

**ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ КВАЗІІДЕАЛЬНИХ ФІЛЬТРАЦІЙНИХ ПРОЦЕСІВ У НЕЛІНІЙНО-ШАРУВАТИХ ПОРИСТИХ СЕРЕДОВИЩАХ**

*На основі синтезу числових методів квазіконформних відображень та сумарних зображень у поєднанні з декомпозицією області за методом Шварца розроблено конструктивний підхід до числового розв'язання нелінійних модельних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для нелінійно-шаруватих криволінійних областей за умов ідентифікації параметрів (коефіцієнта провідності, характерних значень потенціалу на екіпотенціальних лініях поділу шарів).*

**Вступ.** Проблемам ідентифікації параметрів математичних моделей, розробці підходів до постановок і розв'язування відповідних задач присвячено значну кількість робіт [12–14, 16, 17]. Зокрема, розроблено методи, що базуються на принципі регуляризації А. Н. Тихонова, градієнтні методи ідентифікації параметрів багатокомпонентних розподілених систем, що полягають у побудові градієнтів квадратичних функціоналів-нев'язок на основі розв'язання прямих і обернених задач, описані у роботах В. С. Дейнеки, В. І. Сергієнка (див., наприклад, [11]), методи граничних інтегральних рівнянь тощо. Проте спеціальні класи задач ідентифікації параметрів квазіідеальних процесів, що описуються еліптичними системами диференціальних рівнянь, залишилися поза увагою дослідників.

У роботах [2, 4, 15 та ін.] запропоновано методикою моделювання квазіідеальних полів для одно-, дво- та тризв'язних криволінійних областей, обмежених лініями течії і екіпотенціальними лініями, що базується на поєднанні числових методів комплексного аналізу [1, 3, 12], сумарних зображень [6, 7, 9] та декомпозиції області за методом Шварца [5]. Використання синтезу методів сумарних зображень і квазіконформних відображень дозволяє значно підвищити ефективність запропонованого алгоритму, оскільки дає можливість у комплексі (сумарно) враховувати вплив усіх граничних і внутрішніх вузлів, що пришвидшує досягнення спряженості шуканих гармонічних функцій. Застосування альтернуючого методу Шварца для декомпозиції шаруватих областей по прошарках сталості коефіцієнта провідності (ділянках з «накладками») дає змогу ефективно знаходити неперервні розв'язки задач з розривними коефіцієнтами, розв'язувати задачі у більш «зручних» підобластях, розпаралелювати обчислювальний процес, оскільки розрахунки у підобластях на кожному ітераційному кроці є незалежними один від одного і можуть виконуватись паралельно з використанням сучасних комп'ютерних технологій.

Розроблені обчислювальні технології розв'язання нелінійних модельних задач для одно-, дво- та тризв'язних криволінійних шаруватих областей, у яких провідність середовища задається як кусково-стала функція, залежна від шуканого квазіпотенціалу і/або функції течії, можуть бути успішно використані не лише для дослідження і числового розв'язання прямих задач про побудову динамічної сітки, знаходження поля швидкості, витрат та інших характерних параметрів моделі, але і для числового розв'язування певного класу обернених задач.

Метою цієї роботи є поширення запропонованого підходу на розв'язання нелінійних задач ідентифікації значень кусково-сталого коефіцієнта провідності у підобластях сталості (з урахуванням зворотного впливу на конфігурацію цих підобластей потенціалу поля), а також значень потенціалу на екіпотенціальних лініях поділу цих підобластей у криволінійній нелінійно-шаруватій області. (Під нелінійно-шаруватими розуміємо середовища із кусково-сталим коефіцієнтом провідності, підобласті сталості якого визна-

чаються еквіпотенціальними лініями.) Спочатку пропонуємо нову постановку та підхід до розв'язання такого роду прямих задач, а далі у відповідних розділах формулюємо додаткові умови (умови перевизначення) і наводимо відповідні зміни до вихідного алгоритму для розв'язування задач ідентифікації коефіцієнта провідності та критичних значень потенціалу.

**Постановка прямої задачі** (про знаходження потенціалу поля і побудову динамічної сітки з визначенням еквіпотенціальних ліній поділу підобластей сталості коефіцієнта провідності). Розглянемо квазіідеальний стаціонарний процес фільтрації у криволінійній області  $G_z$  ( $z = x + iy$ ), обмежений лініями течії  $L_0 = \{z : f_1(x, y) = 0\}$ ,  $L^0 = \{z : f_3(x, y) = 0\}$  і еквіпотенціальними  $L_* = \{z : f_2(x, y) = 0\}$ ,  $L^* = \{z : f_4(x, y) = 0\}$  (рис. 1), який описується рівняннями [3]:  $\mathbf{v} = \alpha \text{grad } \varphi$ ,  $\text{div } \mathbf{v} = 0$ , де  $\mathbf{v} = v_x(x, y) + iv_y(x, y)$  – швидкість,  $\varphi$  – потенціал поля такий, що  $\varphi|_{L_*} = \varphi_*$ ,  $\varphi|_{L^*} = \varphi^*$ ,  $-\infty < \varphi_* < \varphi^* < +\infty$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{L_0} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{L^0} = 0$  ( $\mathbf{n}$  – зовнішня нормаль до відповідної лінії),  $\alpha$  – коефіцієнт провідності середовища – кусково-стала функція, лініями розриву якої є еквіпотенціальні лінії

$$\alpha(\varphi(x, y)) = \{\alpha_\ell : \varphi^{(\ell-1)} < \varphi \leq \varphi^{(\ell)}, \ell = 1, \dots, s\},$$

де  $\alpha_\ell$  – дійсні додатні числа.

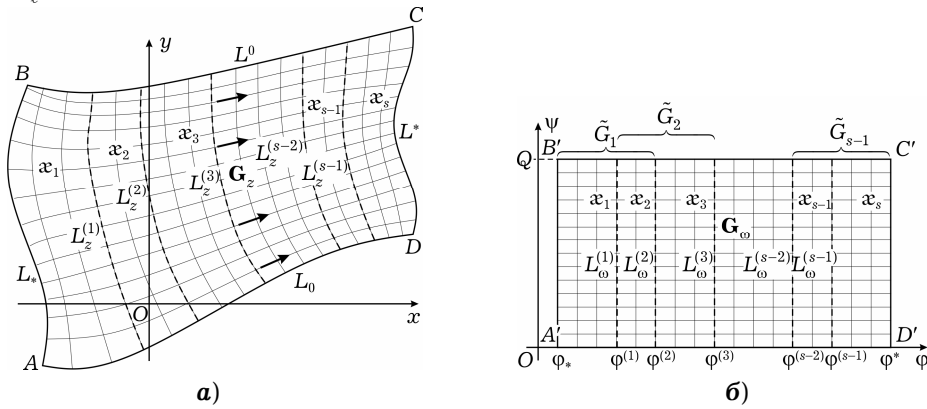


Рис. 1. Схема фізичної криволінійної області та відповідної області комплексного квазіпотенціалу.

Ввівши аналогічно, як в [4], функцію течії  $\psi = \psi(x, y)$  (комплексно-спряжену до  $\varphi$ ), приходимо до більш загальної задачі про кусково-конформне відображення  $\omega = \omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  області  $G_z = \left( \bigcup_{\ell=1}^s G_z^{(\ell)} \right) \cup \left( \bigcup_{\ell=1}^{s-1} L_z^{(\ell)} \right)$ , де  $G_z^{(\ell)} = \{z \in G_z : \varphi^{(\ell-1)} < \varphi < \varphi^{(\ell)}\}$ ,  $L_z^{(\ell)} = \{z \in G_z : \varphi = \varphi^{(\ell)}\}$ , на відповідну прямокутну область комплексного квазіпотенціалу  $G_\omega = \{\omega = \varphi + i\psi : \varphi_* < \varphi < \varphi^*, 0 < \psi < Q\} = \left( \bigcup_{\ell=1}^s G_\omega^{(\ell)} \right) \cup \left( \bigcup_{\ell=1}^{s-1} L_\omega^{(\ell)} \right)$ , де  $G_\omega^{(\ell)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi^{(\ell-1)} < \varphi < \varphi^{(\ell)}, 0 < \psi < Q\}$ ,  $L_\omega^{(\ell)} = \{\omega \in G_\omega : \varphi = \varphi^{(\ell)}\}$ , з невідомою повною витратою  $Q = \int_{L_*} -v_y dx + v_x dy$  і невідомими лініями поділу  $L_z^{(\ell)}$ , уздовж яких задано відповідні умови спряження:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= x \frac{\partial \psi}{\partial y}, & x \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x}, & (x, y) &\in G_z^{(\ell)}, \\
x &= x_\ell, & (x, y) &\in G_z^{(\ell)}, & \ell &= 1, \dots, s, \\
[\varphi]_{L_z^{(\ell)}} &= 0, & \left[ x \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}} \right]_{L_z^{(\ell)}} &= 0, & \ell &= 1, \dots, s-1, \\
\varphi|_{L_*} &= \varphi_*, & \varphi|_{L^*} &= \varphi^*, & \psi|_{L_0} &= 0, & \psi|_{L^0} &= \int_{L_*} -\frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy, & (1)
\end{aligned}$$

де  $[f]$  – стрибок функції  $f$  при переході по нормалі через відповідну лінію.

Обернена (див. [4]) до (1) крайова задача про квазіконформне відображення  $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$  області  $G_\omega$  на  $G_z$  зводиться до задачі [2]

$$\begin{aligned}
\Delta x(\varphi, \psi) &= 0, & \Delta y(\varphi, \psi) &= 0, & (\varphi, \psi) &\in G_\omega^{(\ell)}, & \ell &= 1, \dots, s, \\
[(x, y)]_{\varphi=\varphi^{(\ell)}} &= 0, & \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(\ell)}} &= \left[ \frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right]_{\varphi=\varphi^{(\ell)}} = 0, & \ell &= 1, \dots, s-1, \\
f_1(x(\varphi_*, \psi), y(\varphi_*, \psi)) &= 0, & f_3(x(\varphi^*, \psi), y(\varphi^*, \psi)) &= 0, & 0 &\leq \psi \leq Q, \\
f_2(x(\varphi, Q), y(\varphi, Q)) &= 0, & f_4(x(\varphi, 0), y(\varphi, 0)) &= 0, & \varphi_* &\leq \varphi \leq \varphi^*, \\
\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi_*} &= 0, & \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} \right)_{\psi=Q} &= 0, \\
\left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial f_3}{\partial x} \right)_{\varphi=\varphi^*} &= 0, & \left( \frac{\partial x}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial \psi} \cdot \frac{\partial f_4}{\partial x} \right)_{\psi=0} &= 0, \\
Q &= \int_0^Q \frac{1}{J} \left( \frac{\partial x^2}{\partial \psi} + \frac{\partial y^2}{\partial \psi} \right) d\psi, & J &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} \frac{\partial y}{\partial \psi} - \frac{\partial x}{\partial \psi} \frac{\partial y}{\partial \varphi}. & (2)
\end{aligned}$$

**Різницьвий аналог.** Для знаходження розв'язку задачі (2) в області комплексного квазіпотенціалу означимо рівномірну сіткову область  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{\ell=1}^s G_\omega^{\gamma(\ell)}$  так, щоб відповідні вузли належали лініям поділу  $\varphi = \varphi^{(\ell)}$  (важатимемо, що таке розбиття є можливим):  $G_\omega^\gamma = \{(\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta_\varphi \cdot i, i = 0, \dots, m+1, \Delta_\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \varphi_{m_\ell} = \varphi^{(\ell)}, \ell = 1, \dots, s-1, 0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{s-1} < m_s = m+1, \psi_j = \Delta_\psi \cdot j, j = 0, \dots, n+1, \Delta_\psi = Q/n+1, m, m_\ell, n \in \mathbb{N}\}$ ,  $G_\omega^{\gamma(\ell)} = \{(\varphi_i, \psi_j) \in G_\omega^\gamma, i = m_{\ell-1}, \dots, m_\ell\}$ , де  $\Delta_\varphi, \Delta_\psi$  – кроки сітки відповідно за  $\varphi$  та за  $\psi$ ,  $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$  – квазіконформний інваріант. Зауважимо, що у випадку, коли неможливо забезпечити умову потрапляння  $\varphi^{(\ell)}$  у вузли сітки [7], можна використовувати нерівномірне розбиття або розраховувати сітку наближено з урахуванням відповідних похибок.

Розв'язки рівнянь Лапласа у внутрішніх вузлах сіткової області комплексного квазіпотенціалу (сукупності суміжних вздовж вертикальних ліній сіткових прямокутників) з урахуванням умов спряження знаходимо шляхом поєднання альтернуючого методу Шварца [5, 8] і методу сумарних зображень для диференціальних рівнянь з розривними коефіцієнтами у ба-

гатошарових областях з вертикальними лініями поділу [5–7]. Для цього область  $G_\omega^\gamma$  розіб'ємо на сіткові прямокутники з накладками:  $G_\omega^\gamma = \bigcup_{\ell=1}^{s-1} \tilde{G}_\ell$ , де  $\tilde{G}_\ell = G_\omega^{\gamma(\ell)} \cup G_\omega^{\gamma(\ell+1)}$ . При цьому отримуємо  $s-1$  підзадачу задачі (2) для підобластей  $\tilde{G}_\ell$  [5], які у внутрішніх вузлах прошарків  $\tilde{G}_\ell$  з відповідними умовами спряження уздовж ліній  $L_z^{(\ell)}$  апроксимуємо різницевиими рівняннями [2]:

$$\begin{aligned} x_{i+1,j}^{(\ell)} - 2(1 + \gamma^2)x_{i,j}^{(\ell)} + x_{i-1,j}^{(\ell)} + \gamma^2(x_{i,j+1}^{(\ell)} + x_{i,j-1}^{(\ell)}) &= 0, & x_{m_\ell,j}^{(\ell)} &= x_{m_\ell,j}^{(\ell+1)}, \\ y_{i+1,j}^{(\ell)} - 2(1 + \gamma^2)y_{i,j}^{(\ell)} + y_{i-1,j}^{(\ell)} + \gamma^2(y_{i,j+1}^{(\ell)} + y_{i,j-1}^{(\ell)}) &= 0, & y_{m_\ell,j}^{(\ell)} &= y_{m_\ell,j}^{(\ell+1)}, \\ \alpha_{\ell+1}(x_{m_\ell,j}^{(\ell)} - x_{m_{\ell-1},j}^{(\ell)}) &= \alpha_\ell(x_{m_{\ell+1},j}^{(\ell+1)} - x_{m_\ell,j}^{(\ell+1)}), \\ \alpha_{\ell+1}(y_{m_\ell,j}^{(\ell)} - y_{m_{\ell-1},j}^{(\ell)}) &= \alpha_\ell(y_{m_{\ell+1},j}^{(\ell+1)} - y_{m_\ell,j}^{(\ell+1)}), \\ i &= m_{\ell-1} + 1, \dots, m_{\ell+1} - 1, & j &= 1, \dots, n, & \ell &= 1, \dots, s-1, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $x_{i,j}^{(\ell)} = x(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $y_{i,j}^{(\ell)} = y(\varphi_i, \psi_j)$ ,  $(\varphi_i, \psi_j) \in \tilde{G}_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ . Ці схеми мають другий порядок апроксимації, їх збіжність і стійкість досліджено в [10].

Розв'язки цих підзадач знаходимо в процесі ітерацій за формулами сумарних зображень ( $i = m_{\ell-1} + 1, \dots, m_{\ell+1} - 1$ ,  $j = 1, \dots, n$ ):

$$\begin{aligned} x_{i,j}^{(\ell)} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \frac{2\tilde{\alpha}_\ell}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} \mu_k^i a_k^{(\ell)} + \frac{2}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} v_k^i b_k^{(\ell)} + \gamma^2 \sum_{g=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell+1}-1} \Phi(i, g) h_{g,k}^{(x)} \right), \\ y_{i,j}^{(\ell)} &= \sum_{k=1}^n p_{j,k} \left( \frac{2\tilde{\alpha}_\ell}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} \mu_k^i c_k^{(\ell)} + \frac{2}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} v_k^i d_k^{(\ell)} + \gamma^2 \sum_{g=m_{\ell-1}+1}^{m_{\ell+1}-1} \Phi(i, g) h_{g,k}^{(y)} \right), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $\tilde{\alpha}_\ell = \alpha_\ell / \alpha_{\ell+1}$ ,  $h_{g,k}^{(x)} = p_{1,k} x_{g,0} + p_{n,k} x_{g,n+1}$ ,  $h_{g,k}^{(y)} = p_{1,k} y_{g,0} + p_{n,k} y_{g,n+1}$ , елементи матриці  $P$ -трансформацій  $P = [p_{j,k}]_{j,k=1}^n$  є такими:  $p_{j,k} = \frac{2}{\sqrt{2n+1}} \sin \frac{jk\pi}{n+1}$ , елементи діагональних матриць  $\mu^i = [\mu_k^i]_{k=1}^n$ ,  $v^i = [v_k^i]_{k=1}^n$  визначаємо за формулами  $\mu_k = v_k^{-1} = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}$ ,  $\eta_k = 1 + \gamma^2(1 - \cos k\pi/n + 1)$ , сталі  $a_k^{(\ell)}$ ,  $b_k^{(\ell)}$ ,  $c_k^{(\ell)}$ ,  $d_k^{(\ell)}$  знаходимо ітераційно з крайових умов на лініях поділу, а функція  $\Phi(i, g)$  має вигляд

– для  $i = m_{\ell-1} + 1, \dots, m_\ell$ :

$$\Phi(i, g) = \begin{cases} v_k^{|i-g|} + \frac{1 - \tilde{\alpha}_\ell}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} \frac{v_k^{2m_\ell-i-g}}{\mu_k - v_k}, & g = m_{\ell-1} + 1, \dots, m_\ell - 1, \\ \frac{v_k^{m_\ell-i}}{\mu_k - v_k}, & g = m_\ell, \\ \frac{2\tilde{\alpha}_\ell}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} \frac{v_k^{g-i}}{\mu_k - v_k}, & g = m_\ell + 1, \dots, m_{\ell+1} - 1; \end{cases}$$

– для  $i = m_\ell + 1, m_{\ell+1} - 1$ :

$$\Phi(i, g) = \begin{cases} \frac{2}{1 + \tilde{\alpha}_\ell} \frac{v_k^{i-g}}{\mu_k - v_k}, & g = m_{\ell-1} + 1, \dots, m_\ell - 1, \\ \frac{v_k^{i-m_\ell}}{\mu_k - v_k}, & g = m_\ell, \\ v_k^{|i-g|} + \frac{\tilde{\alpha}_\ell - 1}{\tilde{\alpha}_\ell + 1} \frac{v_k^{i+g-2m_\ell}}{\mu_k - v_k}, & g = m_\ell + 1, \dots, m_{\ell+1} - 1. \end{cases}$$

Обґрунтування ефективності використання методів сумарних зображень як компонент загального підходу на основі комплексного аналізу до такого типу задач, оцінку трудомісткості відповідних обчислень і порівняння отриманих числових результатів із розрахунками інших дослідників і з точними розв'язками викладено у [4].

Крайові умови та умови ортогональності в околі границі області апроксимуємо аналогічно до [3, 4]:

$$\begin{aligned} f_1(x_{0,j}, y_{0,j}) &= 0, & f_3(x_{m+1,j}, y_{m+1,j}) &= 0, & j &= 0, \dots, n+1, \\ f_2(x_{i,n+1}, y_{i,n+1}) &= 0, & f_4(x_{i,0}, y_{i,0}) &= 0, & i &= 0, \dots, m+1, \\ f'_{1x}(x_{0,j}, y_{0,j})(y_{1,j} - y_{0,j}) - f'_{1y}(x_{0,j}, y_{0,j})(x_{1,j} - x_{0,j}) &= 0, \\ f'_{3x}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(y_{m,j} - y_{m+1,j}) - f'_{3y}(x_{m+1,j}, y_{m+1,j})(x_{m,j} - x_{m+1,j}) &= 0, \\ f'_{2x}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(y_{i,n} - y_{i,n+1}) - f'_{2y}(x_{i,n+1}, y_{i,n+1})(x_{i,n} - x_{i,n+1}) &= 0, \\ f'_{4x}(x_{i,0}, y_{i,0})(y_{i,1} - y_{i,0}) - f'_{4y}(x_{i,0}, y_{i,0})(x_{i,1} - x_{i,0}) &= 0, \\ & i = 1, \dots, m, & j &= 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (5)$$

Формули для знаходження повної витрати  $Q$  і квазіконформного інваріанта  $\gamma$  в процесі ітераційних наближень мають вигляд [2, 3]:

$$\begin{aligned} Q &= \Delta_\phi \frac{n+1}{\gamma}, & \gamma &= \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i,j=0}^{m,n} \frac{1}{\alpha_i} \gamma_{i,j}, \\ \gamma_{i,j} &= \left( \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i,j+1})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i,j+1})^2} \right) \times \\ & \quad \times \left( \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{(x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j})^2 + (y_{i+1,j+1} - y_{i+1,j})^2} \right)^{-1}, \\ \alpha_i &= \begin{cases} \alpha_\ell, & m_{\ell-1} < i < m_\ell, \\ \frac{\alpha_{\ell-1} + \alpha_\ell}{2}, & i = m_\ell. \end{cases} \end{aligned} \quad (7)$$

**Алгоритм** знаходження розв'язку сформульованої задачі побудовано шляхом поетапної параметризації величини  $\gamma$  (або значення витрати  $Q$ ), граничних і внутрішніх вузлів динамічної сітки  $G_z^\gamma$  з використанням ідей методу блочної ітерації [1, 3]. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничних потенціалів  $\phi_*$  і  $\phi^*$ , значення потенціалу  $\phi^{(\ell)}$  на лініях поділу та відповідні значення коефіцієнта провідності  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ . Задаємо кількість  $m \times n$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega^\gamma$  (з

урахуванням зазначеної особливості розбиття області), нульове наближення невідомої величини  $\gamma$  (або шуканої витрати  $Q$ ), параметри точності наближення  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  і визначаємо  $m_\ell = (\varphi^{(\ell)} - \varphi_*)/\Delta_\varphi$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ , та початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сітки з урахуванням крайових умов (5).

Наближення значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах сітки отримуємо як результат ітераційного процесу, що є чисельним аналогом класичного методу Шварца [5]:

$$x_{i,j} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} x_{i,j}^{(\ell, \xi)}, \quad y_{i,j} = \lim_{\xi \rightarrow \infty} y_{i,j}^{(\ell, \xi)},$$

$$i = m_{\ell-1} + 1, \dots, m_{\ell+1} - 1, \quad j = 1, \dots, n,$$

де  $\xi$  – номер кроку цього (внутрішнього) процесу. Значення  $(x_{i,j}^{(\ell, \xi)}, y_{i,j}^{(\ell, \xi)})$  знаходимо за формулами сумарних зображень (4), де для спрощення викладок номер  $\xi$  кроку ітерації опущено. При цьому значення граничних вузлів у підобластях  $\tilde{G}_\ell$  визначаємо як значення внутрішніх вузлів (уздовж відповідних вертикальних відрізків) сусідніх підобластей з накладками [5].

Виконання умови  $\max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(\ell, \xi)} - x_{i,j}^{(\ell, \xi-1)})^2 + (y_{i,j}^{(\ell, \xi)} - y_{i,j}^{(\ell, \xi-1)})^2} \leq \varepsilon_2$  може бути підставою до завершення цього циклу. Проте зазначимо, що достатньо провести щонайбільше  $s+1$  ітерацію за  $\xi$  для отримання прийняттого результату, оскільки загальний алгоритм передбачає кількаразове повторення цих обчислювальних процедур при подальшому уточненні інших параметрів задачі.

Далі за формулами (7) знаходимо початкові наближення повної витрати  $Q$  і квазіконформного інваріанта  $\gamma$ . Уточнюємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах (координати граничних вузлів динамічної сітки) за формулами (5), (6), знаходимо нове наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах (координати внутрішніх вузлів динамічної сітки) шляхом ітерацій за  $\xi$  у підобластях  $\tilde{G}_\ell$  за формулами сумарних зображень (4), перераховуємо  $Q$  та  $\gamma$  за формулами (7).

Наприкінці кожної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів динамічної сітки [3]: якщо величина зміщення вузлів на границі за проведену останню загальну ітерацію більша ніж  $\varepsilon_1$ , то переходимо до подальшого уточнення вузлів, інакше – зупиняємо ітераційний процес і оцінюємо ступінь конформності отриманого відображення [3]. Зауважимо також, що зменшити нев'язку конформності можна не лише за рахунок збільшення кількості вузлів розбиття, а й шляхом зміни співвідношення між  $n$  і  $m$  так, щоб виконувалася умова  $\gamma \approx 1$ , тобто умова близькості сітки до квадратної.

#### **Задачі ідентифікації параметрів.**

1. Розглянемо задачу (у випадку монотонної залежності координат граничних ліній) ідентифікації значень коефіцієнта провідності  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , у підобластях сталості  $G_z^{(\ell)}$ , що обмежені шуканими екіпотенціальними лініями  $L_z^{(\ell)}$ , якщо відомими є витрата  $Q$  і значення потенціалу  $\varphi^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ , на лініях поділу та абсциси точок  $H^{(\ell)}(x^{(\ell)}, y^{(\ell)}) = L_0 \cap L_z^{(\ell)}$  (або  $H^{(\ell)}(x^{(\ell)}, y^{(\ell)}) = L^0 \cap L_z^{(\ell)}$ ). Задача зводиться до розв'язування задачі (2) з відомими  $Q$  і  $\varphi^{(\ell)}$  та невідомими  $\alpha_\ell$ , а її різницевий аналог будуємо аналогічно, як у попередній (прямій) задачі, де замість формул (7) для ітерацій-

ного розрахунку  $Q$  та  $\gamma$  використовуємо формулу для визначення значень коефіцієнта провідності в процесі ітераційних наближень:

$$\alpha_\ell = \frac{1}{\gamma(m_\ell - m_{\ell-1})(n+1)} \sum_{i=m_{\ell-1}, j=0}^{m_\ell-1, n} \gamma_{i,j}, \quad \ell = 1, \dots, s. \quad (8)$$

Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації коефіцієнта провідності і одночасного розрахунку вузлів динамічної сітки з лініями поділу підобластей сталості  $\alpha_\ell$  можна описати таким чином. Як і в прямій задачі, вводимо необхідні дані, початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сітки  $G_\omega^\gamma$  з урахуванням крайових умов (5) і відомих координат точок  $H^{(\ell)}$ , задаємо нульові наближення значень коефіцієнта провідності. Обчислюємо початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах  $G_\omega^\gamma$  шляхом ітерацій за  $\xi$  у підобластях  $\tilde{G}_\ell$  за формулами сумарних зображень (4), перераховуємо  $\alpha_\ell$  за формулою (8).

Далі уточнюємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах за формулами (5), (6) з урахуванням точок  $H^{(\ell)}$ , знаходимо їх нове наближення у внутрішніх вузлах шляхом ітерацій за  $\xi$  з використанням формул (4), перераховуємо значення коефіцієнта провідності за формулою (8).

Наприкінці кожної загальної ітерації перевіряємо виконання умов стабілізації координат граничних вузлів динамічної сітки: якщо величина зміщення вузлів на границі за останню проведену ітерацію не перевищує заданого параметра точності, то ітераційний процес зупиняємо.

2. Алгоритм розв'язання задачі про визначення значень потенціалу  $\phi^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ , на шуканих еквіпотенціальних лініях поділу  $L_2^{(\ell)}$  підобластей сталості коефіцієнта провідності, якщо відомими є повна витрата  $Q$  і значення коефіцієнта провідності  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , у підобластях  $G_2^{(\ell)}$ , можна описати так. Задаємо початкові наближення потенціалів  $\phi^{(\ell)}$ , визначаємо  $m_\ell$  і початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах сітки з урахуванням крайових умов (5). Обчислюємо початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах  $G_\omega^\gamma$  шляхом ітерацій за  $\xi$  у підобластях  $\tilde{G}_\ell$  за формулами сумарних зображень (4), знаходимо розрахункові значення квазіконформного інваріанта  $\tilde{\gamma}_\ell$  у прошарках  $\tilde{G}_\ell$ :

$$\tilde{\gamma}_\ell = \frac{1}{(m_\ell - m_{\ell-1})(n+1)} \sum_{i=m_{\ell-1}, j=0}^{m_\ell-1, n} \frac{1}{\alpha_i} \gamma_{i,j}, \quad \ell = 1, \dots, s, \quad (9)$$

і порівнюємо їх із  $\gamma = \Delta_\phi / \Delta_\psi$ . Враховуючи монотонну залежність  $Q$  (а отже, й  $\gamma$ ) від різниці потенціалів і співвідношення між  $\alpha_\ell$  і  $\alpha_{\ell+1}$ , уточнюємо значення  $\phi^{(\ell)}$ , змінюючи відповідно  $m_\ell$  до тих пір, поки значення  $|\tilde{\gamma}_\ell - \gamma|$  не стане мінімальним: у випадку  $\alpha_\ell > \alpha_{\ell+1}$  при  $\tilde{\gamma}_\ell < \gamma$  необхідно зменшувати  $m_\ell$ , інакше – збільшувати, а у випадку  $\alpha_\ell < \alpha_{\ell+1}$  – навпаки. Далі перераховуємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах за формулами (5), (6), знаходимо їх нове наближення у внутрішніх вузлах згідно з ітераціями за  $\xi$  з використанням формул (4) та розрахункові значення  $\tilde{\gamma}_\ell$ , підкоректуємо значення  $\phi^{(\ell)}$ . Умовою завершення алгоритму можна, як і раніше, вважати стабілізацію координат граничних вузлів динамічної сітки.

Зауважимо, що за наведеною схемою значення  $\varphi^{(\ell)}$  знаходимо з точністю до  $\Delta_\varphi$ , тому для оптимізації алгоритму пропонуємо спочатку провести обчислення за невеликої кількості вузлів розбиття області для знаходження приблизних значень потенціалу, які можуть бути використані як якісні початкові наближення для подальших розрахунків з необхідною точністю.

3. Нехай є можливість визначити (виміряти) значення потенціалу  $\varphi_\bullet^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , у точках  $H_\bullet^{(\ell)}(x_\bullet^{(\ell)}, y_\bullet^{(\ell)}) \in L_0$  або  $H_\bullet^{(\ell)}(x_\bullet^{(\ell)}, y_\bullet^{(\ell)}) \in L^0$ , причому виконується умова

$$\varphi_* < \varphi_\bullet^{(1)} < \varphi^{(1)} < \varphi_\bullet^{(2)} < \varphi^{(2)} < \dots < \varphi^{(\ell-1)} < \varphi_\bullet^{(\ell)} < \varphi^{(\ell)} < \dots < \varphi^{(s-1)} < \varphi_\bullet^{(s)} < \varphi^*. \quad (10)$$

Розглянемо задачу визначення значень потенціалу  $\varphi^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ , на шуканих еквіпотенціальних лініях поділу  $L_z^{(\ell)}$  підобластей сталості коефіцієнта провідності, граничного значення потенціалу  $\varphi^*$  та ідентифікацію значень коефіцієнта провідності  $\alpha_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , у підобластях  $G_z^{(\ell)}$ , якщо відомими є повна витрата  $Q$ , граничне значення потенціалу  $\varphi_*$  і значення потенціалу  $\varphi_\bullet^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , що задовольняють умову (10) у точках  $H_\ell(x_\bullet^{(\ell)}, y_\bullet^{(\ell)}) \in L_0$  (*випадок 1*) або  $H_\ell(x_\bullet^{(\ell)}, y_\bullet^{(\ell)}) \in L^0$  (*випадок 2*).

Пропонуємо такий алгоритм розв'язання цієї задачі. Вводимо необхідні параметри заданої фізичної області, значення граничного потенціалу  $\varphi_*$  і вимірних  $\varphi_\bullet^{(\ell)}$ , координати точок вимірювання  $x_\bullet^{(\ell)}$ ,  $y_\bullet^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , а також витрату  $Q$ . Задаємо кількість  $m \times n$  вузлів розбиття сіткової області  $G_\omega^\gamma$  (так, щоб значення  $\varphi_\bullet^{(\ell)}$  потрапили у вузли сітки), параметри точності і початкові наближення граничного значення потенціалу  $\varphi^*$  і значень потенціалу  $\varphi^{(\ell)}$ ,  $\ell = 1, \dots, s-1$ . Визначаємо  $m_\bullet^{(\ell)}$ ,  $m_\ell$  та початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах з урахуванням (5) і координат заданих точок  $x_{m_\bullet^{(\ell)}, \chi} = x_\bullet^{(\ell)}$ ,  $y_{m_\bullet^{(\ell)}, \chi} = y_\bullet^{(\ell)}$ . (Тут і надалі  $\chi = 0$  у *випадку 1* і  $\chi = n+1$  у *випадку 2*.) Знаходимо початкові наближення шуканих значень коефіцієнта провідності  $\alpha_\ell$ , наприклад, за формулою

$$\alpha_\ell = Q \left( \sqrt{\left( \frac{\varphi_\bullet^{(\ell)} - \varphi_\bullet^{(\ell-1)}}{x_\bullet^{(\ell)} - x_\bullet^{(\ell-1)}} \right)^2 + \left( \frac{\varphi_\bullet^{(\ell)} - \varphi_\bullet^{(\ell-1)}}{y_\bullet^{(\ell)} - y_\bullet^{(\ell-1)}} \right)^2} \right)^{-1}, \quad \ell = 1, \dots, s,$$

де  $\varphi_\bullet^{(0)} = \varphi_*$ ,  $\varphi_\bullet^{(s)} = \varphi^*$ ,  $x_\bullet^{(0)} = x_{0, \chi}$ ,  $x_\bullet^{(s)} = x_{m+1, \chi}$ ,  $y_\bullet^{(0)} = y_{0, \chi}$ ,  $y_\bullet^{(s)} = y_{m+1, \chi}$ .

Далі обчислюємо початкові значення функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах сітки шляхом ітерацій за  $\xi$  у підобластях  $\tilde{G}_\ell$  з використанням формул сумарних зображень (4), розраховуємо  $\varphi^*$  за формулою:  $\varphi^* = \varphi_* + (m+1)\gamma\Delta_\psi$  і знаходимо розрахункові значення  $\tilde{\gamma}_\ell$  у прошарках  $\tilde{G}_\ell$  за формулою (9) та порівнюємо їх із  $\gamma = \Delta_\varphi/\Delta_\psi$ . Як і в попередній задачі, враховуючи монотонну залежність  $Q$  (чи  $\gamma$ ) від різниці потенціалів і співвідношення між  $\alpha_\ell$  і  $\alpha_{\ell+1}$ , уточнюємо значення  $\varphi^{(\ell)}$ , змінюючи відповідним чином  $m_\ell$ .



Після цього перераховуємо значення функцій  $x$  і  $y$  у граничних вузлах за формулами (5), (6) із урахуванням координат точок вимірювання, знаходимо нове наближення значень функцій  $x$  і  $y$  у внутрішніх вузлах згідно з ітераційним процесом за  $\xi$  з використанням формул (4), уточнюємо значення  $x_\ell$ ,  $\ell = 1, \dots, s$ , за формулою

$$x_\ell = \frac{Q \sum_{i=m^{\ell-1}}^{m^{(\ell)}-1} \sqrt{(x_{i+1,\chi} - x_{i,\chi})^2 + (y_{i+1,\chi} - y_{i,\chi})^2}}{2(\varphi_\bullet^{(\ell)} - \varphi^{(\ell-1)}) \sum_{j=0}^n \sqrt{(x_{0,j+1} - x_{0,j})^2 + (y_{0,j+1} - y_{0,j})^2}},$$

розраховуємо нове значення  $\varphi^*$  і  $\gamma = \Delta_\varphi / \Delta_\psi$ , ще раз перераховуємо внутрішні вузли, знаходимо розрахункові значення  $\tilde{\gamma}_\ell$  за (9) і підкоректуємо значення  $\varphi^{(\ell)}$ . Умовою завершення алгоритму можна, як і раніше, вважати стабілізацію координат граничних вузлів динамічної сітки.

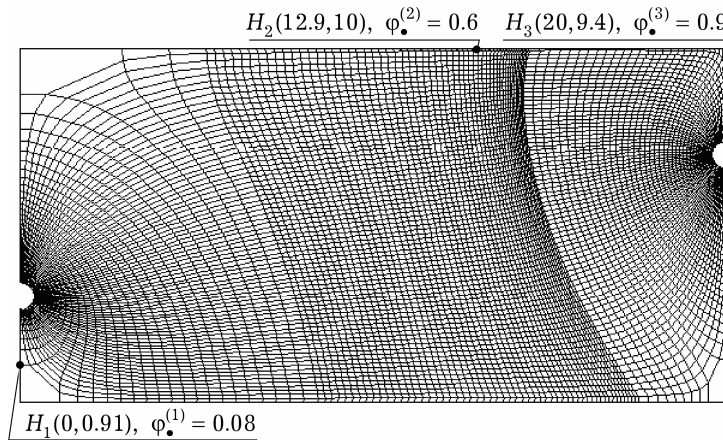


Рис. 2. Розрахована динамічна сітка та ідентифіковані значення за заданими потенціалами у точках вимірювання.

На рис. 2 подано розраховану за цим алгоритмом динамічну сітку та ідентифіковані значення коефіцієнта провідності і квазіпотенціалу в елементі симетрії нелінійно-шаруватого пласта при однорядній системі розміщення нагнітальних і експлуатаційних свердловин [3] (за припущення, що витісняюча речовина і речовина, що видобувається, мають однакові фізичні властивості) для області, обмеженої лініями

$$L^* = \{x = 0.4 \cos \tau + 20, y = 0.4 \sin \tau + 7, \pi/2 \leq \tau \leq 3\pi/2\},$$

$$L_* = \{x = 0.4 \cos \tau, y = 0.4 \sin \tau + 3, -\pi/2 \leq \tau \leq \pi/2\},$$

$$L_0 = \{x = 0, 0 \leq y \leq 2.8\} \cup \{0 \leq x \leq 20, y = 0\} \cup \{x = 20, 0 \leq y \leq 6.8\},$$

$$L^0 = \{x = 0, 3.2 \leq y \leq 10\} \cup \{0 \leq x \leq 20, y = 10\} \cup \{x = 20, 7.2 \leq y \leq 20\},$$

при  $\varphi_* = 0$ ,  $m \times n = 120 \times 75$ , заданих координатах точок вимірювання і значеннях потенціалу у них, а також значенні повної витрати  $Q = 0.4$  (отриманої як результат розв'язання прямої задачі при  $x_1 = x_3 = 2$ ,  $x_2 = 1$ ,  $\varphi^{(1)} = 0.25$ ,  $\varphi^{(2)} = 0.7$ ,  $\varphi^* = 1$ ). Як бачимо, максимальна відносна похибка ідентифікованих значень порівняно із заданими для прямої задачі становить  $\approx 0.5\%$ , що є цілком прийнятним для технічних задач.

**Висновки.** Розроблено конструктивний підхід до розв'язання нелінійних модельних фільтраційних задач теорії комплексного квазіпотенціалу для нелінійно-шаруватих криволінійних областей за умов ідентифікації параметрів: коефіцієнта провідності та характерних значень потенціалу на еквіпотенціальних лініях поділу шарів. Використання синтезу числових методів комплексного аналізу, сумарних зображень і декомпозиції області за методом Шварца для такого класу задач дає змогу суттєво пришвидшити досягнення спряженості відповідних шуканих гармонічних функцій, значною мірою дозволяє уникати накопичення обчислювальних похибок і є зручним для комп'ютерної реалізації.

1. Бомба А. Я., Булавацький В. М., Скопецький В. В. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки. – Київ: Наук. думка, 2007. – 292 с.
2. Бомба А. Я., Гладка О. М. Синтез числових методів квазіконформних відображень, сумарних зображень та декомпозиції області для розв'язання нелінійних крайових задач у шаруватих середовищах // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 2013. – № 1 (111). – С. 35–45.
3. Бомба А. Я., Кацтан С. С., Пригорницький Д. О., Яроцьак С. В. Методи комплексного аналізу. – Рівне: Нац. ун-т водн. госп-ва та природокористування, 2013. – 415 с.
4. Бомба А. Я., Кузьменко А. П., Гладка О. М. Синтез числових методів конформних відображень та сумарних зображень при моделюванні ідеальних полів для криволінійних областей // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 2. – С. 87–94.
5. Гладка О. М., Кузьменко А. П. Про розв'язок крайової задачі для рівняння дивергентного типу у нескінченній багат шаровій смугі // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України. – 1995. – Вип. 9. – С. 168–173.
6. Глуценко А. А., Кузьменко А. П. Приближенное аналитическое решение краевой задачи фильтрации через неоднородную плотину с различными отметками дна верхнего и нижнего бьефов // Вычисл. и прикл. математика. – 1984. – Вып. 54. – С. 50–56.
7. Ляшко И. И., Великоиваненко И. М. Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации. – Киев: Наук. думка, 1973. – 264 с.
8. Ляшко И. И., Грищенко А. Е. Решение краевых задач в слоистых грунтах // Алгоритмы и программы решения краевых задач математической физики. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1972. – 173 с.
9. Положий Г. Н., Скоробагатько А. А. Об одном классе формул суммарных представлений // Прикл. математика и механика. – 1965. – Вып. 1. – С. 20–40.
10. Самарский А. А. Теория разностных схем. – Москва: Наука, 1983. – 616 с.
11. Сергиенко И. В., Дейнека В. С. Идентификация параметров системы конвективно-диффузионного переноса // Кибернетика и системный анализ. – 2009. – № 1. – С. 42–63.
12. Bruckner G., Handrock-Meyer S., Langmach H. An inverse problem from the 2D-groundwater modelling // Inverse Problems. – 1998. – 14, No. 4. – P. 835–851.
13. Chan T. F., Tai X.-C. Level set and total variation regularization for elliptic inverse problems with discontinuous coefficients // J Comput Phys. – 2004. – 193, No. 1. – P. 40–66.
14. Hasanov A. Inverse coefficient problems for monotone potential operators // Inverse Problems. – 1997. – 13, No. 5. – P. 1265–1278.
15. Hladka O., Bomba A. The complex analysis method of numerical identification of parameters of quasilinear processes in doubly-connected nonlinear-layered curvilinear domains // J. Math. System Sci. – 2014. – 4, No. 7. – P. 514–521.
16. Pompl A. The boundary-domain integral method for elliptic systems. With application to shells // Lect. Notes Math. – 1683. – Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 1998. – 172 p.
17. Vogel C. R. Computational methods for inverse problems. – Philadelphia: SIAM, 2002. – 183 p.

#### **ЗАДАЧИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ КВАЗИИДЕАЛЬНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНО-СЛОИСТЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ**

*На основе синтеза численных методов квазиконформных отображений и суммарных представлений в сочетании с декомпозицией области по методу Шварца разработан конструктивный подход к численному решению нелинейных модельных задач теории комплексного квазипотенциала для нелинейно-слоистых криволинейных областей при условиях идентификации параметров (коэффициента проводимости, характерных значений потенциала на эквипотенциальных линиях раздела слоев).*

#### **PROBLEMS ON IDENTIFICATION OF THE PARAMETERS OF QUASIIDEAL FILTRATION PROCESSES IN NONLINEAR-LAYERED POROUS MEDIA**

*A constructive approach for numerical solving nonlinear model problems of the complex quasipotential theory in a nonlinear-layered curvilinear domains and the identification of parameters (conductivity coefficient, characteristic values of the potential on the equipotential lines of section layers) is developed on the basis of the synthesis of numerical methods of quasiconformal mappings and summary representations in combination with Schwartz domain decomposition method.*

Нац. ун-т водн. госп-ва  
та природокористування, Рівне

Одержано  
12.12.13