

## УЗАГАЛЬНЕНА МОДЕЛЬ В'ЯЗКОПРУЖНОГО ПРОМІЖНОГО ШАРУ АБО ПОКРИТТЯ, ЩО ВРАХОВУЄ ДЕФОРМАЦІЮ ПОПЕРЕЧНОГО ЗСУВУ

*Побудовано і досліджено узагальнену модель в'язкопружного анізотропного проміжного шару або покриття, що працює на стиснення та поперечний зсув. Розв'язано задачу про дію нормального розподіленого навантаження, що залежить від часу, на ізотропний в'язкопружний шар на жорсткій основі та вивчено випадок зосередженої сили, що діє у початку координат.*

У сучасному машинобудуванні, в будівництві та на транспорті досить часто механічний контакт між твердими тілами відбувається через тонкі проміжні шари або покриття з власними фізико-механічними властивостями та характеристиками. До таких об'єктів відносяться дорожні покриття та основи, амортизуючі прошарки на транспорті та при прокладці трубопроводів тощо. При проектуванні таких об'єктів велике значення має врахування їх фізико-механічної поведінки за різних видів та умов навантаження, а також адекватний вибір математичної моделі. У працях [2, 3, 6] розв'язано значну кількість контактних задач для тіл з тонкими покриттями та прошарками, що описуються пружними або в'язкопружними, в тому числі нелінійними моделями Вінклера в рамках теорій повзучості та старіння [2, 3]. Вінклерівську в'язкопружну основу в рамках моделі Фойгта розглянуто в роботі [14]. Однак модель Вінклера не враховує опору основи поперечному зсуву, внаслідок чого переміщення поза областю дії навантаження дорівнюють нулеві. Тому у працях [4, 9] було запропоновано двопараметричні моделі основи, що враховують її роботу як на стиснення, так і на поперечний зсув, а також розв'язано ряд задач як для масивних тіл, так і для тонкостінних елементів конструкцій. Подальший розвиток у цьому напрямку поданий в роботах [5, 7, 12, 16]. У статті [1] при формулюванні умов спряження в дотичному напрямку використовується диференціальний оператор другого порядку, однак, розглядувані там моделі пружного прошарку не є двопараметричними. Узагальнення двопараметричної моделі основи на в'язкопружний випадок у динамічній та квазістатичній постановках міститься у [8, 15]. Зазначимо, що огляди результатів стосовно моделей пружних і в'язкопружних основ разом з великою кількістю цитованої літератури можна знайти у працях [5, 7, 13].

Метою цієї статті є дослідження узагальненої моделі в'язкопружного проміжного шару або покриття, що враховує його роботу як на стиснення, так і на поперечний зсув, зокрема на прикладі задачі про дію нормального навантаження на в'язкопружний шар, зчеплений з жорсткою основою.

### 1. Узагальнена модель в'язкопружного проміжного шару (покриття).

У роботі [10] у рамках моделі Кельвіна – Фойгта [11] виведено узагальнені термомеханічні умови спряження твердих тіл через термов'язкопружний анізотропний проміжний шар товщини  $2h$ , що працює на стиснення та поперечний зсув. Нехтуючи у механічних умовах кривинами, в ізотермічному випадку без урахування масових сил і сил інерції отримуємо такі співвідношення:

$$[\tau_n] = 0,$$

$$(\tau_n) - G \nabla_s(u_n) - 2\mu_e[\mathbf{u}_\tau] - 2\mu_v[\dot{\mathbf{u}}_\tau] - \mu_0 \nabla_s(\dot{u}_n) = 0,$$

$$\nabla_s \cdot [G([\mathbf{u}_\tau] + h \nabla_s(u_n)) + \mu_0([\dot{\mathbf{u}}_\tau] + h \nabla_s(\dot{u}_n))] + [\sigma_n] = 0,$$

$$h\nabla_s \cdot \left( \mathbf{G}\nabla_s[u_n] + 3\mu_2\nabla_s[\dot{u}_n] - 3(\mathbf{T}_E \cdot \nabla_s(\mathbf{u}_\tau) + \mathbf{T}_{Z0} \cdot \nabla_s(\dot{\mathbf{u}}_\tau) + \frac{E_n}{h}[u_n] + \frac{Z_n}{h}[\dot{u}_n] - (\sigma_n) \right) = 0. \quad (1)$$

В умовах спряження (1)  $\mathbf{u}_\tau^{(i)}$ ,  $u_n^{(i)}$  – дотичні та нормальні компоненти переміщень граничних поверхонь спряжуваних тіл;  $\boldsymbol{\tau}_n^{(i)}$ ,  $\sigma_n^{(i)}$  – відповідні компоненти векторів напружень ( $i = 1, 2$ ); напівжирні квадратні та круглі дужки означають стрибки та суми відповідних граничних значень:  $[f] = f^{(1)} - f^{(2)}$ ,  $(f) = f^{(1)} + f^{(2)}$ ;  $\nabla_s = \mathbf{r}^\alpha \nabla_\alpha$  – двовимірний набла-оператор Гамільтона;  $\mathbf{r}^\alpha$  – вектори взаємного базису на серединній поверхні проміжкового шару  $S_0$ , а  $\nabla_\alpha$  – символи коваріантного диференціювання за гаусовими параметрами поверхні  $S_0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Розшифрування решти позначень в (1) можна знайти у роботі [10].

На контурі  $\partial S_0$  виконуються крайові умови

$$h(G^{\alpha\beta}(u_n)_{,\beta} + 2\mu_e^{\alpha\beta}[u_\beta] + 2\mu_v^{\alpha\beta}[\dot{u}_\beta] + \mu_0^{\alpha\beta}(\dot{u}_n)_{,\beta})v_\alpha^0 = \bar{N}^3, \\ h^2\left(\frac{1}{3}G^{\alpha\beta}[u_n]_{,\beta} + \mu_2^{\alpha\beta}[\dot{u}_n]_{,\beta}\right)v_\alpha^0 = \bar{M}^3. \quad (2)$$

У співвідношеннях (2)  $\bar{N}^3$ ,  $\bar{M}^3$  – задані перерізувальне зусилля та його «момент» [10];  $v_\alpha^0$ ,  $\alpha = 1, 2$ , – компоненти одиничної зовнішньої нормалі до  $\partial S_0$ .

Знехтуємо у другому співвідношенні (1) нормальними переміщеннями, а у третьому та четвертому співвідношеннях – дотичними. В результаті отримуємо такі умови спряження твердих тіл:

$$\boldsymbol{\tau}_n^{(1)} = \boldsymbol{\tau}_n^{(2)} = \boldsymbol{\tau}_n, \quad \boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{\mu}_e[\mathbf{u}_\tau] + \boldsymbol{\mu}_v[\dot{\mathbf{u}}_\tau]; \\ h\nabla_s \cdot (\mathbf{G}\nabla_s(u_n) + \boldsymbol{\mu}_0\nabla_s(\dot{u}_n)) + [\sigma_n] = 0, \\ (\sigma_n) = \frac{E_n}{h}[u_n] + \frac{Z_n}{h}[\dot{u}_n] - h\nabla_s \cdot \left( \frac{1}{3}\mathbf{G}\nabla_s[u_n] + \boldsymbol{\mu}_2\nabla_s[\dot{u}_n] \right). \quad (3)$$

Два останні скалярні співвідношення (3) представляють узагальнену двопараметричну модель в'язкопружного проміжного шару (покриття), що працює як на стиснення, так і на поперечний зсув.

Крайові умови, що відповідають диференціальним операторам другого порядку у співвідношеннях (3), мають вигляд

$$h(G^{\alpha\beta}(u_n)_{,\beta} + \mu_0^{\alpha\beta}(\dot{u}_n)_{,\beta})v_\alpha^0 = \bar{N}^3, \\ h^2\left(\frac{1}{3}G^{\alpha\beta}[u_n]_{,\beta} + \mu_2^{\alpha\beta}[\dot{u}_n]_{,\beta}\right)v_\alpha^0 = \bar{M}^3.$$

Зауважимо, що, як випливає з третього співвідношення (3), врахування зсувної жорсткості та в'язкості проміжного шару (покриття) призводить до ненульового стрибка нормальних напружень.

**2. Два випадки контактної взаємодії. Аналіз моделі.** Нехай пружне тіло 1 вдавлюється у жорстку основу (тіло 2) через в'язкопружний прошарок (покриття), що описується моделлю Фойгта [11]. Тоді, враховуючи, що  $u_n^{(2)} = 0$ ,  $[u_n] = u_n^{(1)}$ ,  $(u_n) = u_n^{(1)}$ , і виключаючи у двох останніх співвідношен-

нях (3) нормальне напруження  $\sigma_n^{(2)}$ , отримаємо

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} = & \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(1)} - \frac{2h}{3} \nabla_s \cdot (\mathbf{G} \nabla_s u_n^{(1)}) - \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 \nabla_s \dot{u}_n^{(1)}) - \\ & - \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_2 \nabla_s \dot{u}_n^{(1)}). \end{aligned} \quad (4)$$

Співвідношення (4) є узагальненням двопараметричної моделі пружної основи на випадок анізотропного в'язкопружного шару (покриття). Зауважимо, що відповідне співвідношення для пружної анізотропної основи наведено у роботі [12]. Якщо матеріал проміжного шару (покриття) є трансверсально-ізотропним, причому вісь анізотропії співпадає з нормаллю  $\mathbf{n}$ , то

$$\mathbf{G} = G' \mathbf{a}, \quad \boldsymbol{\mu}_k = \mu_k \mathbf{a}, \quad k = 0, 2,$$

де  $\mathbf{a}$  – тензор першої квадратичної форми серединної поверхні проміжкового шару. У цьому випадку співвідношення (4) набуває вигляду

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(1)} - \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(1)} - \frac{2h\eta'}{3} \Delta_s \dot{u}_n^{(1)}, \quad (5)$$

де  $\Delta_s = \nabla_s^2$  – двовимірний оператор Лапласа, а  $\eta'$  – в'язкість проміжного шару при поперечному зсуві. З формули (5) випливає, що другий параметр  $2hG'/3$  та його в'язкісний аналог  $2h\eta'/3$  характеризують роботу проміжного шару (покриття) на поперечний зсув.

Якщо матеріал прошарку (покриття) пружний, то з (5) отримуємо класичну двопараметричну модель [4, 7]

$$\sigma_n^{(1)} = \frac{E_n}{2h} u_n^{(1)} - \frac{2hG'}{3} \Delta_s u_n^{(1)}. \quad (6)$$

Як видно з формули (6), якщо  $u_n^{(1)} < 0$  і функція  $u_n^{(1)}(\xi^1, \xi^2)$  є опуклою вниз (відносно координат  $\xi^1, \xi^2$ ), то  $\Delta_s u_n^{(1)} > 0$ , і за модулем реакція основи є більшою, ніж у випадку моделі Вінклера.

Нехай тепер жорсткий штамп (тіло 1) втискається у пружну основу (тіло 2) через в'язкопружний проміжний шар (покриття) так, що його жорстке переміщення зводиться тільки до нормального просідання. Форми підшви штампа та відповідної контактуючої поверхні шару є однаковими або дуже близькими. Тоді

$$u_n^{(1)} = -\delta = \text{const}, \quad [u_n] = -(u_n^{(2)} + \delta), \quad (u_n) = u_n^{(2)} - \delta$$

( $\delta > 0$  – просідання штампа). Розв'язуючи два останні співвідношення (3) відносно  $\sigma_n^{(1)}$ ,  $\sigma_n^{(2)}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_n^{(1)} = & - \left[ \frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) + \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(2)} + \frac{h}{3} \nabla_s \cdot (\mathbf{G} \nabla_s u_n^{(2)}) + \right. \\ & \left. + \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}) - \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_2 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}) \right], \\ \sigma_n^{(2)} = & - \frac{E_n}{2h} (u_n^{(2)} + \delta) - \frac{Z_n}{2h} \dot{u}_n^{(2)} + \frac{2h}{3} \nabla_s \cdot (\mathbf{G} \nabla_s u_n^{(2)}) + \\ & + \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_0 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}) + \frac{h}{2} \nabla_s \cdot (\boldsymbol{\mu}_2 \nabla_s \dot{u}_n^{(2)}). \end{aligned} \quad (7)$$

Для трансверсально-ізотропного шару (покриття) співвідношення (7) набувають вигляду

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)} &= -\left[\frac{E_n}{2h}(u_n^{(2)} + \delta) + \frac{Z_n}{2h}\dot{u}_n^{(2)} + \frac{hG'}{3}\Delta_s u_n^{(2)} + \frac{h\eta'}{3}\Delta_s \dot{u}_n^{(2)}\right], \\ \sigma_n^{(2)} &= -\frac{E_n}{2h}(u_n^{(2)} + \delta) - \frac{Z_n}{2h}\dot{u}_n^{(2)} + \frac{2hG'}{3}\Delta_s u_n^{(2)} + \frac{2h\eta'}{3}\Delta_s \dot{u}_n^{(2)}.\end{aligned}\quad (8)$$

Як і в попередньому прикладі, два додаткові параметри моделі характеризують роботу проміжного шару (покриття) на поперечний зсув.

Якщо матеріал шару (покриття) пружний, то з (8) отримуємо

$$\begin{aligned}\sigma_n^{(1)} &= -\left[\frac{E_n}{2h}(u_n^{(2)} + \delta) + \frac{hG'}{3}\Delta_s u_n^{(2)}\right], \\ \sigma_n^{(2)} &= -\frac{E_n}{2h}(u_n^{(2)} + \delta) + \frac{2hG'}{3}\Delta_s u_n^{(2)}.\end{aligned}\quad (9)$$

Зауважимо, що друга з формул (9) має вигляд класичної двопараметричної моделі [4, 7]. Нехай  $-\delta < u_n^{(2)} < 0$  і функція  $u_n^{(2)}(\xi^1, \xi^2)$  є опуклою вниз відносно  $\xi^1, \xi^2$ , так що  $\Delta_s u_n^{(2)} > 0$ . Позначимо  $p_1 = |\sigma_n^{(1)}|$ ,  $p_2 = |\sigma_n^{(2)}|$ , а через  $p_w$  позначимо тиск під штампом у випадку вінклерівського прошарку (покриття). Тоді згідно з (9) в області контакту завжди виконується нерівність

$$p_2 < p_w < p_1.$$

Таким чином, як в першому, так і в другому прикладі врахування деформації поперечного зсуву у проміжному шарі (покритті) збільшує за модулем нормальну реакцію основи під штампом. Міжшарове ж нормальне напруження в області контакту у випадку двошарової основи за модулем є меншим від відповідного напруження у випадку моделі Вінклера.

**3. В'язкопружний шар на жорсткій основі за дії нормального навантаження.** Розглянемо в'язкопружний шар на жорсткій основі, на який діє нормальне навантаження інтенсивністю  $p(x, t)$ , розподілене на ділянці  $[a, b]$  (рис. 1). Задачу розглядаємо в рамках плоскої деформації. При цьому  $\xi^1 = x$ ,  $\xi^3 = y$ ,  $\xi^2 = -z$ ,  $u_n^{(1)} = v$ ,  $u_n^{(2)} = 0$ ,  $\sigma_n^{(1)} = -p(x, t)$  ( $t$  – час). Тоді рівняння (5) набуває вигляду

$$2t_e v'' + 2t_\eta \dot{v}'' - k_e v - k_\eta \dot{v} = p(x, t), \quad (10)$$

де

$$k_e = \frac{E_0}{2h(1 - \nu_0^2)}, \quad t_e = \frac{Gh}{3} = \frac{E_0 h}{6(1 + \nu_0)}, \quad k_\eta = \frac{2\eta}{3h}, \quad t_\eta = \frac{\eta h}{3},$$

$$E_0 = \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad \nu_0 = \frac{\nu}{1 - \nu}, \quad G = \frac{E}{2(1 + \nu)} = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}.$$

Тут  $G$  – модуль зсуву матеріалу шару;  $\eta$  – в'язкість. Штрихами позначено похідні за координатою  $x$ , а крапками – за часом. Крайова та початкова умови мають вигляд

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} v(x, t) = 0, \quad (11)$$

$$v(x, 0) = 0. \quad (12)$$

Застосовуючи до рівняння (10) інтегральні перетворення Фур'є за  $x$  та Лапласа за  $t$  і враховуючи умови (11), (12), отримаємо розв'язок задачі

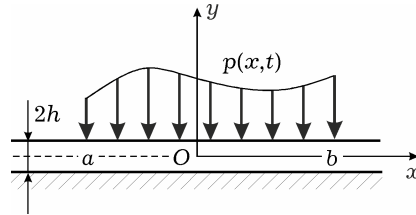


Рис. 1

(10)–(12) у вигляді

$$v(x, t) = - \int_0^t d\tau \int_a^b G(x - \xi, t - \tau) p(\xi, \tau) d\xi, \quad (13)$$

де

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi t_\eta} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + h^{-2}}\right) \frac{\cos x\xi}{\xi^2 + h^{-2}} d\xi \quad (14)$$

є функцією Гріна. У формулі (14)  $\tau_K = \eta/G$  – час запізнення;  $\alpha_e^2 = k_e/2t_e = 3/[2h^2(1 - \nu_0)]$ .

У випадку зосередженої сили, що діє у початку координат,  $p(x, t) = P(t)\delta(x)$  ( $\delta(x)$  – функція Дірака). Формула (13) набуває вигляду

$$v(x, t) = - \int_0^t G(x, t - \tau) P(\tau) d\tau. \quad (15)$$

Для сталого в часі зосередженої сили  $P(t) = P_0 H(t)$  ( $H(t)$  – функція Гевісайда) з (14), (15) отримаємо такий вираз для вертикального переміщення:

$$v(x, t) = - \frac{P_0}{4\alpha_e t_e} e^{-\alpha_e |x|} + \frac{P_0}{2\pi t_e} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\xi^2 + \alpha_e^2}{\xi^2 + \alpha_e^2}\right) \frac{\cos x\xi}{\xi^2 + \alpha_e^2} d\xi. \quad (16)$$

Перший член виразу (16) представляє пружний розв'язок [4], а другий член, що швидко спадає з часом, характеризує в'язкопружне запізнення реакції шару на зовнішню механічну дію. Введемо безрозмірні координату  $\bar{x} = x/h$ , час  $\bar{t} = t/\tau_0$  ( $\tau_0$  – характерний час), а також безрозмірний час запізнення  $\bar{\tau}_K = \tau_K/\tau_0$  та безрозмірне вертикальне переміщення  $\bar{v}(\bar{x}, \bar{t}) = 2Gv(x, t)/(3P_0)$ . Тоді, опускаючи верхні риси, замість (16) отримаємо формулу

$$v(x, t) = - \frac{e^{-\alpha |x|}}{2\alpha} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{\cos x\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi, \quad (17)$$

де  $\alpha^2 = 3/[2(1 - \nu_0)]$ .

На рис. 2 наведено графіки залежності безрозмірного вертикального переміщення від безрозмірної координати в різні моменти часу, отримані за допомогою формули (17). Пружні сталі матеріалу в'язкопружного шару є такими:  $E = 570$  МПа,  $\nu = 0.12$ . Рис. 2а відповідає значенню в'язкості  $\eta = 5$  ГПа·с і часу запізнення  $\tau_K = 19.65$  с, а рис. 2б – значенню в'язкості  $\eta = 54$  ГПа·с і часу запізнення  $\tau_K = 212.2$  с. Характерний час в обох випадках  $\tau_0 = 10$  с. Як видно з рис. 2, в'язкопружні вертикальні переміщення у точках, близьких до точки прикладання зосередженої сили, завжди за модулем менші від пружних (штрихові лінії на рис. 2), а значить, є скінченними у цій точці. При  $t \rightarrow \infty$  в'язкопружний розв'язок наближається до пружного, причому при  $t > \tau_K$  для точок, віддалених від точки прикладання навантаження на величину, більшу від  $h$ , різниця між відповідними розв'язками стає незначною. Збільшення в'язкості матеріалу шару приблизно на порядок призводить до приблизно такого ж збільшення запізнення реакції в'язкопружного шару на зовнішню силову дію. Зауважимо, що, як бачимо на рис. 2, розподільна здатність у в'язкопружного шару дещо краща, ніж у пружного. Таким чином, у в'язкопружному шарі, що

описується моделлю Фойгта, за нульової початкової умови в'язкопружні деформації (переміщення) розвиваються не миттєво, як у пружному шарі, а з певним запізненням, що залежить від часу запізнення  $\tau_K$ . Тому, якщо необхідно уникнути деформацій, близьких до пружних (в околі точки прикладання зосередженої сили), час дії навантаження повинен бути невеликим (принаймні меншим від  $\tau_K$ ).

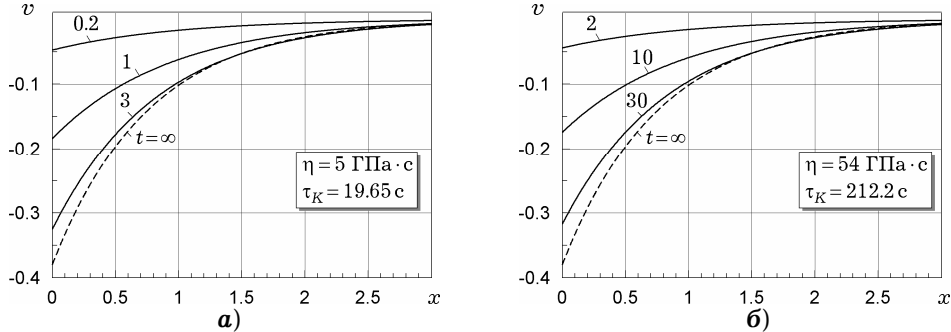


Рис. 2

На рис. 3 зображено графіки зміни в часі відносної різниці між в'язкопружним та пружним розв'язками в точці прикладання зосередженої сили, тобто величини  $\Delta(t) = |(v(0,t) - v_e)/v_e|$ , де  $v_e = -1/(2\alpha)$ . Криві 1 і 3 демонструють затухання у часі величини  $\Delta(t)$  для значень в'язкопружних сталей матеріалу шару, що відповідають рис. 2а і рис. 2б. Для кривої 2 значення в'язкості становить  $\eta = 22 \text{ ГПа} \cdot \text{с}$ , а час запізнення -  $\tau_K = 86.46 \text{ с}$ . Штрихпунктирна крива відповідає таким значенням в'язко-пружних сталей матеріалу шару:  $E = 300 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.2$ ,  $\eta = 600 \text{ МПа} \cdot \text{с}$ ,  $\tau_K = 4.8 \text{ с}$ . Характерний час  $\tau_0$  у всіх випадках становить 10 с. На рис. 3 бачимо, що оскільки величина  $\alpha$  слабо залежить від коефіцієнта Пуассона, швидкість затухання в часі величини  $\Delta(t)$  визначається переважно часом запізнення  $\tau_K$ . Найшвидше прямування величини  $\Delta(t)$  до нуля спостерігається в останньому випадку (штрихпунктирна крива), а найповільніше спадає крива 3.

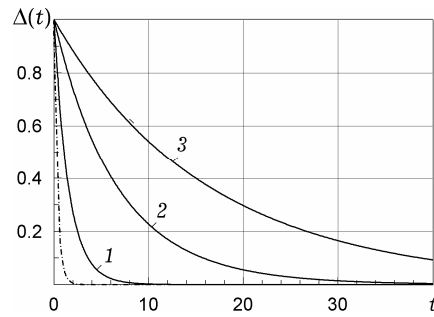


Рис. 3

З'ясуємо детальніше, як час запізнення реакції в'язкопружного шару на зовнішню силову дію залежить від часу запізнення  $\tau_K$ . Неважко бачити, що величина  $\Delta(t)$  характеризує найбільшу різницю між в'язкопружним та пружним розв'язками і в явному вигляді записується так:

$$\Delta(t) = \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2}. \quad (18)$$

З формули (18) випливає, що, коли  $\Delta(t) = \varepsilon = \text{const}$ , то  $t/\tau_K = c = \text{const}$ . Тому, якщо задати максимальну різницю між в'язкопружним та пружним розв'язками і за час запізнення реакції шару  $\tau_d$  прийняти час, за який ця різниця досягається, то завжди буде

$$\tau_d = c\tau_K,$$

тобто час запізнення реакції шару пропорційний часу запізнення  $\tau_K$ . Коефіцієнт пропорційності  $c$ , як неважко бачити з формули (18), пов'язаний з

величиною  $\varepsilon$  залежністю

$$\frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-c \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \varepsilon.$$

На рис. 4 наведено залежності  $c = c(\varepsilon)$  для двох значень коефіцієнта Пуассона (параметра  $\alpha = [1.5(1 - \nu)/(1 - 2\nu)]^{1/2}$ ). Функція  $c(\varepsilon)$  є монотонно спадною. Найбільше значення коефіцієнта пропорційності становить 3.19 при  $\varepsilon = 0.02$ ,  $\nu = 0.12$ , а найменшим є  $c(\varepsilon) = 1.745$  при  $\varepsilon = 0.1$ ,  $\nu = 0.2$ . Зауважимо, що, як видно на рис. 4, зміна коефіцієнта Пуассона незначно впливає на коефіцієнт пропорційності, який визначається переважно величиною  $\varepsilon$ .

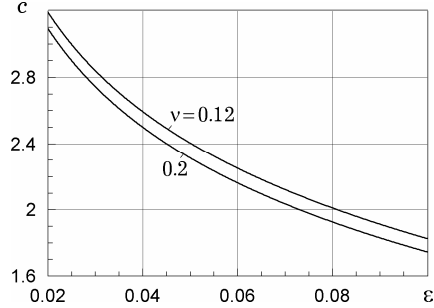


Рис. 4

Розглянемо нормальні контактні напруження  $\sigma_n^{(2)}(x, t)$  на поверхні спряження шару з жорсткою основою. Використовуючи третє із співвідношень (3), а також рівняння (10), поділене на  $2t_e$ , для контактного тиску  $q(x, t) = -\sigma_n^{(2)}(x, t)$  отримаємо

$$q(x, t) = -Gh \left( \alpha_e^2 v(x, t) + \frac{\tau_K}{h^2} \dot{v}(x, t) \right), \quad x \neq 0. \quad (19)$$

Вводячи безрозмірну величину  $\bar{q}(\bar{x}, \bar{t}) = hq(x, t)/P_0$  і опускаючи верхні риси, з використанням формул (17), (19) остаточно запишемо

$$q(x, t) = \frac{3}{2} \left[ \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|x|} - \frac{\alpha^2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{\cos x\xi}{\alpha^2 + \xi^2} d\xi + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{t}{\tau_K} \frac{\alpha^2 + \xi^2}{1 + \xi^2}\right) \frac{\cos x\xi}{1 + \xi^2} d\xi \right], \quad x \neq 0. \quad (20)$$

Формула (20) описує розподіл безрозмірного контактного тиску між шаром та жорсткою основою за координатою та в часі.

На рис. 5 зображено графіки розподілу безрозмірного контактного тиску  $q(x, t)$  за координатою в різні моменти часу. В'язкопружні сталі для кривих на рис. 5а такі самі, як і для рис. 2а. Для кривих на рис. 5б в'язкопружні сталі матеріалу шару такі, як і для штрихпунктирної кривої на рис. 3, причому  $\nu = 0.2$ ,  $E = 300$  МПа,  $\tau_0 = 1$  с. Бачимо, що залежність контактних напружень від часу є слабкою, а тому розподіли величини  $q(x, t)$  за координатою в різні моменти часу є близькими до експоненціального розподілу у граничному випадку пружного шару або покриття при  $t \rightarrow \infty$  (штрихові криві на рис. 5).

В околі точки прикладання зосередженої сили  $|x| < 0.9$  контактний тиск між шаром та основою з часом зростає до максимального, який має місце у випадку пружного шару, а поза цим околom, навпаки, спадає до граничного пружного значення. При  $|x| \rightarrow \infty$  контактні напруження прямують до нуля. Зауважимо, що абсциса перетину графіком контактного тиску граничної кривої, що відповідає пружному шару ( $t \rightarrow \infty$ ), своя для кожного моменту часу. Отже, у випадку в'язкопружного шару контактний тиск між ним та жорсткою основою в околі точки прикладання зосередженої сили є меншим від відповідного контактного тиску у випадку пружного шару і змінюється з координатою повільніше (рис. 5).

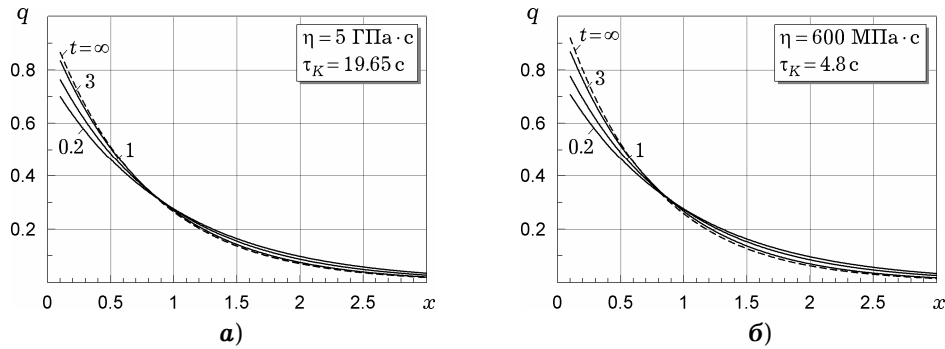


Рис. 5

**Висновки.** Таким чином, побудовано і досліджено узагальнену модель в'язкопружного анізотропного проміжного шару (покриття), що враховує деформацію поперечного зсуву, причому остання обставина спричиняє ненульовий стрибок нормальних напружень в області спряження. Показано, що, коли одне зі спряжуваних тіл є абсолютно жорстким, з узагальненої моделі (3) отримуються моделі Власова [4, 7] і Муравського [7, 8] для квазістатичного випадку за лінійного розподілу переміщень по товщині шару. Встановлено, що врахування деформації поперечного зсуву у проміжному шарі (покритті) у випадку опуклого штамп збільшує нормальну реакцію основи у порівнянні з моделлю Вінклера. Побудовано розв'язок задачі про дію нормального розподіленого навантаження на в'язкопружний ізотропний шар, зчеплений з жорсткою основою, у випадку плоскої деформації і вивчено основні закономірності його деформування в часі у випадку зосередженої сили, що діє у початку координат. Встановлено пропорційність між часом запізнення  $\tau_d$  реакції шару на зовнішню силову дію і часом запізнення  $\tau_K$ . Встановлено також монотонно спадну залежність коефіцієнта пропорційності у цьому співвідношенні від максимальної відносної різниці між в'язкопружним та пружним розв'язками та його слабку залежність від коефіцієнта Пуассона матеріалу шару. Отримано формулу для нормальних контактних напружень на поверхні спряження в'язкопружного шару з жорсткою основою і побудовано графіки розподілу контактних тисків за координатою в різні моменти часу. Встановлено слабку залежність контактного тиску від часу, внаслідок чого його розподіл за координатою близький до експоненціального розподілу, який має місце у випадку пружного шару ( $t \rightarrow \infty$ ). Виявлено, що у певному околі точки прикладання зосередженої сили контактний тиск є зростаючою функцією часу і завжди менший від контактного тиску у випадку пружного шару. Поза цим околом контактний тиск спадає з часом, причому всюди граничним значенням при  $t \rightarrow \infty$  є контактний тиск у випадку пружного шару. На нескінченності контактні напруження прямують до нуля. В цілому контактний тиск у випадку в'язкопружного шару змінюється з координатою повільніше, ніж у випадку пружного шару. Встановлені закономірності дають картину деформування в'язкопружного шару за координатою і в часі, а також описують його взаємодію з жорсткою основою.

1. Александров В. М., Клиндухов В. В. Контактные задачи для двухслойного упругого основания с неидеальной механической связью между слоями // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2000. – № 3. – С. 84–92.
2. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями с прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 487 с.
3. Арутюнян Н. Х., Манжиров А. В. Контактные задачи теории ползучести. – Ереван: Изд-во НАН РА, 1999. – 318 с.
4. Власов В. З., Леонтьев Н. Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – Москва: Физматгиз, 1960. – 491 с.



5. Гудрамович В. С. Механика контактных взаимодействий оболочечных систем при локальном нагружении // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 24–51.  
Te same: Hudramovich V. S. Contact mechanics of shell structures under local loading // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 7. – P. 708–729.
6. Казаков К. Е., Манжиров А. В. О конформном контакте слоистых оснований и штампов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2008. – № 3. – С. 227–240.  
Te same: Kazakov K. E., Manzhirov A. V. Conformal contact between layered foundations and punches // Mech. Solids. – 2008. – **43**, No. 3. – P. 512–524.
7. Моссаковский В. И., Гудрамович В. С., Макеев Е. М. Контактные взаимодействия элементов оболочечных конструкций. – Киев: Наук. думка, 1988. – 288 с.
8. Муравский Г. Б. О модели упругого основания // Строит. механика и расчёт сооружений. – 1967. – № 6. – С. 14–17.
9. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчёта фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – Москва–Ленинград: Гос. стройиздат, 1954. – 56 с.
10. Скородинський І. С. Термов'язкопружна модель шару між двома тілами та умови їх спряження // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2007. – **43**, № 3. – С. 35–43.  
Te same: Skorodynskiy I. S. Thermoviscoelastic model of a layer between two bodies and conditions of their conjugation // Mater. Sci. – 2007. – **43**, No. 3. – P. 331–342.
11. Фрейденталь А., Гейрингер Х. Математические теории неупругой сплошной среды. – Москва: Физматгиз, 1962. – 432 с.
14. Huang Z. Y., Lü C. F., Chen W. Q. Benchmark solutions for functionally graded thick plates resting on Winkler–Pasternak elastic foundations // Compos. Struct. – 2008. – **85**, No 2. – P. 95–104.
12. Kerr A. D. Elastic and viscoelastic foundation models // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1964. – **31**, No 3. – P. 491–498.
13. Kim S. M., Won M. C., McCullough B. F. Behavior of plate on viscoelastic foundation under moving harmonic loads // Proc. 15<sup>th</sup> ASCE Engineering Mechanics Conf., June 2–5, 2002. – New York: Columbia Univ., 2002. – P. 1–8 (CD-ROM).
15. Reissner E. A note on deflections of plates on a viscoelastic foundation // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1958. – **25**, No. 1. – P. 144–145.
16. Zenkour A. M., Allam M. N. M., Sobhy M. Bending of a fiber-reinforced viscoelastic composite plate resting on elastic foundations // Arch. Appl. Mech. – 2011. – **81**, No 1. – P. 77–96.

#### **ОБОБЩЁННАЯ МОДЕЛЬ ВЯЗКОУПРУГОГО ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ ИЛИ ПОКРЫТИЯ, УЧИТЫВАЮЩАЯ ДЕФОРМАЦИЮ ПОПЕРЕЧНОГО СДВИГА**

*Построена и исследована обобщённая модель вязкоупругого анизотропного промежуточного слоя или покрытия, работающего на сжатие и поперечный сдвиг. Решена задача о действии нормальной распределённой нагрузки, зависящей от времени, на изотропный вязкоупругий слой на жёстком основании и изучен случай сосредоточенной силы, действующей в начале координат.*

#### **GENERALIZED MODEL OF VISCOELASTIC INTERPHASE LAYER OR COATING TAKING INTO ACCOUNT THE TRANSVERSE SHEAR DEFORMATION**

*A generalized model of viscoelastic anisotropic interphase layer or coating working in shrinkage and the transverse shear is constructed and investigated. The problem on the action of normal distributed loading depending on time on the isotropic viscoelastic layer on the rigid foundation is solved. The case of concentrated force acting at the origin point is studied.*

Ин-т прикл. проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підтригача НАН України, Львів

Одержано  
06.03.12