$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= 2(1 + \alpha_1)t_6 - e(1 + \alpha_2)t_7 + 4(e - 1)(\lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \cdot t_8 + \sin \lambda \alpha \cdot t_9), \\
h_1 &= 2\lambda(\lambda + 2) \sin \alpha \sin \beta \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha - \beta) + \\
&\quad + (\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\beta - \\
&\quad - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin \lambda \beta, \\
h_2 &= -2(e - 1)[(\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha + \beta) \sin(\alpha + \beta) + \\
&\quad + 2 \sin[(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) - \beta] \sin(\lambda + 1)\beta] - \\
&\quad - (1 + \alpha_1) \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta), \\
h_3 &= 2t_1 \cos(\lambda + 2)(2\pi - \alpha - \beta) + \\
&\quad + [(\lambda + 2) \sin(\lambda + 2)(\alpha + \beta) - \lambda \sin \lambda(\alpha + \beta)] \sin 2\lambda\pi, \\
t_6 &= \lambda \sin \alpha \cos(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) - \sin \lambda \alpha \cos 2\lambda\pi, \\
t_7 &= (\lambda + 2) \sin \lambda(2\pi - \alpha) - \lambda \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha), \\
t_8 &= (\lambda + 2) \sin^2 \alpha - \sin^2(\lambda + 1)\alpha, \\
t_9 &= (\lambda + 2) \sin(\lambda + 1)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 1)\alpha - \sin(\lambda + 2)(2\pi - \alpha) \sin(\lambda + 2)\alpha.
\end{aligned}$$

Гранична умова на нескінченності містить довільні сталі C_i , які характеризують інтенсивність зовнішнього силового поля і які вважаємо заданими за умовою задачі.

При розв'язанні задачі використовуємо асимптотику $\tau_{r\theta}(r, \beta) \sim \frac{k_{II}}{\sqrt{2\pi(r - \ell)}}$

при $r \rightarrow \ell + 0$ (k_{II} – коефіцієнт інтенсивності напружень у вершині пластичної смуги), яка впливає з асимптотичного розв'язку однорідної задачі теорії пружності для півнескінченної прямої лінії розриву дотичного переміщення в однорідному матеріалі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі отримуємо методом Вінера – Гопфа у поєднанні з апаратом інтегрального перетворення Мелліна аналогічно до розв'язання задачі про бічну пластичну смугу в кінці тріщини на плоскій межі розділу двох різних середовищ [2]. З нього знаходимо трансцендентні рівняння для визначення відносної довжини пластичної смуги $x = \ell/L$. Напрямо поширення смуги шукаємо з умови максимуму її довжини. Залежно від наявних коренів характеристичного рівняння (1) у смугі $-1 < \operatorname{Re} \lambda < 0$ маємо:

а) якщо характеристичне рівняння має два або три дійсні корені, то йому відповідає рівняння для x вигляду

$$\sum_{i=1}^3 n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) x^{\lambda_i} = \frac{2}{\tau \sqrt{\pi} I(0, \beta)}, \quad (2)$$

де

$$n_i = \frac{C_i L^{\lambda_i}}{C_1 L^{\lambda_1}}, \quad \tau = \frac{C_1 L^{\lambda_1}}{\tau_1};$$

б) якщо ж характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені ($\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $C_1 = \bar{C}_2 = (K_I + iK_{II})/\sqrt{2\pi} L^{i \operatorname{Im} \lambda_1}$) і один або жодного дійсного кореня, то рівняння для x набуває вигляду

$$x^{\operatorname{Re} \lambda_1} \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 \cdot \ln x + \varphi + \psi + \xi) + n_3 M x^{\lambda_3} = \frac{S}{\tau}, \quad (3)$$

де

$$\varphi = \arg(F(\lambda_1, \beta)), \quad \xi = \arg N(\lambda_1, \beta), \quad \psi = \arctg n,$$

$$n = \frac{K_{II}}{K_I}, \quad \tau = \frac{|K| L^{\operatorname{Re} \lambda_1}}{\sqrt{2\pi} \tau_1}, \quad n_3 = \frac{\sqrt{2\pi} C_3}{|K|} \frac{L^{\lambda_3}}{L^{\operatorname{Re} \lambda_1}},$$

$$M = \frac{F(\lambda_3, \beta) N(\lambda_3, \beta)}{2|F(\lambda_1, \beta)| |N(\lambda_1, \beta)|}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{\pi} |F(\lambda_1, \beta)| |N(\lambda_1, \beta)| I(0, \beta)},$$

$K = K_I + iK_{II}$ – комплексний коефіцієнт інтенсивності напружень, ψ – фазовий кут, який характеризує ступінь змішування мод навантаження. У рівняннях (2) і (3) використано спільні позначення:

$$N(\lambda, \beta) = \frac{\lambda \Gamma(\lambda)}{(\lambda + 0.5) \Gamma(\lambda + 0.5) I(\lambda, \beta)}, \quad I(\lambda, \beta) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G(it, \beta)}{1 + \lambda + it} dt \right],$$

$$G(p, \beta) = \frac{-D_1(p, \beta) \cos p\pi}{D(-1 - p) \sin p\pi},$$

$$D_1(p, \beta) = \Delta_1 \Delta_2 (1 + \alpha_1) (e(1 + \alpha_2) - (1 + \alpha_1)) - (\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_5) (e^2 (1 + \alpha_2)^2 - 4(e-1)^2 \Delta_1 - 4e(e-1)(1 + \alpha_2) \sin^2 p\alpha) - 4(e-1)(1 + \alpha_1) \Delta_1 (\Delta_4 \sin 2p\beta + \Delta_2 \sin^2 p\beta) + e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1) (2\Delta_4 \Delta_6 - \Delta_2 \Delta_7),$$

$$\Delta_1(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \quad \Delta_2(p) = p \sin 2(\alpha + \beta) - \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_3(p) = p^2 \sin^2 \beta - \sin^2 p\beta, \quad \Delta_4(p) = p^2 \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta_5(p) = p \sin 2\beta + \sin 2p\beta,$$

$$\Delta_6(p) = p \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta),$$

$$\Delta_7(p) = p^2 \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta).$$

Тут $\Gamma(z)$ – гамма-функція Ейлера; функція $D(z)$ означена в (1).

На рис. 2 і рис. 3 наведено графіки залежності кута нахилу пластичної смуги від кута зламу межі розділу та від навантаження, величина якого характеризується безрозмірним параметром τ , а конфігурація – множниками n_i і параметром змішування мод n у рівняннях для довжини (2) і (3). При всіх числових розрахунках у статті покладали $E_1/E_2 = 0.25$, $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $n_3 = 0$. Надалі на всіх рисунках з позначеннями **а**) обчислення кривих виконано для випадку дійсних коренів рівняння (1), а на позначених через **б**) – для випадку комплексних коренів рівняння (1).

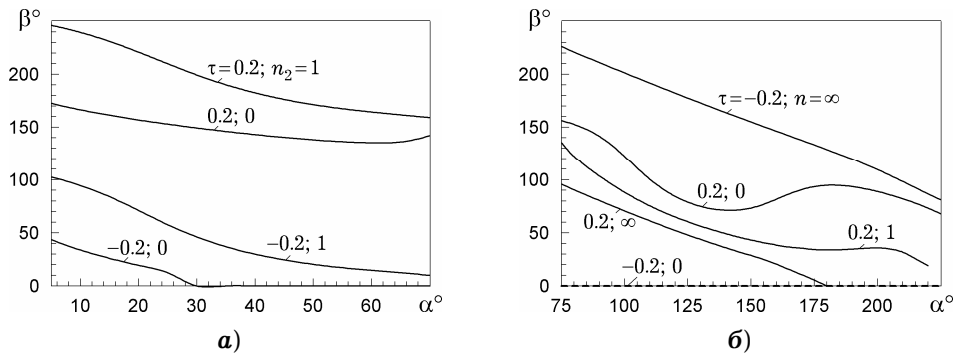


Рис. 2. Залежність кута β нахилу пластичної смуги від кута α зламу межі розділу середовищ.

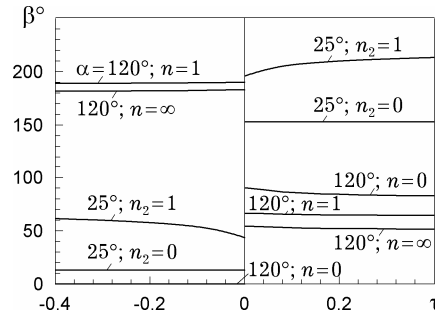


Рис. 3. Залежність кута β нахилу пластичної смуги від безрозмірного параметра навантаження τ .

З розрахунків кута β випливає, що напрям смуги слабо залежить від величини навантаження, проте суттєво залежить від кута зламу межі розділу та конфігурації навантаження. При певних конфігураціях навантаження пластична зона-смуга поширюється уздовж межі розділу середовищ ($\beta = 0^\circ$).

Відповідно до загальних положень про поведінку напружень біля концентраторів після утворення пластичної смуги напруження біля вершини міжфазної тріщини вестимуть себе як $\sum_s f(\theta, \lambda'_s) r^{\lambda'_s}$, де λ'_s – корені рівняння

$D_1(-1 - \lambda'_s, \beta) = 0$ з інтервалу $(-1, 0)$. Оскільки виявляється, що такі корені існують, то це означає збереження концентрації напружень в околі вершини тріщини. Розрахунки коренів (рис. 4) показують, що поява пластичної смуги змінює характер напружено-деформованого стану, зокрема, усуваються просторові осциляції напружень і переміщень і знижується рівень концентрації напружень в околі вершини тріщини ($\lambda'_1 > \text{Re} \lambda_1$). Явний вигляд функцій $f(\theta, \lambda'_s)$ визначається з розв'язку рівняння Вінера – Гопфа задачі оберненим перетворенням Мелліна.

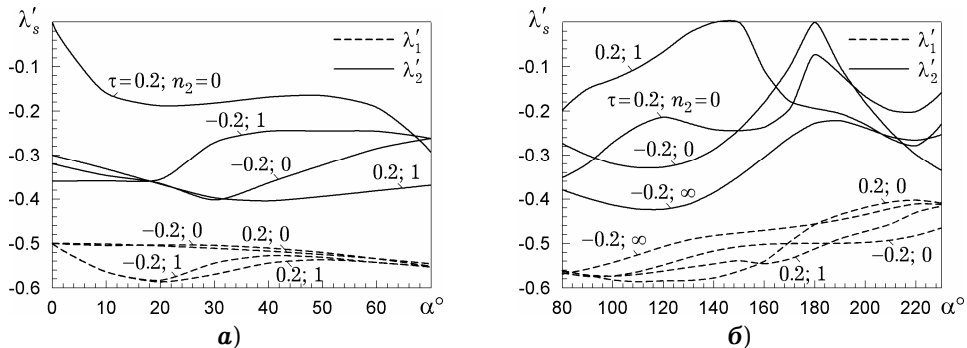


Рис. 4. Залежність показника сингулярності напружень λ'_s від кута α зламу межі розділу середовищ.

Розрахунок вторинної міжфазної зони передруйнування. Збереження концентрації напружень в околі вершини міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу матеріалів означає, що при зростанні навантаження розвиток пластичної зони буде продовжуватись не лише шляхом збільшення геометричних розмірів початкової зони, але й появою нових пластичних смуг або зони передруйнування, які можуть бути розраховані аналогічним способом. За умови недостатньої адгезійної міцності з'єднання матеріалів поширення зони передруйнування можливе по межі їх розділу. У зв'язку з цим вивисимо вплив утворення бічної пластичної смуги на міцність з'єднання композиту, розрахувавши початкову зону передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини, яка поширюється з кутової точки по

межі розділу матеріалів. Використовуючи δ_c -модель [9], зону передруйнування моделюватимемо розрізом, протилежні береги якого притягуються сталими напруженнями σ_0 . На розрізі допускається стрибок лише нормальної складової переміщення, стрибком дотичного переміщення нехтуємо. На початковому етапі розвитку довжина d зони передруйнування значно менша від довжини L тріщини, довжини ℓ пластичної смуги та інших розмірів тіла, тому тіло будемо вважати кусково-однорідною площиною, що складається із двох клинів з межею розділу у формі сторін кута, з вершини якого виходять півнескінченна міжфазна тріщина, півнескінченна лінія розриву дотичного переміщення, нахилена під кутом β до межі розділу, та міжфазна лінія розриву нормального переміщення скінченної довжини d (рис. 5).

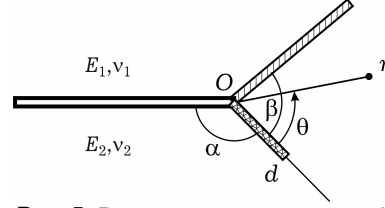


Рис. 5. Розрахункова схема задачі про визначення міжфазної зони передруйнування.

Граничні умови на нескінченності визначаються знайденим на попередньому етапі асимптотичним розв'язком в околі кутової точки аналогічної задачі без міжфазної зони передруйнування. У зв'язку з цим з урахуванням моделювання зони передруйнування відрізком розриву нормального переміщення приходимо до статичної крайової задачі теорії пружності з крайовими умовами:

$$\begin{aligned} \theta = 0 : & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = -\alpha : & \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 2\pi - \alpha : & \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = \beta : & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = 0, \\ \theta = 0, \quad r < d : & \quad \sigma_\theta(r, 0) = \sigma_0, \\ \theta = 0, \quad r > d : & \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \\ \theta = 0, \quad r \rightarrow \infty : & \quad \sigma_\theta = \sum_s C'_s r^{\lambda'_s} + o(1/r), \end{aligned}$$

де C'_s визначається за такими формулами:

а) якщо характеристичне рівняння (1) має два або три дійсні корені λ_i , тоді

$$C'_s = \tau \tau_1 \frac{R(-1 - \lambda'_s, \beta)}{N(\lambda'_s, \beta) L^{\lambda'_s}} \sum_i n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) m(\lambda_i, \lambda'_s) x^{\lambda_i - \lambda'_s};$$

б) якщо характеристичне рівняння має два комплексно спряжені і один або жодного дійсного кореня, то

$$\begin{aligned} C'_s = \tau \tau_1 \frac{R(-1 - \lambda'_s, \beta)}{N(\lambda'_s, \beta) L^{\lambda'_s}} & [2 |F(\lambda_1, \beta)| |N(\lambda_1, \beta)| |m(\lambda_1, \lambda'_s)| x^{\operatorname{Re} \lambda_1 - \lambda'_s} \times \\ & \times \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 \cdot \ln x + \varphi + \xi + \psi + \mu_s) + \\ & + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) m(\lambda_3, \lambda'_s) x^{\lambda_3 - \lambda'_s}], \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} R(p, \beta) &= -\frac{q(p, \beta)}{D'_1(p, \beta)}, \quad m(\lambda_i, \lambda'_s) = \frac{\lambda_i}{\lambda'_s (\lambda_i - \lambda'_s)}, \quad \mu_s = \arg m(\lambda_1, \lambda'_s), \\ q(p, \beta) &= (1 + \alpha_1) \{ (1 + \alpha_1) \Delta_1 [\Delta_2 \sin(p-1)\beta + 2\Delta_8 \cos(p-1)\beta] + (2(e-1)\Delta_1 - \\ & - e(1 + \alpha_2) \Delta_{10}) (2p \sin(\alpha + \beta) \Delta_{11} + 2 \sin p (2\pi - \alpha - \beta) \Delta_{12}) - \\ & - e(1 + \alpha_2) (p-1) \Delta_9 \Delta_{13} \}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_8(p) &= p \sin^2(\alpha + \beta) - \sin^2 p(2\pi - \alpha - \beta), & \Delta_9(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha, \\
\Delta_{10}(p) &= p \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, & \Delta_{11}(p) &= p \cos p\beta \sin \alpha + \sin p\beta \cos \alpha, \\
\Delta_{12}(p) &= p \cos p(2\pi - \alpha) \sin \beta - \sin p(2\pi - \alpha) \cos \beta, \\
\Delta_{13}(p) &= p \sin(\alpha + \beta) \sin p\beta \sin \alpha + \sin p(2\pi - \alpha - \beta) \sin p(2\pi - \alpha) \sin \beta, \\
D'_1(p, \beta) &= (\Delta'_1 \Delta_2 + \Delta_1 \Delta'_2)(e(1 + x_2)(1 + x_1) - (1 + x_1)^2) - (\Delta'_2 \Delta_3 + \Delta_2 \Delta'_3 - \\
&\quad - \Delta'_4 \Delta_5 - \Delta_4 \Delta'_5)(e^2(1 + x_2)^2 - 4(e - 1)^2 \Delta_1 - \\
&\quad - 4e(e - 1)(1 + x_2) \sin^2 p\alpha) + (\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_5)(4(e - 1)^2 \Delta'_1 + \\
&\quad + 4e(e - 1)(1 + x_2) \alpha \sin 2p\alpha) - 4(e - 1)(1 + x_1) \times \\
&\quad \times [\Delta'_1(\Delta_4 \sin 2p\beta + \Delta_2 \sin^2 p\beta) + \Delta_1(\Delta'_4 \sin 2p\beta + \\
&\quad + \Delta_4 2\beta \cos 2p\beta + \Delta'_2 \sin^2 p\beta + \Delta_2 \beta \sin 2p\beta)] + \\
&\quad + e(1 + x_2)(1 + x_1)(2\Delta'_4 \Delta_6 + 2\Delta_4 \Delta'_6 - \Delta'_2 \Delta_7 - \Delta_2 \Delta'_7),
\end{aligned}$$

$$\Delta'_1(p) = 2p \sin^2 \alpha - \alpha \sin 2p\alpha,$$

$$\Delta'_2(p) = \sin 2(\alpha + \beta) - 2(2\pi - \alpha - \beta) \cos 2p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta'_3(p) = 2p \sin^2 \beta - \beta \sin 2p\beta,$$

$$\Delta'_4(p) = 2p \sin^2(\alpha + \beta) - (2\pi - \alpha - \beta) \sin 2p(2\pi - \alpha - \beta),$$

$$\Delta'_5(p) = \sin 2\beta + 2\beta \cos 2p\beta,$$

$$\Delta'_6(p) = \sin \alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \alpha \cos 2p(\alpha + \beta) - 2\beta \sin p\alpha \sin p(\alpha + 2\beta),$$

$$\Delta'_7(p) = 2p \sin \alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \alpha \sin 2p(\alpha + \beta) - 2\beta \sin p\alpha \cos p(\alpha + 2\beta).$$

Припускаємо, що на межі розділу діє розтягувальне нормальне напруження $\sigma_\theta(r, 0) > 0$, яке забезпечує відривні деформації, необхідні для утворення зони передруйнування.

Біля кінця зони передруйнування для напружень і переміщень реалізується асимптотика, яка є асимптотично найбільшим розв'язком однорідної задачі теорії пружності для кусково-однорідної площини, що містить на плоскій межі розділу середовищ півнескінченну пряму лінію розриву нормального переміщення. Зокрема, справджується така асимптотика:

$$\theta = 0, \quad r \rightarrow d + 0: \quad \sigma_\theta \sim \frac{x_1 + 1 + e(1 + x_2)}{2(e + x_1)} \cdot \frac{k_I}{\sqrt{2\pi(r - d)}},$$

де k_I – коефіцієнт інтенсивності напружень в кінці лінії розриву, який визначаємо в ході розв'язання задачі.

Розв'язок сформульованої крайової задачі знаходимо методом Вінера – Гопфа аналогічно до розв'язання подібної задачі без пластичної смуги [1]. З нього отримуємо наступні трансцендентні рівняння для визначення відносної довжини міжфазної зони $y = d/L$ залежно від наявних коренів характеристичного рівняння (1) у смугі $-1 < \text{Re } \lambda < 0$:

a) якщо характеристичне рівняння має два або три дійсні корені, то йому відповідає рівняння для y вигляду

$$\begin{aligned} \sum_s R(-1 - \lambda'_s, \beta) y^{\lambda'_s} \frac{I(\lambda'_s, \beta)}{I_1(\lambda'_s, \beta)} \sum_i n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) m(\lambda_i, \lambda'_s) x^{\lambda_i - \lambda'_s} = \\ = \frac{\sigma_0}{\tau \tau_1} S_1(\beta); \end{aligned} \quad (4)$$

б) якщо ж характеристичне рівняння має два комплексно-спряжені і один або жодного дійсного кореня, то рівняння для y набуває вигляду

$$\begin{aligned} \sum_s R(-1 - \lambda'_s, \beta) y^{\lambda'_s} \frac{I(\lambda'_s, \beta)}{I_1(\lambda'_s, \beta)} [2|F(\lambda_1, \beta)||N(\lambda_1, \beta)||m(\lambda_1, \lambda'_s)| x^{\operatorname{Re} \lambda_1 - \lambda'_s} \times \\ \times \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 \cdot \ln x + \varphi + \xi + \psi + \mu_s) + \\ + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) m(\lambda_3, \lambda'_s) x^{\lambda_3 - \lambda'_s}] = \frac{\sigma_0 S_1(\beta)}{\tau \tau_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

де

$$I_1(\lambda', \beta) = \exp \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln G_1(it, \beta)}{1 + \lambda' + it} dt \right], \quad G_1(p, \beta) = \frac{(1 + \alpha_1) D_2(p, \beta) \cos p\pi}{AD_1(p, \beta) \sin p\pi},$$

$$\begin{aligned} D_2(p, \beta) = (1 + \alpha_1)(4(\sin^2 \beta - \cos^2 p\beta)\Delta_4 + \Delta_2 \Delta_{14})\Delta_1 + \\ + e(1 + \alpha_2)(\Delta_2 \Delta_3 - \Delta_4 \Delta_5)\Delta_9, \end{aligned}$$

$$\Delta_{14}(p) = p \sin 2\beta - \sin 2p\beta,$$

$$A = \frac{(1 + \alpha_1)[e + \alpha_1 + 1 + e\alpha_2]}{2(e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)}, \quad S_1(\beta) = \frac{2}{\sqrt{\pi} I_1(0, \beta)}.$$

Отриманий розв'язок використовуємо для знаходження розкриття зони передруйнування в околі вершини тріщини як стрибка нормального переміщення $\delta = \langle u_0(0, 0) \rangle$, аналогічно до його розрахунку в [1], що дало наступні вирази:

а) якщо рівняння (1) має тільки дійсні корені в інтервалі $(-1, 0)$, тоді

$$\begin{aligned} \delta = - \frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G_1(0, \beta)}} \tau \tau_1 \sum_s R(-1 - \lambda'_s, \beta) \frac{I(\lambda'_s, \beta)}{I_1(\lambda'_s, \beta)} \frac{\lambda'_s}{1 + \lambda'_s} y^{\lambda'_s + 1} \times \\ \times \sum_i n_i F(\lambda_i, \beta) N(\lambda_i, \beta) m(\lambda_i, \lambda'_s) x^{\lambda_i - \lambda'_s}; \end{aligned} \quad (6)$$

б) при наявності комплексних коренів рівняння (1) маємо

$$\begin{aligned} \delta = - \frac{4(1 - \nu_1^2)L}{E_1 A \sqrt{\pi G_1(0, \beta)}} \tau \tau_1 \sum_s R(-1 - \lambda'_s, \beta) \frac{I(\lambda'_s, \beta)}{I_1(\lambda'_s, \beta)} \frac{\lambda'_s}{1 + \lambda'_s} y^{\lambda'_s + 1} \times \\ \times [2|F(\lambda_1, \beta)||N(\lambda_1, \beta)||m(\lambda_1, \lambda'_s)| x^{\operatorname{Re} \lambda_1 - \lambda'_s} \times \\ \times \cos(\operatorname{Im} \lambda_1 \cdot \ln x + \varphi + \xi + \psi + \mu_s) + \\ + n_3 F(\lambda_3) N(\lambda_3) m(\lambda_3, \lambda'_s) x^{\lambda_3 - \lambda'_s}], \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$G_1(0, \beta) = \frac{(1 + \alpha_1) D_2(0, \beta)}{A\pi D_1(0, \beta)},$$

$$D_2(0, \beta) = (1 + \alpha_1)g_1(g_2g_8 - 4\cos^2\beta g_4) + e(1 + \alpha_2)(g_2g_3 - g_4g_5)g_9,$$

$$D_1(0, \beta) = g_1g_2(1 + \alpha_1)[e(1 + \alpha_2) - (1 + \alpha_1)] - e^2(1 + \alpha_2)^2(g_2g_3 - g_4g_5) +$$

$$+ e(1 + \alpha_2)(1 + \alpha_1)(2g_4g_6 - g_2g_7),$$

$$g_1 = \sin^2\alpha - \alpha^2, \quad g_2 = \sin 2(\alpha + \beta) - 2(2\pi - \alpha - \beta), \quad g_3 = \sin^2\beta - \beta^2,$$

$$g_4 = \sin^2(\alpha + \beta) - (2\pi - \alpha - \beta)^2, \quad g_5 = \sin 2\beta + 2\beta,$$

$$g_6 = \sin\alpha \cos(\alpha + 2\beta) + \alpha, \quad g_7 = \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta) - \alpha(\alpha + 2\beta),$$

$$g_8 = \sin 2\beta - 2\beta, \quad g_9 = \sin 2\alpha - 2\alpha.$$

Результати обчислень і їх аналіз. Вимоги розтягувального характеру деформацій на межі розділу в околі вершини її зламу та малості довжини міжфазної зони передруйнування порівняно з довжиною бічної пластичної смуги обмежують область допустимих кутів зламу межі розділу і конфігурації навантаження, при яких досліджувана модель є прийнятною. Зокрема, виключаються розрахунки з параметрами, при яких пластична смуга поширюється уздовж межі розділу. Безрозмірні параметри навантаження τ цієї роботи і σ з роботи [1] пов'язані співвідношенням $\sigma = \tau_1\tau/\sigma_0$, що дозволяє порівняти розміри міжфазної зони передруйнування при наявності і відсутності бічної пластичної смуги.

На рис. 6 наведено результати числових розрахунків відносних довжин пластичної смуги і зони передруйнування від навантаження при окремих параметрах задачі та відносні довжини міжфазної зони передруйнування при відсутності бічної пластичної смуги, розраховані за результатами [1] за тими ж параметрами. Бачимо, що розміри пластичної смуги і зони передруйнування синхронно зростають зі збільшенням навантаження. При цьому при наявності пластичної смуги довжина міжфазної зони значно менша, ніж без неї.

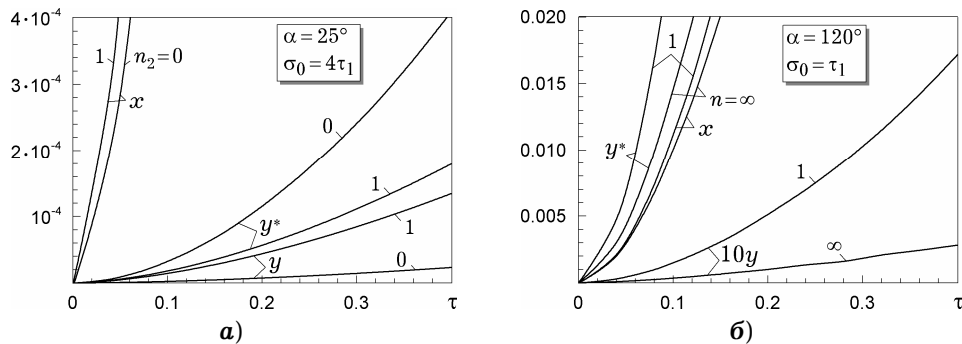


Рис. 6. Залежність відносних довжин пластичної смуги (x), вторинної зони передруйнування (y) та міжфазної зони передруйнування без пластичної смуги (y^*) [1] від безрозмірного параметра навантаження τ .

Рис. 7 показує вплив на розміри зони передруйнування кута зламу α межі розділу середовищ. При малих кутах довжина міжфазної зони значно менша від довжини бічної пластичної смуги. Проте на певних інтервалах кутів зламу їх розміри стають величинами одного порядку, тобто відповідна конфігурація композитного з'єднання сприяє розвитку міжфазної зони передруйнування, а отже, і поширенню тріщини по межі розділу. Зазначимо також, що зі збільшенням α довжина міжфазної зони зростає і може перевищити довжину бічної пластичної смуги. Розміри міжфазної зони тим менші, чим більша адгезійна міцність з'єднання, яка характеризується параметром σ_0 .

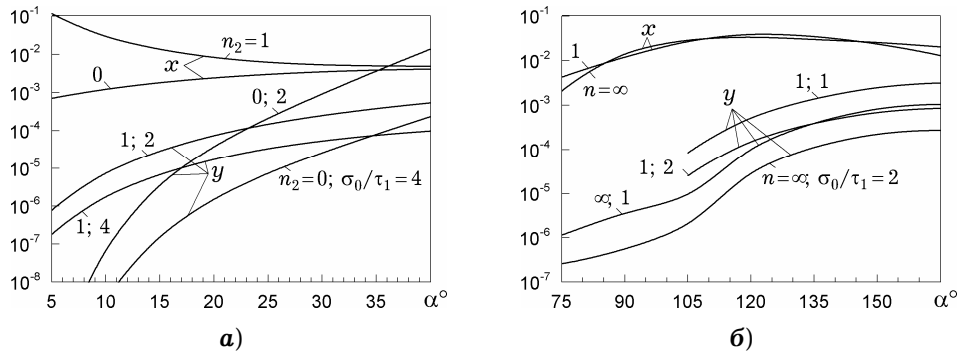


Рис. 7. Залежність відносних довжин пластичної смуги (x) і вторинної зони передруйнування (y) від кута зламу α межі розділу середовищ при $\tau = 0.2$.

Поява бічної пластичної смуги значно зменшує розкриття тріщини в її вершині, що ілюструють зображені на рис. 8 і рис. 9 графіки залежностей від навантаження τ та кута зламу зведеного розкриття тріщини $\delta' = \frac{E_1}{4(1 - \nu_1^2)\sigma_0} \frac{\delta}{L}$ при наявності (δ') та відсутності (δ^*) смуги, розраховані за формулами (6), (7) і роботи [1] відповідно. Схожість цих залежностей з аналогічними для довжини міжфазної зони передруйнування дозволяє перенести наведені для неї висновки на розкриття тріщини.

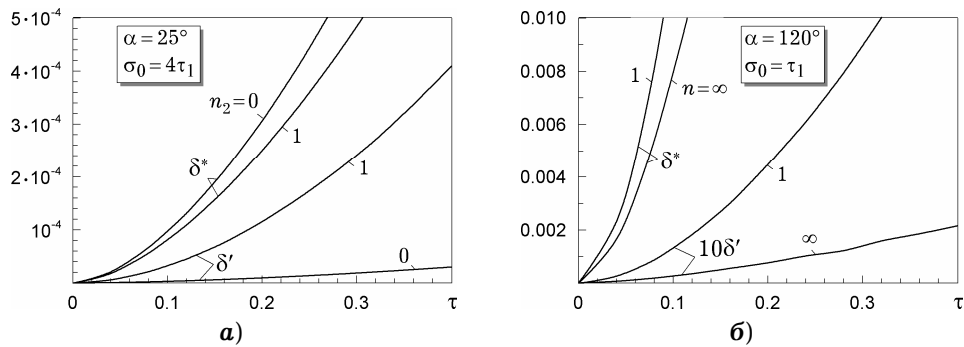


Рис. 8. Залежність розкриття тріщини в її вершині при наявності (δ') і відсутності пластичної смуги (δ^*) від безрозмірного параметра навантаження τ .

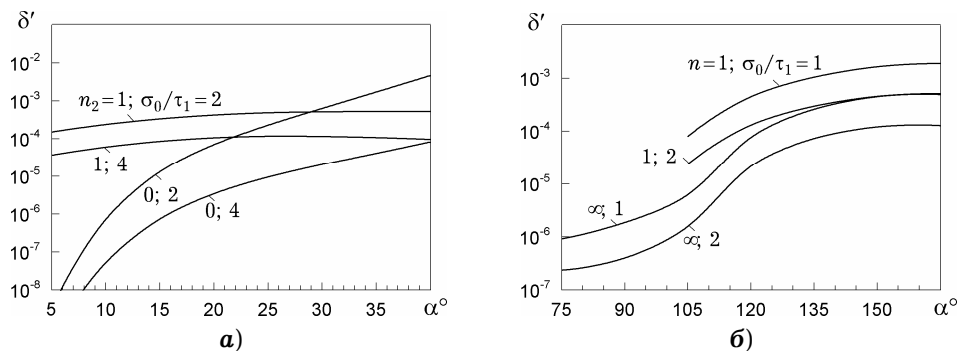


Рис. 9. Залежність розкриття тріщини у вершині від кута зламу α межі розділу середовищ при $\tau = 0.2$.

Екстраполюючи отримані залежності розкриття тріщини на достатньо великі навантаження, можна оцінити граничне навантаження після досягнення розкриттям критичного значення δ_n (КРТ-критерій [9]). На рис. 10

наведено результати розрахунків безрозмірного граничного параметра навантаження τ_k від зведеної довжини тріщини $L' = \frac{4(1 - \nu_1^2)\sigma_0 L}{E_1 \delta_n}$ при наявності (τ_k) і відсутності ($\tau_k^* = \sigma_0 \sigma_k / \tau_1$, [1]) бічної пластичної смуги. Аналіз графіків показує, що утворення пластичної смуги значно збільшує величину граничного навантаження. Крім того, розрахунки кількісно підтверджують очікуване з фізичних міркувань збільшення граничного навантаження для з'єднань з більшою адгезійною міцністю.

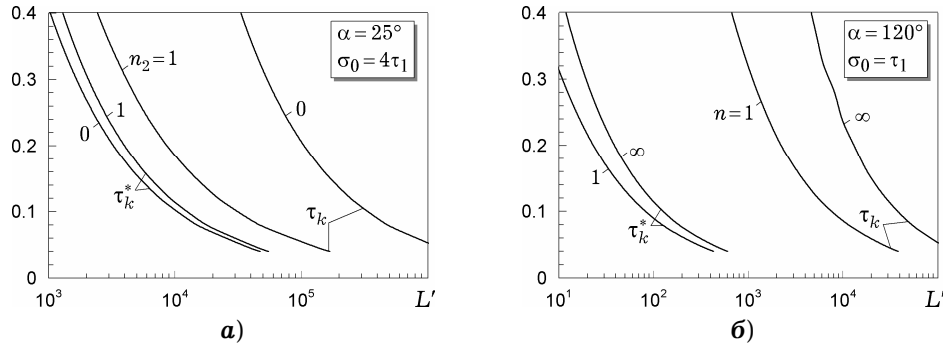


Рис. 10. Залежність граничного навантаження при наявності (τ_k) і відсутності (τ_k^*) бічної пластичної смуги від зведеної довжини тріщини L' .

Висновки. Методом Вінера – Гопфа знайдено розв'язок задачі про розрахунок зони передруйнування в околі вершини міжфазної тріщини, що виходить з кутової точки межі розділу двох однорідних ізотропних матеріалів, один з яких є пластичним. Зона зображена нахиленою до межі розділу лінією розриву дотичного переміщення у пластичному матеріалі і значно меншого від неї розміру лінією розриву нормального переміщення. Отримано рівняння для визначення їх довжин і розкриття тріщини у кутовій точці та досліджено їх залежність від параметрів з'єднаних матеріалів, величини і конфігурації навантаження, кута зламу межі поділу матеріалів. Виявлено, що якісні залежності досліджуваних величин від параметрів композитного тіла і навантаження при наявності пластичної смуги подібні до знайдених в [1] за її відсутності, але їх числові значення значно менші. Це пов'язано з тим, що поява пластичної смуги розвантажує матеріал в області з'єднання, зменшуючи в ній локальні напруження. На основі деформаційного критерію розраховано граничне навантаження, досліджено його залежність від довжини тріщини і адгезійної міцності з'єднання і показано його зростання внаслідок утворення пластичної смуги.

1. Дудик М. В., Діхтяренко Ю. В. Развитие зоны передруйнування від міжфазної тріщини у кутовій точці межі розділу двох пружних середовищ // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 103–114.
Te same: Dudyk M. V., Dikhtyarenko Yu. V. Development of a prefracture zone from an interface crack at a corner point of an interface of two elastic media // J. Math. Sci. – 2012. – 184, No. 2. – P. 121–135.
2. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О направлении развития пластической зоны предразрушения в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – 42, № 2. – С. 14–23.
Te same: Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A. On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // Int. Appl. Mech. – 2006. – 42, No. 2. – P. 136–144.
3. Каминский А. А., Кипнис Л. А., Дудик М. В. О начальном развитии зоны предразрушения вблизи конца трещины, выходящей на границу раздела различных сред // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 2. – С. 74–81.

- Te same: *Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Dudik M. V.* Initial development of the prefracture zone near the tip of a crack reaching the interface between dissimilar media // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 2. – P. 176–182.
4. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А.* Расчет пластической зоны в конце трещины в рамках модели «трезубец» // *Прикл. механика.* – 1997. – **33**, № 5. – С. 70–76.
Te same: *Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A.* Calculation of the plastic zone at a crack tip with the use of the «trident» model // *Int. Appl. Mech.* – 1997. – **33**, No. 5. – P. 407–413.
 5. *Каминский А. А., Кипнис Л. А., Колмакова В. А., Хазин Г. А.* Об использовании модели «трезубец» при расчетах пластических зон вблизи концов трещин и угловых точек // *Прикл. механика.* – 2000. – **36**, № 3. – С. 95–100.
Te same: *Kaminskii A. A., Kipnis L. A., Kolmakova V. A., Khazin G. A.* The use of the «trident» model in the analysis of plastic zones near crack tips and corner points // *Int. Appl. Mech.* – 2000. – **36**, No. 3. – P. 372–376.
 6. *Каминский А. А., Нижник С. Б.* Исследование закономерностей изменения пластической зоны у края трещины металлических материалов в зависимости от их структуры (обзор) // *Прикл. механика.* – 1995. – **31**, № 10. – С. 3–27.
Te same: *Kaminskii A. A., Nizhnik S. B.* Study of the laws governing the change in the plastic zone at the crack tip and characteristics of the fracture toughness of metallic materials in relation to their structure (survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, No. 10. – P. 777–798.
 7. *Каминский А. А., Усикова Г. И., Дмитриева Е. А.* Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении // *Прикл. механика.* – 1994. – **30**, № 11. – С. 69–75.
Te same: *Kaminskii A. A., Usikova G. I., Dmitrieva E. A.* Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading // *Int. Appl. Mech.* – 1994. – **30**, No. 11. – P. 892–897.
 8. *Козут І. С., Калита Г. І.* Визначення розмірів зони передруйнування квазікрихких надрізаних зразків // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 2008. – **44**, № 1. – С. 84–87.
Te same: *Kohut I. S., Kalyta H. I.* Evaluation of the sizes of the process zone for quasibrittle notched specimens // *Mater. Sci.* – 2008. – **44**, No. 1. – P. 97–103.
 9. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
 10. *Панасюк В. В., Саврук М. П.* Модель смуг пластичності в пружнопластичних задачах механіки руйнування // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1992. – **28**, № 1. – С. 49–68.
Te same: *Panasyuk V. V., Savruk M. P.* Model for plasticity bands in elastoplastic failure mechanics // *Mater. Sci.* – 1992. – **28**, No. 1. – P. 41–57.
 11. *Черепанов Г. П.* К общей теории разрушения // *Фіз.-хім. механіка матеріалів.* – 1986. – **22**, № 1. – С. 36–44.
Te same: *Cherepanov G. P.* General theory of failure // *Mater. Sci.* – 1986. – **22**, No. 1. – P. 32–39.
 12. *Chai H.* Interfacial mixed-mode fracture of adhesive bonds undergoing large deformation // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**. – P. 6023–6042.
 13. *Evans A. G., Hutchinson J. W., Wei Y.* Interface adhesion: effects of plasticity and segregation // *Acta Mater.* – 1999. – **47**. – P. 4093–4113.
 14. *Nakatani A., Drugan W. J., van der Giessen E., Needleman A.* Crack tip fields at a ductile single crystal-rigid material interface // *Int. J. Fracture.* – 2003. – **122**, No. 3-4. – P. 131–159.
 15. *Tvergaard V.* Influence of plasticity on interface toughness in a layered solid with residual stresses // *Int. J. Solids Struct.* – 2003. – **40**, No. 21. – P. 5769–5779.
 16. *Tvergaard V.* Prediction of mixed mode interface crack growth using a cohesive zone model for ductile fracture // *J. Mech. Phys. Solids.* – 2004. – **52**, No. 4. – P. 925–940.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПЛАСТИЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ НА ПРОЧНОСТЬ КОМПОЗИТНОГО СОЕДИНЕНИЯ

В условиях плоской деформации методом Винера – Хопфа выполнен расчет зоны предразрушения вблизи вершины межфазной трещины, которая выходит из угловой точки границы раздела двух различных материалов, один из которых является пластическим. Зона моделируется боковым отрезком разрыва касательного смещения и отрезком разрыва нормального смещения на границе раздела. Исследовано влияние образования пластической зоны на условия старгивания трещины.

INVESTIGATION OF INFLUENCE OF PLASTICITY MATERIALS ON TENSILE STRENGTH OF THE COMPOSITE JOINT

Calculation of the prefracture zone near the tip of the interfacial crack which goes out from the angular point of the interface of two different materials, one of which is plastic is done by the Wiener – Hopf method for the plain strain conditions. This zone is modeled by a side line of the tangential displacement rupture and a line of normal displacement rupture on the interface. The influence of formation of a plastic zone on the crack starting conditions is investigated.

Уманськ. держ. пед. ун-т, Умань

Одержано
04.03.12