

В. І. Острик, А. Ф. Улітко

ЗГИН ЧАСТКОВО ОПЕРТОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНКИ

Розглянуто задачу про згин тонкої круглої пластинки під дією у її центрі зосередженої нормальної сили, коли пластинка опирається на дві симетрично розташовані контурні опори скінченної довжини. Інтегральне рівняння задачі типу Прандтля розв'язано чисельно методом механічних квадратур і методом ортогональних многочленів, а також зведено до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Обчислено розподіл узагальненої перерізуючої сили в опорі та прогин пластинки.

Як відомо [11, 14], у теорії згину тонких пластин Кірхгофа узагальнена перерізуюча сила в околах вершин тріщин і тонких жорстких включень має неінтегровну особливість порядку $-3/2$. Г. Я. Поповим показано [11], що відповідні задачі теорії тріщин мають розв'язки лише у класі неінтегровних функцій і їх слід розуміти в узагальненому сенсі.

Такий самий порядок особливості, $-3/2$, узагальнена перерізуюча сила зберігає і в точці зміни крайових умов на контурі пластинки з умов шарнірного опираювання на умови відсутності навантаження на вільній частині контуру пластинки. Останнє твердження можна підкріпити математичним співпадінням задачі згину напівбезмежної пластинки з вказаними змішаними крайовими умовами і задачі про згин пластинки з прямолінійною напівнескінченною тріщиною. До того ж, на відмічену особливість вказує математична аналогія між задачею згину тонких пластин і плоскою задачею теорії пружності, яка проявляється в однаковому поданні розв'язків обох задач у комплексних потенціалах Колосова – Мусхелішвілі [14]. При цьому інтегралу від узагальненої перерізуючої сили відповідають нормальні або дотичні напруження, які у плоскій задачі у відмічених вище сингулярних точках мають порядок особливості $-1/2$. Звідси випливає, що узагальнена перерізуюча сила має порядок особливості, менший на одиницю, тобто $-3/2$.

Однак останнім часом появляються роботи, в яких ігноруються описані вище факти. Так, у статті [21] розглянуто задачу про згин тонкої круглої пластинки під дією у її центрі зосередженої нормальної сили, коли пластинка опирається на дві симетрично розташовані контурні опори скінченної довжини. Автори цієї роботи через допущені ними помилки при виведенні інтегрального рівняння задачі роблять невірний висновок про те, що особливість узагальненої перерізуючої сили на краю опори дорівнює $r^{-1} \ln r$, де r – відстань від розглядуваної точки до краю опори.

У цій роботі наводимо розв'язання розглянутої у [21] задачі у класі неінтегровних функцій [11]. Матеріали роботи доповідались і обговорювались [10] на міжнародній науковій конференції, присвяченій пам'яті Г. Я. Попова. Увагу авторів до цієї роботи привернув у свій час проф. В. В. Мелешко, який стимулював її виконання численними дискусіями про порядок особливості узагальненої перерізуючої сили у точці зміни крайових умов.

Інтегральне рівняння задачі. Розглянемо згин круглої пластинки радіуса R , опертої уздовж частини свого контуру

$$L_1 = \{r = R, |\vartheta| \leq \alpha, \pi - \alpha \leq |\vartheta| \leq \pi\}$$

та вільної на іншій його частині

$$L_2 = \{r = R, \alpha < |\vartheta| < \pi - \alpha\},$$

нормальною силою P , яку прикладено у центрі пластинки (рис. 1).

Використаємо функцію Гріна [18]

$$w_*(\vartheta) = -\frac{2R^2}{(1-\nu)(3+\nu)\pi D} \left[\cos^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \ln \left| \cos \frac{\vartheta}{2} \right| + \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cdot \ln \left| \sin \frac{\vartheta}{2} \right| + \frac{1+\nu}{8} (\pi |\vartheta - \sin \vartheta| - \vartheta^2) \right], \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad (1)$$

яка є функцією прогину контуру пластинки, у центрі $r=0$ якої діє одинична сила, а у точках $\vartheta=0$, $\vartheta=\pi$ межі $r=R$ – сили величини $-1/2$ (несуттєву адитивну сталу опущено). Тут ν – коефіцієнт Пуассона, D – циліндрична жорсткість пластинки.

Згідно з теоремою про взаємність робіт [9] розв'язок задачі подамо у вигляді

$$w|_L = \int_L [w(\omega)N_*(\vartheta - \omega) + \varphi(\omega)M_*(\vartheta - \omega) - M(\omega)N_*(\vartheta - \omega) - N(\omega)w_*(\vartheta - \omega)] ds, \quad (2)$$

де L – контур пластинки ($r=R$, $-\pi < \vartheta < \pi$), $w(\omega)$ – прогин, $\varphi(\omega) = \varphi_r|_L$ – кут повороту, $M(\omega) = M_r|_L$ – згинаючий момент, $N(\omega) = N_r|_L$ – узагальнена перерізувальна сила на контурі пластинки. Функції, відмічені індексом «*», відповідають функції Гріна.

З огляду на крайові умови задачі та за визначенням функції Гріна маємо

$$M(\vartheta) \equiv 0, \quad M_*(\vartheta) \equiv 0, \\ w(\vartheta)|_{L_1} = 0, \quad N(\vartheta)|_{L_2} = 0, \quad N_*(\vartheta)|_{L_2} = 0. \quad (3)$$

Тоді подання (2) набуває вигляду

$$w|_L = - \int_{L_1} N(\omega)w_*(\vartheta - \omega) ds. \quad (4)$$

Однак на кінцях контурів інтегрування L_1 функція $N(\omega)$ має неінтегровну особливість

$$N(\omega) = O((\alpha - |\omega|)^{-3/2}), \quad \omega \rightarrow \pm \alpha \mp 0, \\ N(\omega) = O((|\omega| - \pi + \alpha)^{-3/2}), \quad \omega \rightarrow \pm(\pi - \alpha) \pm 0. \quad (5)$$

Як показав Г. Я. Попов [11], подібні задачі мають лише неінтегровні розв'язки. Для отримання таких узагальнених розв'язків необхідно використовувати регуляризоване значення розбіжного інтеграла

$$\int_{L'} \left(\frac{h(s)}{\sqrt{s(\ell - s)}} \right)' g(s) ds = - \int_{L'} \frac{h(s)g'(s)}{\sqrt{s(\ell - s)}} ds, \quad (6)$$

де ℓ – довжина дуги L' ; $h(s)$, $g(s)$ – регулярні на L' функції.

Введемо функцію

$$p(\omega) = \int_{a(\omega)}^{\omega} N(\omega) d\omega, \quad a(\omega) = \begin{cases} 0, & -\alpha < \omega < \alpha, \\ \pi, & \pi - \alpha < \omega \leq \pi, \\ -\pi, & -\pi \leq \omega < -\pi + \alpha, \end{cases} \quad (7)$$

яка має інтегровну особливість на кінцях контурів L_1 :

$$p(\omega) = O((\alpha - |\omega|)^{-1/2}), \quad \omega \rightarrow \pm \alpha \mp 0, \\ p(\omega) = O((|\omega| - \pi + \alpha)^{-1/2}), \quad \omega \rightarrow \pm(\pi - \alpha) \pm 0. \quad (8)$$

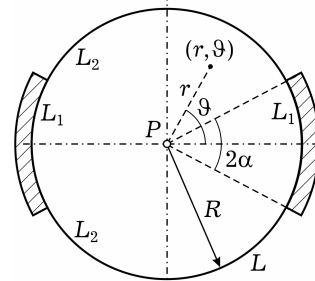


Рис. 1

На інтервалі $-\alpha < \omega < \alpha$ функцію $p(\omega)$ можна вибрати у вигляді

$$p(\omega) = \frac{p_0(\omega)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}, \quad (9)$$

де $p_0(\omega)$ – регулярна функція.

У той же час умова рівноваги

$$\int_{L_1} N(\omega) ds = -P \quad (10)$$

не може бути виконана, оскільки згідно з (6) та згідно з умовою симетрії $N(\pi - |\omega|) \equiv N(|\omega|)$, $-\alpha < \omega < \alpha$,

$$\int_{L_1} N(\omega) ds = 2R \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{p_0(\omega)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \right)' d\omega = 0. \quad (11)$$

Тому після інтегрування частинами згідно з (6) подання (4) додамо до отриманого доданок $\frac{P}{4\alpha R} \int_{L_1} w_*(\vartheta - \omega) ds$, який забезпечує виконання умови рівноваги (10). Остаточне подання розв'язку задачі набуває вигляду

$$w|_L = -2R \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) w'_*(\vartheta - \omega) d\omega + \frac{P}{2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} w_*(\vartheta - \omega) d\omega. \quad (12)$$

Задовольнивши крайову умову $w|_{L_1} = 0$, приходимо до інтегрального рівняння Фредгольма першого роду

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) w'_*(\vartheta - \omega) d\omega = \frac{P}{4\alpha R} \int_{-\alpha}^{\alpha} w_*(\vartheta - \omega) d\omega, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \quad (13)$$

де

$$w'_*(\vartheta) = -\frac{R^2}{(1-\nu)(3+\nu)\pi D} \left[\sin \vartheta \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| + \frac{1+\nu}{2} \left(\pi \operatorname{sgn} \vartheta \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2} - \vartheta \right) \right].$$

Продиференціювавши двічі, отримуємо сингулярне інтегральне рівняння

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) k(\vartheta - \omega) d\omega = f(\vartheta), \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \quad (14)$$

де

$$k(\vartheta) = \operatorname{ctg} \vartheta - \sin \vartheta \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| + \frac{1+\nu}{4} \pi \operatorname{sgn} \vartheta \cdot \cos \vartheta,$$

$$f(\vartheta) = -\frac{(1-\nu)(3+\nu)\pi DP}{8\alpha R^3} [w'_*(\vartheta - \alpha) - w'_*(\vartheta + \alpha)].$$

Ядро $k(\vartheta)$ інтегрального рівняння (14) подамо у вигляді

$$k(\vartheta) = \frac{1}{\vartheta} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \vartheta + k_1(\vartheta),$$

$$k_1(\vartheta) = \operatorname{ctg} \vartheta - \frac{1}{\vartheta} - \sin \vartheta \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right| - \frac{1+\nu}{2} \pi \operatorname{sgn} \vartheta \cdot \sin^2 \frac{\vartheta}{2}, \quad (15)$$

де $k_1(\vartheta)$ – регулярна функція. При цьому з огляду на непарність функції $p(\omega)$ маємо

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) \operatorname{sgn}(\vartheta - \omega) d\omega = 2 \int_{-\alpha}^{\vartheta} p(\omega) d\omega. \quad (16)$$

В результаті рівняння (14) перетворюємо до інтегрального рівняння типу Прандтля

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) \left[\frac{1}{\vartheta - \omega} + k_1(\vartheta - \omega) \right] d\omega + \frac{1+\nu}{2} \pi \int_{-\alpha}^{\vartheta} p(\omega) d\omega = f(\vartheta), \quad -\alpha < \vartheta < \alpha. \quad (17)$$

Інтегральне рівняння типу Прандтля виникає у теорії крила скінченного розмаху [4], а в теорії пружності – у задачах для пружної півплощини та смуги з пружними накладками [1, 15], а також у контактних задачах для пружної площини з круговим отвором і для пружного круга [13]. В інтегральних рівняннях вказаних задач ядро $k_1(\vartheta - \omega)$ часто відсутнє, коефіцієнт перед інтегралом зі змінною верхньою межею може бути функцією від ϑ , а ядро Коші $1/(\vartheta - \omega)$ у періодичних задачах замінюється на ядро Гільберта $\operatorname{ctg}(\vartheta - \omega)$.

Розв'язання інтегрального рівняння. Відомі три основні методи розв'язання рівняння Прандтля: 1°) метод механічних квадратур з використанням інтерполяційного многочлена Лагранжа [6, 13]; 2°) зведення до нескінченної системи алгебричних рівнянь відносно коефіцієнтів розвинення у ряд за многочленами Чебишова першого роду [2, 8]; 3°) зведення до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду шляхом обернення сингулярного інтеграла [1]. Крім того, у випадку змінного коефіцієнта вигляду $P(\vartheta)/\sqrt{(\alpha^2 - \vartheta^2)}$, де $P(\vartheta)$ – многочлен або раціональна функція, розглядуване рівняння допускає розв'язання у квадратурах [3].

Нижче розглянемо розв'язання інтегрального рівняння (17) всіма трьома вказаними методами.

Метод механічних квадратур. У рівнянні (17) перейдемо до нових змінних

$$\eta = \frac{\omega}{\alpha}, \quad \xi = \frac{\vartheta}{\alpha}, \quad -1 < \eta, \xi < 1, \quad (18)$$

та подамо шукану функцію у вигляді

$$p(\alpha\eta) = \frac{u(\eta)}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (19)$$

Як регулярний, так і сингулярний інтеграл з (17) перетворюємо за квадратурною формулою Гаусса – Чебишова [7, 14]

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) k_1(\vartheta - \omega) d\omega &= \frac{\pi\alpha}{n} \sum_{k=1}^n u(\eta_k) k_1(\vartheta - \alpha\eta_k), \quad \eta_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{p(\omega)}{\vartheta_m - \omega} d\omega &= \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \frac{u(\eta_k)}{\xi_m - \eta_k}, \quad \vartheta_m = \alpha\xi_m, \quad \xi_m = \cos \frac{\pi m}{n}, \\ &k = 1, 2, \dots, n, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (20)$$

При цьому квадратурна формула для сингулярного інтеграла у вузлах ϑ_m , $m = 1, 2, \dots, n-1$, має найвищу алгебричну степінь точності [19].

З використанням інтерполяційного многочлена Лагранжа [5]

$$\begin{aligned} u(\eta) &= \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n u(\eta_k) \sum_{j=1}^{n-1} \cos j\theta_k \cos j\theta, \quad \eta = \cos \theta, \\ \eta_k &= \cos \theta_k, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (21)$$

інтеграл із (17) зі змінною верхньою межею у точках $\vartheta_m = \alpha \xi_m$, $m = 1, 2, \dots, n-1$, виразимо через значення $u(\eta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, у такому вигляді:

$$\int_{-\alpha}^{\vartheta_m} p(\omega) d\omega = \alpha \int_{\tau_m}^{\pi} u(\cos \theta) d\theta = -\frac{2\alpha}{n} \sum_{k=1}^n u(\eta_k) \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cos j\theta_k \sin j\tau_m,$$

$$\xi_m = \cos \tau_m, \quad \tau_m = \frac{\pi m}{n}, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \quad (22)$$

З урахуванням рівностей (20), (22) інтегральне рівняння (17) зводимо до системи лінійних алгебричних рівнянь відносно значень $u(\eta_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$:

$$\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n u(\eta_k) \left[\frac{1}{\xi_m - \eta_k} + \alpha k_1 (\alpha \xi_m - \eta_k) - (1 + \nu) \alpha \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \cos j\theta_k \sin j\tau_m \right] = f(\alpha \xi_m),$$

$$\sum_{k=1}^n u(\eta_k) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, n-1. \quad (23)$$

Останнє рівняння алгебричної системи (23) забезпечує непарність розв'язку $p(\omega)$ інтегрального рівняння (17). Використовуючи рівності (7), (12), (21), визначаємо узагальнену перерізуювальну силу в опорі

$$\tilde{N}(\omega) = N(\omega) - \frac{P}{4\alpha R},$$

$$N(\omega) = \frac{2}{\alpha n \sin^2 \theta} \sum_{k=1}^n u(\eta_k) \sum_{j=1}^{n-1} (\operatorname{ctg} \theta \cos j\theta + j \sin j\theta) \cos j\theta_k,$$

$$\omega = \alpha \cos \theta, \quad -\alpha < \omega < \alpha. \quad (24)$$

Зведення до нескінченної системи алгебричних рівнянь. Розв'язок інтегрального рівняння (17) шукаємо у вигляді

$$p(\omega) = \frac{P}{4\alpha R} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \sum_{k=1}^{\infty} x_k T_{2k-1} \left(\frac{\omega}{\alpha} \right), \quad -\alpha < \omega < \alpha, \quad (25)$$

де x_k , $k = 1, 2, \dots$, – невідомі коефіцієнти, $T_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, – многочлени Чебишова першого роду.

З використанням тотожностей [16]

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{T_{2k-1}(\omega/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \frac{d\omega}{\vartheta - \omega} = -\frac{\pi}{\alpha} U_{2k-2} \left(\frac{\vartheta}{\alpha} \right),$$

$$\int_{-\alpha}^{\vartheta} \frac{T_{2k-1}(\omega/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} d\omega = -\frac{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}{\alpha(2k-1)} U_{2k-2} \left(\frac{\vartheta}{\alpha} \right), \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \quad (26)$$

де $U_n(x)$, $n = 0, 1, \dots$, – многочлени Чебишова другого роду, із (17) отримуємо функціональне рівняння

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\pi}{\alpha} \left(1 + \frac{1+\nu}{2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}{2k-1} \right) U_{2k-2} \left(\frac{\vartheta}{\alpha} \right) - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{T_{2k-1}(\omega/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} k_1 (\vartheta - \omega) d\omega \right] x_k =$$

$$= -\frac{4\alpha R}{P} f(\vartheta), \quad -\alpha < \vartheta < \alpha. \quad (27)$$

Помножимо обидві частини рівняння (27) на $\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} U_{2m-2}(\vartheta/\alpha)$, $m = 1, 2, \dots$, і проінтегруємо їх у межах від $-\alpha$ до α , використовуючи властивість ортогональності

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} U_{2k-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) U_{2m-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) d\vartheta = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ \frac{\pi}{2} \alpha^2, & k = m. \end{cases} \quad (28)$$

Отримаємо нескінченну систему алгебричних рівнянь

$$x_m + \sum_{k=1}^{\infty} a_{mk} x_k = b_m, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$a_{mk} = \frac{2}{\pi^2 \alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[\frac{\pi}{\alpha} \frac{1 + \nu}{2} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}{2k-1} U_{2k-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) - \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{T_{2k-1}(\omega/\alpha)}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} k_1(\vartheta - \omega) d\omega \right] \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} U_{2m-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) d\vartheta,$$

$$b_m = -\frac{8R}{\pi^2 P} \int_{-\alpha}^{\alpha} f(\vartheta) \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} U_{2m-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) d\vartheta, \quad m, k = 1, 2, \dots \quad (29)$$

Скориставшись формулами [16]

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (30)$$

та обчисливши інтеграл

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} (\alpha^2 - \vartheta^2) U_{2m-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) U_{2k-2}\left(\frac{\vartheta}{\alpha}\right) d\vartheta =$$

$$= -\frac{4\alpha^3(2m-1)(2k-1)}{[4(m+k-1)^2 - 1][4(m-k)^2 - 1]}, \quad (31)$$

перетворимо коефіцієнти системи рівнянь (29) до вигляду

$$a_{mk} = -\frac{4\alpha(1+\nu)(2m-1)}{\pi[4(m+k-1)^2 - 1][4(m-k)^2 - 1]} -$$

$$-\frac{2\alpha}{\pi^2} \int_0^{\pi} \sin\theta \sin(2m-1)\theta d\theta \times$$

$$\times \int_0^{\pi} k_1(\alpha(\cos\theta - \cos\tau)) \cos(2k-1)\tau d\tau,$$

$$b_m = -\frac{16\alpha^2 R}{\pi^2 P} \int_0^{\pi/2} f(\alpha \cos\theta) \sin\theta \sin(2m-1)\theta d\theta, \quad m, k = 1, 2, \dots \quad (32)$$

Як показано у роботі [1], нескінченна система алгебричних рівнянь (29), (32) є квазіцилком регулярною і, отже, може бути розв'язана методом редукції.

Відмітимо, що коефіцієнти x_k , $k = 1, 2, \dots, n$, розвинення (25) можна також знайти методом колокацій [20], якщо функціональне рівняння (27) задовольнити у вузлах $\vartheta_m = \alpha \cos((2m-1)\pi/(4n))$, $m = 1, 2, \dots, n$, - додатних нулях многочлена $T_{2n}(\vartheta/\alpha)$.

Беручи до уваги співвідношення (7), (12), (21), визначаємо узагальнену перерізуювальну силу в опорі

$$\begin{aligned}\tilde{N}(\omega) &= N(\omega) - \frac{P}{4\alpha R}, \\ N(\omega) &= \frac{P}{4\alpha R} \frac{1}{\alpha^2 \sin^2 \theta} \sum_{k=1}^{\infty} [\operatorname{ctg} \theta \cos(2k-1)\theta + (2k-1) \sin(2k-1)\theta] x_k, \\ \omega &= \alpha \cos \theta, \quad -\alpha < \omega < \alpha.\end{aligned}\quad (33)$$

Зведення до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. Обернувши сингулярний інтеграл з ядром Коші [5] в інтегральному рівнянні (17), перейдемо до еквівалентного рівняння

$$\begin{aligned}p(\vartheta) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{\omega - \vartheta} d\omega \left[\frac{1+\nu}{2} \pi \int_{-\alpha}^{\omega} p(\varphi) d\varphi + \right. \\ &\quad \left. + \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\varphi) k_1(\omega - \varphi) d\varphi - f(\omega) \right] + \frac{C}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}}, \quad -\alpha < \vartheta < \alpha.\end{aligned}\quad (34)$$

З умови непарності шуканої функції $p(\vartheta)$ визначаємо сталу C : $C = 0$.

Змінивши порядок інтегрування і використавши значення інтеграла [12]

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{\omega - \vartheta} d\omega &= (\alpha^2 - \vartheta^2) \int \frac{d\omega}{(\omega - \vartheta)\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} - \int \frac{\omega + \vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} d\omega = \\ &= \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} \ln \frac{|\vartheta - \omega|}{\alpha^2 - \vartheta\omega + \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} + \\ &\quad + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2} - \vartheta \arcsin \frac{\omega}{\alpha} + C',\end{aligned}\quad (35)$$

а також умову непарності розв'язку $p(\vartheta)$, приходимо до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду

$$p(\vartheta) + \int_{-\alpha}^{\alpha} p(\omega) k_2(\vartheta, \omega) d\omega = f_1(\vartheta), \quad -\alpha < \vartheta < \alpha, \quad (36)$$

де

$$\begin{aligned}k_2(\vartheta, \omega) &= -\frac{1+\nu}{2} \left(\ln \frac{|\vartheta - \omega|}{\alpha^2 - \vartheta\omega + \sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2} \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\vartheta}{\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \arcsin \frac{\omega}{\alpha} \right) - \\ &\quad - \frac{1}{\pi\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}{\varphi - \vartheta} k_1(\omega - \varphi) d\varphi, \\ f_1(\vartheta) &= \frac{2}{\pi\sqrt{\alpha^2 - \vartheta^2}} \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}{\varphi^2 - \vartheta^2} f(\varphi) \varphi d\varphi.\end{aligned}$$

Ядро $k_2(\vartheta, \omega)$ інтегрального рівняння (36) має слабку логарифмічну особливість.

Визначення прогину пластинки. Прогин пластинки у точках вільної частини її контуру ($\alpha < \omega < \pi - \alpha$, $r = R$) знаходимо за формулою (12). При цьому прогин $w|_L$ визначається з точністю до довільної адитивної сталої C_1 шляхом двократного диференціювання інтегрального рівняння (13) (по-

ява доданка $C_2\vartheta$ виключається з огляду на парність функції $w|_L$ за аргументом ϑ). Сталу C_1 , що появилася, повинна бути відкинута накладанням додаткової умови $w|_L = 0$ при $\vartheta = \alpha$.

Для визначення прогину у внутрішніх точках пластинки ($r < R$) скористаємося знайденими згідно з (12) значеннями прогину $w|_{L_1} = 0$, $g(\vartheta) = w|_{L_2}$ на контурі пластинки. Функцію $w(r, \vartheta)$ шукаємо у вигляді [17]

$$w = \frac{P}{8\pi D} r^2 \ln r + a_0 + b_0 r^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k r^{2k} + b_k r^{2k+2}) \cos 2k\vartheta. \quad (37)$$

Визначивши коефіцієнти a_k , b_k , $k = 1, 2, \dots$, із крайових умов

$$w|_{r=R} = \begin{cases} 0, & |\vartheta| \leq \alpha, \quad |\vartheta| \geq \pi - \alpha, \\ g(\vartheta), & \alpha < |\vartheta| < \pi - \alpha, \end{cases} \quad M_r|_{r=R} = 0, \quad (38)$$

отримаємо

$$w = \frac{P}{2\pi D} \left[r^2 \ln \frac{r}{R} + \frac{3+\nu}{2(1+\nu)} (R^2 - r^2) \right] + \frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(1-\nu)k^2 + (3+\nu)k + 1 + \nu - (1-\nu)k(2k-1)(r/R)^2}{4k+1+\nu} \times g_k \left(\frac{r}{R} \right)^{2k} \cos 2k\vartheta, \quad (39)$$

$$g_k = \frac{4}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi/2} g(\vartheta) \cos 2k\vartheta d\vartheta, \quad k = 0, 1, \dots$$

У випадку $\alpha = \pi/2$ $g_k \equiv 0$, і формула (39) дає елементарний вираз для прогину пластинки, шарнірно опертої по всьому контуру [17].

Результати обчислень. Обчислення узагальнених перерізувальних сил $\tilde{N}(\omega)$ в опорі ($-\alpha < \omega < \alpha$) та прогину пластинки w проведено у випадку коефіцієнта Пуассона $\nu = 0.3$ для різних кутів α . На рис. 2 показано розподіл величини $\bar{N} = -(4R\alpha/P)\tilde{N}(\omega)$ на половині опори ($0 \leq \omega < \alpha$). Криві 1–5 відповідають кутам $\alpha = \pi/12, \pi/6, \pi/4, \pi/3, 5\pi/12$. При $\alpha \rightarrow \pi/2$ розподіл сил в опорі переходить у рівномірний ($\bar{N} \equiv 1$). Значення \bar{N} уздовж опори обчислені трьома різними методами: механічних квадратур, редукції, колокацій. При цьому результати відрізняються у п'ятому (іноді у четвертому) десятковому знаку. Для досягнення вказаної точності у системах алгебричних рівнянь кожного з трьох використаних методів достатньо взяти 10, 5 і 8 рівнянь відповідно.

На рис. 3 зображено лінії рівня функції прогину w . У першому квадранті ($0 \leq \vartheta \leq \pi/2$) показано прогини четвертої частини пластинки, яка опирається на точкові опори ($\alpha = 0$, $w = Pw_*$), у другому ($\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi$), третьому ($-\pi \leq \vartheta \leq -\pi/2$) і четвертому ($-\pi/2 \leq \vartheta \leq 0$) квадрантах – прогини частини пластинки з опорами, кутовий піврозмір яких становить $\alpha = \pi/12, \pi/4, \pi/2$ (опирання по всьому контуру), відповідно. Лінії рівня відповідають значенням величини $\bar{w} = 2\pi D w / (PR^2) = 0.05, 0.1, 0.15, \dots, 0.75$ (штрихові криві відповідають значенням $\bar{w} = 0.3, 0.6$). Для кутів $\alpha = \pi/12, \pi/4, \pi/2$ максимальний прогин досягається у центрі пластинки. У випадку точкових опор ($\alpha = 0$) та опор відносно малого розміру ($\alpha = \pi/12$) поверхня пластинки не є опуклою.

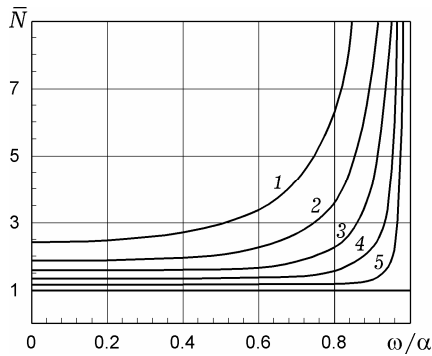


Рис. 2

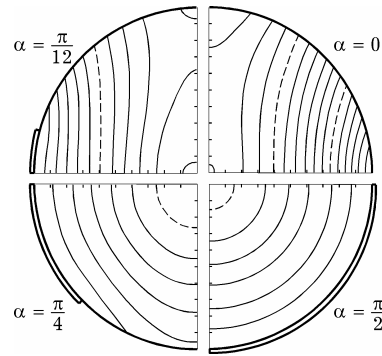


Рис. 3

При цьому за точкового опирання ($\alpha = 0$) прогин у точках контуру $r = R$, $\vartheta = \pm \pi/12$ ($\bar{w} = 0.7899$), які найбільш віддалені від опор, є більшим, ніж у центрі пластинки $r = 0$. Нормалізовані прогини \bar{w} у центрі пластинки ($r = 0$) для різних кутів α наведено у табл. 1.

Таблиця 1

α	0	$\pi/12$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$5\pi/12$	$\pi/2$
$\bar{w} _{r=0}$	0.7517	0.5580	0.4090	0.3435	0.3220	0.3176	0.3173

1. Александров В. М., Мхитарян С. М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. – Москва: Наука, 1983. – 488 с.
2. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением // Прикл. математика и механика. – 1968. – **32**, № 4. – С. 632–646.
3. Веква И. Н. Об одном интегро-дифференциальном уравнении Прандтля // Прикл. математика и механика. – 1945. – **9**, № 2. – С. 143–150.
4. Голубев В. В. Лекции по теории крыла. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1949. – 480 с.
5. Каландия А. И. Математические методы двумерной упругости. – Москва: Наука, 1973. – 304 с.
6. Каландия А. И. Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости // Мат. сб. – 1957. – **42 (84)**, № 2. – С. 249–272.
7. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Физматгиз, 1967. – 500 с.
8. Морарь Г. А., Попов Г. Я. К контактной задаче для полуплоскости с упругим конечным креплением // Прикл. математика и механика. – 1970. – **34**, № 3. – С. 412–421.
9. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
10. Острик В. І. Згин частково обертої круглої пластинки // Сучасні проблеми механіки деформівного твердого тіла, диференціальних та інтегральних рівнянь. Тези доп. міжн. наук. конф. (Одеса, 23–26 серпня 2013). – Одеса: Астропринт, 2013. – 140 с. – С. 99–100.
11. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – Москва: Наука, 1982. – 344 с.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.
13. Развитие теории контактных задач в СССР / Отв. ред. Л. А. Галин. – Москва: Наука, 1976. – 493 с.
14. Саврук М. П. Двумерные задачи упругости для тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1981. – 324 с.
15. Саркисян В. С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. – Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1983. – 260 с.
16. Сега Г. Ортогональные многочлены. – Москва: Физматгиз, 1962. – 500 с.
17. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. – Москва: Наука, 1966. – 636 с.

Те саме: Timoshenko S. P., Woinowsky-Krieger S. Theory of plates and shells. – New York: McGraw-Hill, 1959.

18. Barber J. R. Bending of an incomplete annular plate and related problems // J. Strain Anal. – 1979. – **14**, No. 3. – P. 103–109.
19. Erdogan F. E., Gupta G. D., Cook T. S. The numerical solutions of singular integral equations // In: G. C. Sih (ed.). Mechanics of Fracture. Vol. 1: Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems. – Leyden: Noordhoff Int. Publ., 1973. – 562 p. – P. 368–425.
20. Leissa A. W., Clausen W. E., Hulbert L. E., Hopper A. T. A comparison of approximate methods for the solution of plate bending problems // AIAA J. – 1969. – **7**, No. 5. – P. 920–928.
21. Monegato G., Strozzi A. On the form of the contact reaction in a solid circular plate simply supported along two antipodal edge arcs and deflected by a central transverse concentrated force // J. Elasticity. – 2002. – **68**, No. 1-3. – P. 13–35.

ИЗГИБ ЧАСТИЧНО ОПЕРТОЙ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

Рассмотрена задача об изгибе тонкой круглой пластинки под действием в ее центре сосредоточенной нормальной силы, когда пластинка опирается на две симметрично расположенные контурные опоры конечной длины. Интегральное уравнение задачи типа Прандтля решено численно методом механических квадратур и методом ортогональных многочленов, а также сведено к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Вычислены распределение обобщенной перерезывающей силы в опоре и прогиб пластинки.

BENDING OF PARTIALLY SUPPORTED CIRCULAR PLATE

The problem of bending of a thin circular plate, loaded by the concentrated normal force at its centre, when the plate is supported on two symmetrically located countered supports of finite length is considered. The integral equation of the Prandtl's type is solved numerically by the mechanical quadrature technique, by the method of orthogonal polynomials, and also it is reduced to the Fredholm integral equation of the second kind. Distributions of the generalized shear force at the support and the deflection of the plate are calculated.

Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка, Київ

Одержано
08.10.13