

**ДОСЛІДЖЕННЯ ЗОНИ ПЕРЕДРУЙНУВАННЯ БІЛЯ  
ВЕРШИНИ МІЖФАЗНОЇ ТРІЩИНИ У ПРУЖНОМУ ТІЛІ ПРИ  
ЗСУВІ В РАМКАХ КОМПЛЕКСНОЇ МОДЕЛІ**

*В умовах плоскої деформації методом Вінера – Гопфа виконано розрахунок вузької маломасштабної зони передруйнування у пружному тілі при зсуві біля вершини міжфазної тріщини, береги якої контактують з тертям. Зона передруйнування, що виходить з вершини тріщини під кутом до межі поділу середовищ, моделюється прямою лінією розриву переміщення, яка складається з двох ділянок. На прилеглий до вершини тріщини ділянці, що моделює область деструкції матеріалу, зазнають розриву як нормальне, так і дотичне переміщення, а на другій ділянці розриву зазнає лише нормальне переміщення. Кут між зоною передруйнування і межею поділу середовищ встановлюється з умови максимуму розтягувального колового напруження. Визначено розміри всієї зони передруйнування та області деструкції, розкриття тріщини в її вершині та максимальне розкриття початкової зони передруйнування. Досліджено вплив коефіцієнта тертя на параметри зони передруйнування. З використанням деформаційного критерію руйнування проаналізовано роль області деструкції у зрушенні тріщини. Виявлено, що зрушення тріщини відбувається внаслідок відносного зсуву її берегів біля вершини. Наведено порівняння отриманих результатів з даними інших дослідників.*

Тріщини, розташовані на межі поділу двох різних середовищ, привертають увагу дослідників внаслідок важливого значення їх вивчення для розвитку механіки руйнування композитів, клейових і зварних з'єднань, що мають широке розповсюдження в сучасних технологічних матеріалах. На сьогодні повністю задовільної теорії міжфазних тріщин немає [2], оскільки класична модель міжфазної тріщини, започаткована в роботах M. L. Williams, A. H. England, F. Erdogan, J. R. Rice, G. C. Sih, містить фізичну некоректність у вигляді просторових осциляцій переміщень при наближенні до вершини тріщини, що призводять до перетину її берегів. Але й альтернативна модель, розвинута M. Comninou, J. Dundurs та іншими авторами, яка припускає контакт берегів поблизу вершини тріщини, що усуває вказані осциляції, виявляється некоректною при певних конфігураціях навантажень, передбачаючи довжину контактної зони одного порядку з розмірами атомів або навіть меншу, коли континуальна теорія пружності стає непридатною. Проте обидві ці моделі використовують в теорії міжфазних тріщин, оскільки вони приводять до цілком змістовних фізичних висновків і прийнятних практичних результатів.

Використання класичної моделі (відкритої) тріщини, на наш погляд, допустиме в умовах переважання в околі вершини розтягувальних навантажень у напрямку, перпендикулярному до площини тріщини, коли контактна модель передбачає екстремально малі розміри області контакту берегів [15, 21, 26]. Для усунення осцилюючої особливості пропонується враховувати нелінійну поведінку матеріалу біля вершини, зокрема, утворення в її околі зони передруйнування [29]. Приклади визначення зон передруйнування в рамках деяких моделей [5, 7, 8] підтверджують ефективність такого підходу. Проте в умовах зсуву розміри контактної зони за порядком величини зрівнянні з довжиною тріщини [4, 15, 22–26], тому застосування контактної моделі стає неминучим. Оскільки при цьому в прилеглий до контактної зони вершині тріщини зберігається концентрація напружень, в її околі також слід очікувати виникнення зони передруйнування.

Визначення параметрів зони передруйнування є актуальною проблемою механіки руйнування, оскільки дає змогу повніше описати напружено-

деформований стан біля вершини і, як наслідок, уточнити умови граничної рівноваги тріщини. Строге визначення зони передруйнування як просторової області матеріалу з нелінійними визначальними рівняннями призводить до складної крайової задачі теорії диференціальних рівнянь із частинними похідними із невідомою наперед межею, розв'язання якої можливе тільки числовими методами. На сьогодні єдиною моделлю зони передруйнування, яка допускає у багатьох випадках аналітичне дослідження, є модель Леонова – Панасюка – Дагдейла, а також різноманітні її модифікації і аналоги, де зону передруйнування замінено поверхнею розриву переміщення, на якій задано ту або іншу умову переходу в передруйнівний стан (яка залежить від властивостей матеріалу), що дає можливість звести початкову задачу до задачі теорії пружності зі спеціальними крайовими умовами.

Експериментальні дослідження виявили, що зони передруйнування біля гострокінцевих концентраторів напружень у пружнопластичному тілі мають складну структуру і складаються з достатньо розвинутої пластичної зони і прилеглої безпосередньо до вершини концентратора досить малої області деструкції матеріалу з дуже високим рівнем деформацій, зумовленим появою значної кількості різного роду мікропошкоджень [11–13]. Для врахування цього факту був запропонований ряд теоретичних моделей: *модель когезійної зони*, що містить зону процесу руйнування [30, 31]; *модель зони передруйнування у лінійно зміцнюваному матеріалі із зоною розпушення* [17, 18]; *комплексну модель зони передруйнування з областю деструкції* [9, 10]. При відмінності термінології вихідні положення названих моделей є близькими і базуються на розвитку моделі Леонова – Панасюка – Дагдейла.

*Комплексна модель зони передруйнування у біматеріальному тілі в кінці тріщини з контактуючими берегами*, розташованої на межі поділу пружних середовищ, припускає розвиток зони в два етапи [9, 10]. На першому етапі після навантаження тіла і утворення контактної зони виникає вузька початкова бічна зона передруйнування. Оскільки її поява не усуває концентрації напружень біля вершини тріщини, це призводить на другому етапі розвитку до зародження у прилеглий до вершини тріщини частині зони передруйнування області підвищеної деформації матеріалу – області деструкції. Подальше збільшення зовнішнього навантаження супроводжується синхронним зростанням розмірів обох зон. Їх визначення в умовах плоскої деформації в цій роботі зведено до розв'язання наступних двох задач.

У першій задачі методом Вінера – Гопфа виконано розрахунок початкової зони передруйнування, яку моделювали бічною лінією розриву нормального переміщення, що виходить з вершини міжфазної тріщини з берегами, взаємодіючими за законом сухого тертя. Умови навантаження і конфігурація тіла враховували в рамках лінійної механіки руйнування через коефіцієнт інтенсивності напружень, який передбачається відомим з розв'язку тієї або іншої зовнішньої задачі, тому отримані результати є досить загальними і застосовні до широкого класу зовнішніх умов, що задовольняють вихідні припущення. Орієнтацію зони передруйнування визначали з умови максимуму розтягувального колового напруження  $\sigma_0$  [19]. У ході розв'язання відповідної крайової задачі знайдено розміри зони і характер зміни напружено-деформованого стану біля вершини. Раніше аналогічні розрахунки було виконано окремо в рамках класичної моделі відкритої міжфазної тріщини [5, 8] і в рамках моделі *Compinou* без урахування можливого тертя контактуючих берегів [6].

Отримані на першому етапі результати використано при розв'язанні другої задачі – про область деструкції, що моделюється додатковим розривом дотичного переміщення у прилеглий до вершини тріщини частині зони передруйнування. Для дослідження умов зрушення тріщини знайдено її розкриття у вершині.

У завершальній частині роботи подано результати числових розрахунків параметрів комплексної зони передруйнування в окремому випадку

кусково-однорідної площини з міжфазною тріщиною скінченної довжини, навантаженої на нескінченності однорідним дотичним напруженням. Досліджено вплив тертя на параметри зони. Визначено розкриття тріщини і проаналізовано можливі механізми її зрушення.

**Визначення початкової зони передруйнування в кінці контактної зони.** В умовах плоскої деформації розглядається задача про початковий етап розвитку зони передруйнування з вершини тріщини, розташованої у кусково-однорідній площині на прямолінійній межі поділу двох різних ізотропних пружних матеріалів з модулями зсуву  $G_1, G_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1, \nu_2$ , що перебувають під дією навантаження, яке забезпечує суттєвий контакт берегів. Цей етап полягає в утворенні біля вершини вузької бічної зони передруйнування у матеріалі з пружними сталими  $G_1, \nu_1$ , який вважаємо менш тріщиностійким. Оскільки розвиток тріщини відбувається за крихким механізмом, зону передруйнування моделюватимемо [16] прямою лінією розриву нормального переміщення, що виходить з вершини тріщини під кутом  $\alpha$  до межі поділу матеріалів. На лінії розриву нормальне напруження дорівнює опору відриву першого матеріалу  $\sigma_1$ .

Згідно з [15, 22–26], довжина контактної зони  $s$  біля вершини тріщини  $O$  при чистому зсуві за порядком величини є близькою до довжини тріщини  $L$ , тому вона, як і довжина тріщини, є значно більшою від розміру початкової зони передруйнування  $\ell$ . Це дає змогу при визначенні зони передруйнування міжфазну тріщину з контактуючими берегами, що взаємодіють за законом сухого тертя, вважати напівнескінченною, а умову на нескінченності сформулювати у вигляді вимоги можливості зшивання при  $\ell \ll r \ll s$  шуканого розв'язку задачі (рис. 1) з розв'язком відповідної задачі теорії пружності про міжфазну тріщину скінченної довжини з контактною зоною біля вершини за відсутності бічної лінії розриву [4, 15, 20]. В результаті приходимо до статичної задачі теорії пружності з крайовими умовами в полярній системі координат  $(r, \theta)$  у вигляді (рис. 1):

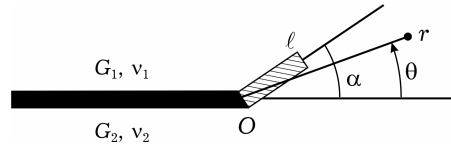


Рис. 1

$$\begin{aligned} \theta = 0: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \alpha: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_r \rangle = 0, \\ \theta = \pm \pi: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \theta = \alpha, \quad r < \ell: & \quad \sigma_\theta = \sigma_1, \\ \theta = \alpha, \quad r > \ell: & \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \quad \sigma_\theta = k_{II} F(\alpha) r^\lambda + o\left(\frac{1}{r}\right), \quad (3)$$

де

$$F(\alpha) = \frac{(2\pi)^\lambda}{2} \{ (2 + \lambda)(1 + \beta) \sin \lambda \alpha - [2 + \lambda(1 + \beta)] \sin (2 + \lambda)\alpha \},$$

$$\beta = \frac{(1 + e\alpha_2) - (e + \alpha_1)}{(1 + e\alpha_2) + (e + \alpha_1)}, \quad e = \frac{G_1}{G_2}, \quad G_1 < G_2, \quad \alpha_{1(2)} = 3 - 4\nu_{1(2)},$$

$\langle f \rangle$  – стрибок величини  $f$ ;  $\mu$  – коефіцієнт тертя між берегами тріщини;  $\beta$  – параметр Дундурса [4],  $|\beta| \leq 0.5$ ;  $\lambda$  – корінь рівняння  $\text{ctg } \lambda \pi + \mu \beta = 0$  на інтервалі  $(-1, 0)$ . При ковзанні верхнього матеріалу у напрямку  $\theta = \pi$  від-

носно нижнього матеріалу коефіцієнт тертя повинен бути від'ємним. Коефіцієнт інтенсивності напружень у кінці міжфазної тріщини зсуву  $k_{II}$  визначаємо з розв'язку зовнішньої задачі і вважаємо заданим за умовою.

Передбачається, що в задачі, яка відповідає тому етапу процесу деформування, коли зона передруйнування ще не появилася, при  $\theta = \alpha$  біля вершини тріщини нормальні напруження є розтягувальними ( $\theta = \alpha$ ,  $\sigma_\theta > 0$ ). Це вимагає виконання умови  $k_{II}F(\alpha) > 0$  додатково до вимоги стискувальних напружень на берегах тріщини ( $\theta = \pi$ ,  $\sigma_\theta < 0$ ), яка необхідна для контакту берегів і формулюється у вигляді нерівності  $\beta k_{II} > 0$  [28].

Розв'язок сформульованої крайової задачі (1)–(3) знайдено методом Вінера – Гопфа [14, 15] подібно, як у роботах [3, 6, 8]. При виконанні умови  $\mu \operatorname{tg} \alpha + 1 > 0$  та вимоги обмеженості напружень у кінці зони передруйнування приходимо до такого виразу для довжини зони:

$$\ell = \left( \frac{2k_{II}F(\alpha)J(0)}{\sqrt{\pi} \sigma_1 \mathcal{K}^+(-\lambda - 1)J(\lambda)} \right)^{-1/\lambda}, \quad (4)$$

де

$$J(x) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x+1) \ln |G(it)| + t \cdot \arg(G(it))}{t^2 + (x+1)^2} dt \right],$$

$$\mathcal{K}^+(p) = \frac{\Gamma(1-p)}{\Gamma(1/2-p)}, \quad G(p) = \frac{D_1(p)}{\cos(p\pi)D_0(p)},$$

$$D_0(p) = 2(1 + e\alpha_2)(e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2 + e + \alpha_1)(\cos p\pi - \mu\beta \sin p\pi),$$

$$D_1(p) = D_{10}(p) - \mu D_{11}(p),$$

$$D_{10}(p) = (1 + \alpha_1)[(e + \alpha_1)^2 \Delta_1(p) + (e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)\Delta_2(p) + \\ + (1 + e\alpha_2)^2 \Delta_3(p)] + e(1 + \alpha_2)(e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)\Delta_4(p),$$

$$\Delta_1(p) = \cos^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_2(p) = p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos 2\alpha \cos 2p\alpha + \cos 2p\pi,$$

$$\Delta_3(p) = \Delta_1(p) + 4p^2 \sin^2 \alpha \cos^2 p\alpha - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha - \\ - 4 \sin p\alpha \cos p\pi \sin p(\pi - \alpha),$$

$$\Delta_4(p) = 2 \cos p\pi [2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \\ - 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha)],$$

$$D_{11}(p) = (1 + \alpha_1)\bar{D}_{11}(p) - 2(1 - e)\tilde{D}_{11}(p),$$

$$\bar{D}_{11}(p) = (e + \alpha_1)^2 \bar{\Delta}_1 + (1 + e\alpha_2)^2 \bar{\Delta}_2 + (e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)\bar{\Delta}_3 + \\ + (1 - e)(e + \alpha_1)\bar{\Delta}_4 + (1 - e)(1 + e\alpha_2)\bar{\Delta}_5,$$

$$\tilde{D}_{11}(p) = (e + \alpha_1)^2 \tilde{\Delta}_1 + (1 + e\alpha_2)^2 \tilde{\Delta}_2 + (e + \alpha_1)(1 + e\alpha_2)\tilde{\Delta}_3 + \\ + (1 - e)(e + \alpha_1)\tilde{\Delta}_4 + (1 - e)(1 + e\alpha_2)\tilde{\Delta}_5,$$

$$\bar{\Delta}_1(p) = -\sin [p(\pi - \alpha) + \alpha] \cos [p(\pi - \alpha) - \alpha],$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Delta}_2(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \\
&\quad + \sin p(\pi - \alpha)[\cos p(\pi + \alpha) - 2 \sin p\pi \sin p\alpha], \\
\bar{\Delta}_3(p) &= 2[p \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha \sin 2p\alpha) - \sin \alpha \cos \alpha \cos 2p\alpha + \\
&\quad + 2 \sin p\pi \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha)], \\
\bar{\Delta}_4(p) &= -2(p+1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin [p(\pi - \alpha) + \alpha], \\
\bar{\Delta}_5(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha [\sin 2p(\pi - \alpha) + \sin 2p\pi] - 2 \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi + \alpha) + \\
&\quad + \alpha) + 2p \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) + \\
&\quad + \sin p(\pi + \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) - \alpha)], \\
\tilde{\Delta}_1(p) &= -(p+1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) + \alpha), \\
\tilde{\Delta}_2(p) &= 2[p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha) + p \sin \alpha \cos \alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \\
&\quad - \sin p(\pi - \alpha) \sin p\alpha] \sin p\pi, \\
\tilde{\Delta}_3(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi + \alpha) \sin p(\pi - \alpha) + p \sin \alpha [\cos \alpha - \\
&\quad - \cos p(\pi - \alpha) \cos(p(\pi + \alpha) - \alpha)] + \sin p(\pi - \alpha) \times \\
&\quad \times [2 \sin p\pi \sin p\alpha - \sin \alpha \cos(p(\pi + \alpha) + \alpha)], \\
\tilde{\Delta}_4(p) &= -(p+1) \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin [p(\pi - \alpha) + \alpha], \\
\tilde{\Delta}_5(p) &= 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p\alpha \sin p(2\pi - \alpha) - \sin \alpha \sin p(\pi - \alpha) \sin(p(\pi + \alpha) + \\
&\quad + \alpha) + p \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p(\pi - \alpha) + \\
&\quad + \sin p(\pi + \alpha) \sin(p(\pi - \alpha) - \alpha)].
\end{aligned}$$

Для визначення кута нахилу початкової зони передруйнування використовуємо умову максимуму відривного колового напруження  $\sigma_0$  [19], яка відповідно до (3) еквівалентна рівнянню

$$\frac{\cos(\lambda + 2)\alpha}{\cos \lambda \alpha} = \frac{2 + \lambda(1 + \beta)}{\lambda(1 + \beta)}. \quad (5)$$

Згідно з (4), довжина зони передруйнування нелінійно зростає зі збільшенням зовнішнього навантаження, що входить до коефіцієнта інтенсивності напружень  $k_{II}$ . Крім того, довжина зони передруйнування тим більша, чим менший опір відриву матеріалу, в якому відбувається її розвиток.

З розв'язку задачі знайдено поле напружень біля вершини тріщини, що змінилося внаслідок утворення зони передруйнування. Загальна структура тензора напружень має вигляд

$$\sigma_{mn}(r, \theta) = \sigma_{mn}^0(\theta) + \sum_i g_{mn}(\theta, \lambda_i) r^{\lambda_i}, \quad r \rightarrow 0,$$

де  $\sigma_{mn}^0(\theta)$ ,  $g_{mn}(\theta, \lambda_i)$  – відомі функції,  $\lambda_i$  – корені рівняння

$$D_1(-1 - x) = 0, \quad (6)$$

що задовольняють умову  $\text{Re } \lambda_i > -1$ . Зокрема, дотичне напруження на лінії розриву, необхідне нижче для визначення області деструкції, є таким:

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}(r, \alpha) = & \sigma_1 \frac{T(-1)}{D_1(-1)} + \\ & + \sigma_1 \sum_i \frac{T(-1 - \lambda_i)}{D_1'(-1 - \lambda_i)} \frac{\mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i)}{\mathcal{K}^+(-1)} \frac{J(\lambda_i)}{J(0)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{\lambda_i}, \\ & r \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} D_1'(p) = & \frac{dD_1(p)}{dp}, \quad T(p) = T_0(p) + \mu T_1(p), \\ T_0(p) = & (1 + \alpha_1)T_{01}(p) + (1 - e)T_{02}(p), \\ T_{01}(p) = & 0.5(1 + \alpha_1)^2[\sin 2\alpha + \sin 2p(\pi - \alpha)] + (1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2)(p + 1) \times \\ & \times \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - e^2(1 + \alpha_2)^2 T_{03}(p), \\ T_{02}(p) = & 2(1 - e)(1 + \alpha_1)(p + 1) \sin \alpha [2 \cos \alpha \sin^2 p\alpha - p \sin \alpha \sin 2p(\pi - \alpha)] - \\ & - 4(1 + e\alpha_2)e(1 + \alpha_2) \cos p\pi T_{04}(p) + \\ & + (1 + \alpha_1)^2 [p \sin 2\alpha \cos 2p\alpha - 2 \sin 2\alpha \sin^2 p\alpha - \\ & - \sin 2p(\pi - \alpha)] - (1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2)T_{05}(p), \\ T_{03}(p) = & 2p^2 \sin^2 \alpha \sin 2p\alpha + 2p \sin \alpha (\sin \alpha \sin 2p\alpha - \cos \alpha) + \\ & + 0.5 [\sin 2p(\pi - \alpha) - \sin 2\alpha], \\ T_{04}(p) = & p(p + 1) \sin^2 \alpha \sin p(\pi - 2\alpha), \\ T_{05}(p) = & (p + 1) \{ 2p \sin^2 \alpha [\sin 2p\alpha + \sin 2p(\pi - \alpha)] - \\ & - \sin 2\alpha (1 + 2 \sin^2 p\alpha) \} + \sin 2\alpha + \sin 2p(\pi - \alpha), \\ T_1(p) = & (1 + \alpha_1)T_{11}(p) + 4(1 - e)(1 + e\alpha_2)(1 + e\alpha_2 - e - \alpha_1) \sin p\pi T_{04}(p), \\ T_{11}(p) = & (1 + \alpha_1)^2 [\sin^2 p(\pi - \alpha) - \cos^2 \alpha] + e^2(1 + \alpha_2)^2 [4p(p + 1) \sin^2 \alpha \times \\ & \times \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi - \alpha) - \cos^2 \alpha] - 2(1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2) \times \\ & \times [2p \sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi - \alpha) + \cos^2 \alpha \cos 2p\alpha] - \\ & - 4(1 - e)(1 + \alpha_1) [(p + 1) \sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin p\pi \sin p(\pi - 2\alpha)] + \\ & + 4(1 - e)^2 [p(p + 2) \sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin^2 p(\pi - \alpha) - \\ & - \sin^2 p\alpha \cos^2 \alpha] + 4(1 - e)e(1 + \alpha_2) \times \\ & \times [(2p + 1)(p + 1) \sin^2 \alpha \sin^2 p\alpha + \sin p\pi \sin p(\pi - 2\alpha)]. \end{aligned}$$

На початковому етапі розвитку зони передруйнування, коли відсутня область деструкції, розкриття тріщини в її вершині згідно з прийнятими в (1) крайовими умовами ( $\langle u_\theta(r, \pm \pi) \rangle = 0$ ,  $\langle u_r(r, \alpha) \rangle = 0$ ) дорівнює нулеві, тому використання деформаційного критерію руйнування є неможливим. Проте можна уявити механізм зрушення тріщини, за яким спочатку відбудеться розрив міжчастинкових зв'язків у зоні передруйнування в місці

максимального стрибка нормального переміщення  $\delta_n(r) = \langle u_\theta(r, \alpha) \rangle$  при досягненні ним критичного значення. В результаті утворюється мікротріщина, яка росте зі збільшенням навантаження аж до досягнення вершини початкової тріщини, що і призводить до її зрушення. Залежність  $\delta_n(r)$  визначаємо зі знайденого розв'язку задачі:

$$\delta_n(r) = \frac{2(1 - \nu_1)\sigma_1}{G_1} r \sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_0(-1 - \lambda_i) \sin \lambda_i \pi}{D_1'(-1 - \lambda_i)} \times \frac{\mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i) J(\lambda_i) \lambda}{\mathcal{K}^+(-1) J(0) \lambda_i (\lambda_i - \lambda) (1 + \lambda_i)} \left(\frac{r}{\ell}\right)^{\lambda_i}. \quad (8)$$

Умова максимуму розкриття зони передруйнування  $\delta_n(r)$  призводить до рівняння для відстані  $r_m$ , при якій слід чекати утворення вторинної мікротріщини:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{D_0(-1 - \lambda_i) \sin \lambda_i \pi}{D_1'(-1 - \lambda_i)} \frac{\mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i) J(\lambda_i)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)} \left(\frac{r_m}{\ell}\right)^{\lambda_i} = 0. \quad (9)$$

Відповідно, значення найбільшого розкриття зони дорівнюватиме  $\delta_m = \delta_n(r_m)$ . У (8), (9) сума передбачається за всіма коренями  $\lambda_i$  рівняння (6), що задовольняють умову  $\text{Re } \lambda_i > -1$ ; проте насправді виявляється, що завдяки підвищеній концентрації напружень біля вершини тріщини маємо  $r_m \ll \ell$ , тому достатня точність визначення  $r_m$  досягається при врахуванні лише 4–6 перших коренів, і лише на відстанях одного порядку з  $\ell$  потрібно в сумі ряду (8) брати набагато більше доданків, особливо для підтвердження виконання умови  $\delta_n(\ell) = 0$ .

**Визначення параметрів області деструкції.** Як свідчать обчислення, рівняння (6) має корені у смузі  $-1 < \text{Re } x < 0$ , що вказує на збереження концентрації напружень у вершині тріщини. Це передбачає подальший розвиток зони передруйнування шляхом виникнення в ній області деструкції матеріалу з високим рівнем як відривних, так і зсувних деформацій. Відповідно до комплексної моделі зони передруйнування [10] зобразимо область деструкції лінією довжини  $d$ , на якій зазнає розрив не лише нормальне, але і дотичне переміщення, а дотичне напруження дорівнює опору зсуву першого матеріалу  $\tau_1$ .

Згідно з експериментальними даними [11, 12], передбачаємо, що довжина області деструкції набагато менша від довжини контактної зони і всієї зони передруйнування, тому досліджуване тіло можна розглядати (див. рис. 2) як кусково-однорідну площину, що містить на межі поділу напівнескінченну тріщину з контактними за законом сухого тертя берегами, з вершини  $O$  якої під кутом  $\alpha$  до межі поділу виходить напівнескінченна пряма лінія розриву, що складається з двох ділянок. На ділянці, яка примикає до вершини тріщини, зазнають розривів нормальне і дотичне переміщення, а нормальне і дотичне напруження дорівнюють  $\sigma_1$  і  $\tau_1$ . На другій ділянці зазнає розриву лише нормальне переміщення, а нормальне напруження дорівнює  $\sigma_1$ . Цій моделі відповідає статична задача теорії пружності з крайовими умовами [10]

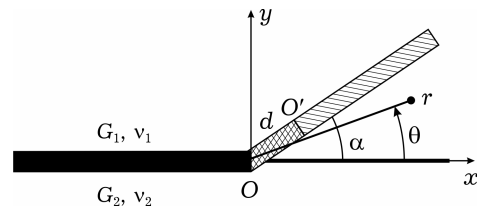


Рис. 2

$$\begin{aligned}
\theta = 0: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = \langle u_r \rangle = 0, \\
\theta = \pm \pi: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \langle u_\theta \rangle = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\mu \sigma_\theta, \\
\theta = \alpha: & \quad \langle \sigma_\theta \rangle = \langle \tau_{r\theta} \rangle = 0, \quad \theta = \alpha, \quad \sigma_\theta = \sigma_1,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
\theta = \alpha, \quad r < d: & \quad \tau_{r\theta} = \tau_1, \\
\theta = \alpha, \quad r > d: & \quad \langle u_r \rangle = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

При  $r \rightarrow \infty$  головні члени розвинень напружень в асимптотичні ряди співпадають з головними членами розвинень напружень в асимптотичні ряди при  $r \rightarrow 0$  в задачі (рис. 1), розв'язок якої знайдено у попередній частині роботи. Зокрема, згідно з (7) маємо

$$\theta = \alpha, \quad r \rightarrow \infty: \quad \tau_{r\theta} = f_1(\alpha, e, v_1, v_2)\sigma_1 + \sum_{i=1}^2 C_i f_{2i}(\alpha, e, v_1, v_2) r^{\lambda_i} + o\left(\frac{1}{r}\right), \tag{12}$$

де

$$f_1 = \frac{T(-1)}{D_1(-1)}, \quad f_{2i} = \frac{T(-1 - \lambda_i)}{D_1'(-1 - \lambda_i)} \frac{\mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i) J(\lambda_i)}{\mathcal{K}^+(-1) J(0)} \frac{\lambda}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)},$$

$C_i = \sigma_1 \ell^{-\lambda_i}$ ,  $\ell$  – знайдена вище довжина всієї зони передруйнування, яка залежить від величини і конфігурації зовнішнього навантаження, заданої коефіцієнтом інтенсивності напружень  $k_{II}$  у кінці тріщини, що визначається з розв'язку зовнішньої задачі;  $\lambda_i$  – корені рівняння (6) у смузі  $-1 < \operatorname{Re} x < 0$ , яких є два і які є дійсними.

Розв'язок сформульованої крайової задачі (10)–(12) знаходимо методом Вінера – Гопфа. З нього отримуємо трансцендентне рівняння для обчислення довжини області деструкції:

$$\sum_{i=1}^2 \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(-1 - \lambda_i) J_1(0)}{(1 + \lambda_i) \mathcal{K}^+(-1) J_1(\lambda_i)} = \tau_1 - f_1 \sigma_1,$$

де

$$J_1(x) = \exp \left[ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(x+1) \ln |H(it)| + t \cdot \arg(H(it))}{t^2 + (x+1)^2} dt \right],$$

$$H(p) = \frac{\cos p\pi D_2(p)}{2 \sin^2 p\pi D_1(p)}, \quad D_2(p) = D_{20}(p) - \mu D_{21}(p),$$

$$\begin{aligned}
D_{20}(p) = & 0.5(1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2)d_2(p)s_1(p) - s_2(p)s_0(p) + e(1 + \alpha_2) \cos p\pi \times \\
& \times [4e^2(1 + \alpha_2)^2 d_1(p)d_4(p) - (1 + \alpha_1)^2 d_3(p)d_5(p) + \\
& + 2(1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2) \cos p\pi s_3(p)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{21}(p) = & 4 \sin p\pi s_4(p)[e^2(1 + \alpha_2)^2 d_4(p) + s_0(p)] + \\
& + 4(1 + \alpha_1)e(1 + \alpha_2)[\cos p\pi \sin 2p\alpha s_4(p) + \\
& + e(1 + \alpha_2)p(p-1) \sin^2 \alpha \sin p(\pi - 2\alpha)],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_0(p) = & (1 + \alpha_1)^2 - 2(1 + \alpha_1)[e(1 + \alpha_2) + 2(1 - e)] \sin^2 p\alpha - \\
& - [e(1 + \alpha_2) + 2(1 - e)]^2 d_4(p),
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
s_1(p) &= 2(1 + \alpha_1) \cos p\pi d_3(p) + 4e(1 + \alpha_2) \sin p\pi d_1(p), \\
s_2(p) &= 2(1 + \alpha_1) \sin p\pi d_3(p) - 4e(1 + \alpha_2) \cos p\pi d_1(p), \\
s_3(p) &= 2 \sin p\alpha \sin p(\pi - \alpha) + p \sin 2\alpha \sin p(\pi - 2\alpha) - \\
&\quad - 2p^2 \sin^2 \alpha \cos p(\pi - 2\alpha), \\
s_4(p) &= (1 + \alpha_1) d_6(p) + [e(1 + \chi_2) + 2(1 - e)] d_1(p), \\
d_1(p) &= \sin^2 p(\pi - \alpha) - p^2 \sin^2 \alpha, \quad d_2(p) = p \sin 2\alpha - \sin 2p\alpha, \\
d_3(p) &= p \sin 2\alpha - \sin 2p(\pi - \alpha), \quad d_4(p) = p^2 \sin^2 \alpha - \sin^2 p\alpha, \\
d_5(p) &= p \sin 2\alpha + \sin 2p\alpha, \quad d_6(p) = p \sin^2 \alpha - \sin^2 p(\pi - \alpha).
\end{aligned}$$

Поява області деструкції змінює напружено-деформований стан біля вершини тріщини, який тепер характеризуватиметься показником сингулярності напружень  $\lambda_{d1}$ , що визначається як найменший з інтервалу  $(-1, 0)$  корінь рівняння

$$D_2(-1 - x) = 0. \quad (13)$$

Якщо за відсутності області деструкції розкриття тріщини в її вершині дорівнює нулеві, то поява області деструкції призводить до ненульового зсувного зміщення берегів у вершині  $\delta$ , яке дорівнює  $\lim_{x \rightarrow -0} |\langle u \rangle_{y=0}|$  і яке визначаємо з розв'язку задачі:

$$\delta = -\frac{2(1 - \nu_1)}{G_1 \cos \alpha} \frac{d}{\sqrt{\pi H(0)}} \sum_{i=1}^2 \frac{C_i f_{2i} d^{\lambda_i} \mathcal{K}^+(1 + \lambda_i)}{J_1(\lambda_i)} \frac{\lambda_i}{(1 + \lambda_i)^2}.$$

Зрушення тріщини відбудеться при досягненні величиною  $\delta$  деякого критичного значення  $\delta_1$  – граничної витяжки [1], що є характеристикою міцності першого матеріалу. Припускаючи малість довжини зони передруйнування порівняно з довжиною контактної зони за будь-якого рівня навантаження аж до граничного, що є умовою прийнятності розглянутої моделі, з умови  $\delta = \delta_1$  можна визначити величину руйнівного навантаження.

**Аналіз отриманих результатів.** Як впливає з попереднього розгляду, параметри маломасштабної зони передруйнування повністю визначаються пружними і непружними характеристиками з'єднаних матеріалів і коефіцієнтом інтенсивності напружень у кінці тріщини, який можна визначити незалежно від проблеми, яку досліджуємо тут, для будь-яких кусково-однорідного тіла належної будови, а також величини і конфігурації зовнішнього навантаження шляхом числового або (при можливості) аналітичного розв'язання відповідної крайової задачі теорії пружності. Оскільки останнє не входило в цілі нашої роботи, для ілюстрації застосування знайденого вище розв'язку задачі про зону передруйнування і з метою аналізу його наслідків скористаємося результатами дослідження контакту берегів міжфазної тріщини довжини  $L$  в кусково-однорідній площині при її навантаженні нескінченно віддаленим дотичним напруженням  $q$  ( $\tau_{xy} \rightarrow -q$  при  $x, y \rightarrow \infty$ ), здійсненого в [15]. Як показано в [15, 22–26], у випадку такого навантаження розміри контактної зони біля однієї з вершин є достатньо великими і мають однаковий порядок з довжиною тріщини.

Результати обчислень параметрів зони передруйнування (кута нахилу  $\alpha$  до межі поділу матеріалів, знайденого з умови (5), відносних довжин  $s/L$  контактної зони (згідно з [15]),  $\ell/L$  і  $d/L$  усієї зони передруйнування і області деструкції, нормованого розкриття тріщини  $\frac{\delta}{L} \frac{G_1}{\sigma_1}$ ) наведено в табл. 1

для деяких значень відношення модулів зсуву  $G_1/G_2$  з'єднаних матеріалів з однаковими коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$  при різних значеннях коефіцієнта тертя  $\mu$  і зовнішньому навантаженні  $q = 0.1\sigma_1$ .

При обчисленнях параметрів області деструкції опір зсуву першого матеріалу приймали рівним  $\tau_1 = 5\sigma_1$ , що відповідає його слабкій пластичності. Для менших значень  $\tau_1$  (особливо при  $\tau_1 \leq \sigma_1$ ) довжина області деструкції виявляється одного порядку з довжиною зони передруйнування. Це порушує початкові передумови задачі ( $d \ll \ell$ ) і передбачає інший механізм розвитку зони передруйнування: утворення більш розвинутої пластичної зони, що моделюється лінією розриву дотичного переміщення [3], у привершинній частині якої існує мала область деструкції, де зазнають розриву і дотичне, і нормальне переміщення.

Згідно з розрахунками, довжина області деструкції, на відміну від довжини зони передруйнування, росте зі збільшенням коефіцієнта тертя між берегами тріщини. Їх розміри також зростають при збільшенні відношення модулів зсуву матеріалів  $G_1/G_2$ , тобто при наближенні жорсткості верхнього матеріалу до жорсткості підкладки. У прийнятих умовах навантаження довжина зони передруйнування виявляється майже на два порядки меншою від довжини контактної зони, а довжина області деструкції є набагато меншою від довжини всієї зони передруйнування. Тому для таких достатньо низьких значень напружень використання розглянутої моделі цілком виправдане, тоді як для більших навантажень прийнята за постановкою задачі умова маломасштабності зони не виконується, а відповідні результати повинні розглядатися лише як наближена екстраполяція.

Кут нахилу зони спадає зі збільшенням (абсолютного значення) коефіцієнта тертя. Оскільки орієнтація зони передруйнування як області послаблених міжчастинкових зв'язків визначає напрям подальшого поширення тріщини після досягнення умов зрушення, звідси випливає, що більше значення коефіцієнта тертя зменшує кут відхилення тріщини від межі поділу. Цей результат узгоджується з висновками дослідження повороту тріщини в однорідному тілі, береги якої зміщуються один відносно одного з тертям [27]. Можна відмітити близькість числових значень передбачуваних у [27] кутів повороту тріщини в однорідному тілі, знайдених методом скінченних елементів з умови максимуму її розкриття у вершині, зі значеннями, обчисленими у цій роботі в рамках комплексної моделі для близького до однорідного тіла при  $G_1/G_2 = 0.9$  (табл. 1).

Відповідно до (5) величина навантаження кусково-однорідного тіла з міжфазною тріщиною не впливає на орієнтацію зони передруйнування, яка, таким чином, залежатиме лише від пружних параметрів матеріалів композиита і коефіцієнта тертя між берегами. У незалежності кута нахилу зони від зовнішнього навантаження полягає принципова відмінність висновків, які випливають з отриманого розв'язку, від результатів аналогічного дослідження у рамках моделі відкритої міжфазної тріщини [5, 8]. Значення кута нахилу зони в кінці тріщини без урахування контакту берегів, обчислені за чистого зсуву в [5], відрізняються від знайдених у цій роботі.

У табл. 1 наведено значення показників степеня сингулярності напружень у вершині до,  $\lambda$ , і після,  $\lambda_1$ , утворення початкової зони передруйнування, а також після виникнення області деструкції,  $\lambda_{d1}$ . Порівняння  $\lambda$  і  $\lambda_1$  показує, що поява зони призводить до підвищення концентрації напружень в околі вершини ( $\lambda_1 < \lambda$ ), неминучим наслідком чого стає подальший розвиток зони шляхом утворення в ній області деструкції. Поява області деструкції призводить до послаблення концентрації напружень у вершині тріщини: найменший корінь  $\lambda_{d1}$  рівняння (13) з інтервалу  $(-1, 0)$  є більшим

не тільки від показника  $\lambda_1$  після утворення початкової зони передруйнування, але і від показника  $\lambda$  до утворення обох зон ( $\lambda_{d1} > \lambda > \lambda_1$ ). Отже, з виникненням області деструкції усувається посилення концентрації напружень внаслідок утворення початкової зони передруйнування.

Таблиця 1. Параметри комплексної зони передруйнування.

| $G_1/G_2$ | $\mu$                                   | 0                    | -0.05                | -0.1                 | -0.15                | -0.2                 | -0.25                | -0.3                 |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0.1       | $\alpha, ^\circ$                        | 67.57                | 67.37                | 67.16                | 66.95                | 66.75                | 66.54                | 66.34                |
|           | $s/L$                                   | 0.3098               | 0.3115               | 0.3133               | 0.3150               | 0.3168               | 0.3185               | 0.3203               |
|           | $\ell/L$                                | $6.19 \cdot 10^{-3}$ | $6.06 \cdot 10^{-3}$ | $5.94 \cdot 10^{-3}$ | $5.83 \cdot 10^{-3}$ | $5.73 \cdot 10^{-3}$ | $5.64 \cdot 10^{-3}$ | $5.56 \cdot 10^{-3}$ |
|           | $d/L$                                   | $1.94 \cdot 10^{-4}$ | $2.02 \cdot 10^{-4}$ | $2.12 \cdot 10^{-4}$ | $2.22 \cdot 10^{-4}$ | $2.34 \cdot 10^{-4}$ | $2.48 \cdot 10^{-4}$ | $2.65 \cdot 10^{-4}$ |
|           | $\frac{\delta}{L} \frac{G_1}{\sigma_1}$ | $3.83 \cdot 10^{-3}$ | $3.95 \cdot 10^{-3}$ | $4.08 \cdot 10^{-3}$ | $4.22 \cdot 10^{-3}$ | $4.38 \cdot 10^{-3}$ | $4.56 \cdot 10^{-3}$ | $4.76 \cdot 10^{-3}$ |
|           | $\lambda$                               | -0.5                 | -0.4963              | -0.4926              | -0.4888              | -0.4851              | -0.4814              | -0.4777              |
|           | $\lambda_1$                             | -0.8422              | -0.8514              | -0.8610              | -0.8712              | -0.8821              | -0.8940              | -0.9073              |
|           | $\lambda_{d1}$                          | -0.3435              | -0.3221              | -0.3008              | -0.2801              | -0.2613              | -0.2460              | -0.2353              |
| 0.9       | $\alpha, ^\circ$                        | 70.33                | 70.31                | 70.30                | 70.28                | 70.27                | 70.25                | 70.24                |
|           | $s/L$                                   | 0.3052               | 0.3053               | 0.3054               | 0.3055               | 0.3056               | 0.3057               | 0.3059               |
|           | $\ell/L$                                | $6.96 \cdot 10^{-3}$ | $7.03 \cdot 10^{-3}$ | $7.10 \cdot 10^{-3}$ | $7.19 \cdot 10^{-3}$ | $7.29 \cdot 10^{-3}$ | $7.43 \cdot 10^{-3}$ | $7.62 \cdot 10^{-3}$ |
|           | $d/L$                                   | $2.14 \cdot 10^{-4}$ | $2.33 \cdot 10^{-4}$ | $2.56 \cdot 10^{-4}$ | $2.82 \cdot 10^{-4}$ | $3.16 \cdot 10^{-4}$ | $3.61 \cdot 10^{-4}$ | $4.34 \cdot 10^{-4}$ |
|           | $\frac{\delta}{L} \frac{G_1}{\sigma_1}$ | $7.44 \cdot 10^{-3}$ | $8.19 \cdot 10^{-3}$ | $9.06 \cdot 10^{-3}$ | $1.01 \cdot 10^{-2}$ | $1.15 \cdot 10^{-2}$ | $1.34 \cdot 10^{-2}$ | $1.67 \cdot 10^{-2}$ |
|           | $\lambda$                               | -0.5                 | -0.4998              | 0.4995               | -0.4993              | -0.4990              | -0.4988              | -0.4986              |
|           | $\lambda_1$                             | -0.8731              | -0.8841              | -0.8957              | -0.9080              | -0.9215              | -0.9368              | -0.9556              |
|           | $\lambda_{d1}$                          | -0.4880              | -0.4875              | -0.4871              | -0.4867              | -0.4864              | -0.4861              | -0.4858              |

Що стосується максимального розкриття зони передруйнування  $\delta_m$  на етапі її розвитку, коли область деструкції ще відсутня, наведені в табл. 2 результати розрахунків (у випадку  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ ,  $q = 0.08\sigma_1$ ) показують, що при малих відношення  $G_1/G_2$  його значення повільно зменшується з ростом тертя, тоді як при  $G_1/G_2$ , близьких до 1, ця залежність є протилежною. Відстань  $r_m$  від вершини початкової тріщини, при якій може виникнути бічна мікротріщина, тим менша, чим більший коефіцієнт тертя її берегів і жорсткість верхнього матеріалу.

Таблиця 2. Розкриття початкової зони передруйнування.

| $G_1/G_2$ | $\mu$                                     | 0                    | -0.05                | -0.1                 | -0.15                | -0.2                 | -0.25                | -0.3                 |
|-----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0.1       | $r_m/L$                                   | $1.98 \cdot 10^{-4}$ | $1.87 \cdot 10^{-4}$ | $1.76 \cdot 10^{-4}$ | $1.63 \cdot 10^{-4}$ | $1.50 \cdot 10^{-4}$ | $1.36 \cdot 10^{-4}$ | $1.20 \cdot 10^{-4}$ |
|           | $\frac{\delta_m}{L} \frac{G_1}{\sigma_1}$ | $1.29 \cdot 10^{-4}$ | $1.27 \cdot 10^{-4}$ | $1.24 \cdot 10^{-4}$ | $1.22 \cdot 10^{-4}$ | $1.21 \cdot 10^{-4}$ | $1.21 \cdot 10^{-4}$ | $1.21 \cdot 10^{-4}$ |
| 0.9       | $r_m/L$                                   | $1.25 \cdot 10^{-4}$ | $1.17 \cdot 10^{-4}$ | $1.07 \cdot 10^{-4}$ | $9.58 \cdot 10^{-5}$ | $8.28 \cdot 10^{-5}$ | $6.70 \cdot 10^{-5}$ | $4.63 \cdot 10^{-5}$ |
|           | $\frac{\delta_m}{L} \frac{G_1}{\sigma_1}$ | $3.77 \cdot 10^{-5}$ | $3.89 \cdot 10^{-5}$ | $4.02 \cdot 10^{-5}$ | $4.19 \cdot 10^{-5}$ | $4.40 \cdot 10^{-5}$ | $4.67 \cdot 10^{-5}$ | $5.09 \cdot 10^{-5}$ |

Механізм зрушення міжфазної тріщини за зсуву шляхом утворення бічної мікротріщини може бути актуальним при достатньо великому терті берегів. Тоді, як числове моделювання показало [24], біля вершини тріщини відбувається злипання берегів, тому їх відносне ковзання, а отже, і зрушення тріщини за механізмом зсуву, стає неможливим.

**Висновки.** Досліджено комплексну модель зони передруйнування, яка відповідає наступному механізму початкового розвитку міжфазної тріщини в умовах зсуву. Біля вершини тріщини утворюється область контакту берегів і вузька бічна зона передруйнування, у привершинній частині якої виникає зона підвищеної деформації матеріалу – область деструкції, що разом призводять до відносного зсуву вершин верхнього і нижнього берегів – розкриття тріщини. Зі збільшенням навантаження розміри зони передруйнування і області деструкції, а також розкриття тріщини зростають. При деякому значенні напруження розкриття стає рівним критичному і відбувається зрушення тріщини в напрямку, що визначається орієнтацією зони передруйнування, а переважаючим механізмом руйнування в цій частині тріщини є зсув.

1. Бакиров В. Ф., Гольдштейн Р. В. Модель Леонова–Панасюка–Дагдейла для тріщини на границі соединения материалов // Прикл. математика и механика. – 2004. – **68**, № 1. – С. 170–179.  
Te same: *Bakirov V. F., Gol'dshtein R. V.* The Leonov–Panasyuk–Dugdale model for a crack at the interface of the joint of materials // *J. Appl. Math. Mech.* – 2004 – **68**, No. 1. – P. 153–161.
2. Гузь А. Н. О физически некорректных результатах механики разрушения // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 10. – С. 4–22.  
Te same: *Guz A. N.* On physically incorrect results in fracture mechanics // *Int. Appl. Mech.* – 2009 – **45**, No. 10. – P. 1041–1051.
3. Дудик М. В. Влияние трения берегов межфазной трещины на развитие начальной пластической зоны // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 81–90.
4. Дундурс Дж., Комниноу М. Обзор и перспектива исследования межфазной трещины // Механика композитн. материалов. – 1979. – № 3. – С. 387–396.
5. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Исследование процесса начального поворота трещины на границе раздела двух упругих сред при растяжении и сдвиге // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 6. – С. 71–79.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* Initial kinking of an interface crack between two elastic media under tension and shear // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 6. – P. 635–642.
6. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. Начальная зона предразрушения в конце межфазной трещины с гладким контактом берегов // Теорет. и прикл. механика. – 2007. – Вып. 43. – С. 63–68.
7. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О направлении развития тонкой пластической зоны в вершине трещины на границе раздела различных сред // Прикл. механика. – 2006. – **42**, № 2. – С. 14–23.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* On the direction of development of a thin fracture process zone at the tip of an interfacial crack between dissimilar media // *Int. Appl. Mech.* – 2006. – **42**, No. 2. – P. 136–144.
8. Каминский А. А., Дудик М. В., Кипнис Л. А. О начальном повороте трещины, расположенной на границе раздела двух упругих сред // Прикл. механика. – 2007. – **43**, № 10. – С. 28–41.  
Te same: *Kaminsky A. A., Dudik M. V., Kipnis L. A.* Initial kinking of an interface crack between two elastic media // *Int. Appl. Mech.* – 2007. – **43**, No. 10. – P. 1090–1099.
9. Каминский А. А., Кипнис Л. А. О комплексной модели зоны предразрушения в конце трещины на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2010. – № 2. – С. 59–63.
10. Каминский А. А., Кипнис Л. А. О страгивании трещины, расположенной на границе раздела упругих сред // Доп. НАН України. – 2011. – № 1. – С. 38–43.
11. Каминский А. А., Нижник С. Б. Исследование закономерностей изменения пластической зоны у края трещины и характеристик трещиностойкости металлических материалов в зависимости от их структуры (обзор) // Прикл. механика. – 1995. – **31**, № 10. – С. 3–27.  
Te same: *Kaminskiĭ A. A., Nizhnik S. B.* Study of the laws governing the change in the plastic zone at the crack tip and characteristics of the fracture toughness of metallic materials in relation to their structure (survey) // *Int. Appl. Mech.* – 1995. – **31**, No. 10. – P. 777–798.

12. Каминский А. А., Усикова Г. И., Дмитриева Е. А. Экспериментальное исследование распределения пластических деформаций в окрестности вершины трещины при статическом нагружении // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 11. – С. 69–75.  
Te same: Kaminskii A. A., Usikova G. I., Dmitrieva E. A. Experimental study of the distribution of plastic strains near a crack tip during static loading // Int. Appl. Mech. – 1994. – **30**, No. 11. – P. 892–897.
13. Когут І. С., Калита Г. І. Визначення розмірів зони передруйнування квазікрихких надрізаних зразків // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – **44**, № 1. – С. 84–87.  
Te same: Kohut I. S., Kalyta H. I. Evaluation of the sizes of the process zone for quasibrittle notched specimens // Mater. Sci. – 2008. – **44**, No. 1. – P. 97–103.
14. Нобл Б. Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. – 279 с.
15. Острик В. И., Улитко А. Ф. Метод Винера–Хопфа в контактных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 2006. – 328 с.
16. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 246 с.
17. Панасюк В. В., Панько І. М. Гранична рівновага тіла з тріщиною з урахуванням особливостей розподілу напружень біля її вершини // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2005. – **41**, № 4. – С. 5–8.  
Te same: Panasyuk V. V., Pan'ko I. M. Limiting equilibrium of a cracked body with regard for the specific features of the distribution of stresses near the crack tip // Mater. Sci. – 2005. – **41**, No. 4. – P. 433–438.
18. Панько І. М. Теоретичні основи інженерних методів для оцінки тріщиностійкості матеріалів і елементів конструкцій. – Львів: Вид. центр Львів. нац. ун-ту ім. І. Франка, 2000. – 279 с.
19. Эрдоган Ф., Си Дж. О распространении трещины в пластинах при плоском нагружении и поперечном сдвиге // Тр. Амер. об-ва инж.-механиков. Теорет. основы инж. расчетов. Сер. Д. – 1963. – **85**, № 4. – С. 49–59.  
Te same: Erdogan F., Sih G. C. On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear // J. Basic Engng. – 1963. – **85**, No. 4. – P. 519–527.
20. Comninou M. Interface crack with friction in the contact zone // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 780–781.
21. Comninou M. The interface crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1977. – **44**, No. 4. – P. 631–636.
22. Comninou M., Dundurs J. Effect of friction on the interface crack loaded in shear // J. Elasticity. – 1980. – **10**, No. 2. – P. 203–212.
23. Comninou M., Schmueser D. The interface crack in a combined tension-compression and shear field // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1979. – **46**, No. 2. – P. 345–348.
24. Dorogoy A., Banks-Sills L. Effect of crack face contact and friction on Brazilian disk specimens – A finite difference solution // Eng. Fract. Mech. – 2005. – **72**, No. 18. – P. 2758–2773.
25. Dorogoy A., Banks-Sills L. Shear loaded interface crack under the influence of friction: a finite difference solution // Int. J. Numer. Meth. Eng. – 2004. – **59**, No. 13. – P. 1749–1780.
26. Gutesen A. K., Dundurs J. The interface crack under combined loading // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**, No. 3. – P. 580–586.
27. Isaksson P., Ståhle P. A directional crack path criterion for crack growth in ductile materials subjected to shear and compressive loading under plane strain conditions // Int. J. Solids Struct. – 2003. – **40**, No. 13–14. – P. 3523–3536.
28. Leblond J.-B., Frelat J. Crack kinking from an initially closed, ordinary or interface crack, in the presence of friction // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**, No. 3. – P. 289–307.
29. Rice J. R. Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1988. – **55**, No. 1. – P. 98–103.
30. Smith E. Some implications of recent developments in plastic fracture mechanics on stress corrosion cracking in engineering materials // Mater. Sci. Eng. – 1980. – **44**, No. 2. – P. 205–211.
31. Tvergaard V., Hutchinson J. W. The influence of plasticity on mixed mode interface toughness // J. Mech. Phys. Solids. – 1993. – **41**, No. 6. – P. 1119–1135.

**ИССЛЕДОВАНИЕ ЗОНЫ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ ВБЛИЗИ  
ВЕРШИНЫ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОМ ТЕЛЕ ПРИ  
СДВИГЕ В РАМКАХ КОМПЛЕКСНОЙ МОДЕЛИ**

*В условиях плоской деформации методом Винера–Хопфа выполнен расчет узкой маломасштабной зоны предразрушения в упругом теле при сдвиге вблизи вершины межфазной трещины, берега которой контактируют с трением. Зона предразрушения моделируется выходящей из вершины трещины под углом к границе раздела сред прямой линией разрыва смещения, состоящей из двух участков. На примыкающем к вершине трещины участке, моделирующем область деструкции материала, терпят разрыв и нормальное, и касательное смещения, а на другом участке разрыв терпит лишь нормальное смещение. Угол между зоной предразрушения и границей раздела сред устанавливается из условия максимума растягивающего окружного напряжения. Определены размеры всей зоны предразрушения и области деструкции, раскрытие трещины в ее вершине и максимальное раскрытие начальной зоны предразрушения. Исследовано влияние коэффициента трения на параметры зоны предразрушения. Используя деформационный критерий разрушения, проанализирована роль области деструкции в страгивании трещины. Обнаружено, что страгивание трещины происходит в результате относительного сдвига ее берегов вблизи вершины. Приведено сравнение полученных результатов с данными других исследователей.*

**THE INVESTIGATION OF PREFRACTURE ZONE AT THE TIP OF  
INTERFACIAL CRACK IN AN ELASTIC BODY UNDER SHEAR WITHIN THE  
FRAMEWORK OF THE COMPLEX MODEL**

*The calculation of a narrow small-scale prefraction zone in an elastic body under the shear near the tip of the interfacial crack is investigated by means of the Wiener–Hopf method for the plane strain conditions. The crack faces are in friction contact near the tips. The prefraction zone is modeled as going out from the crack tip at an angle to the interface boundary straight line of a displacement discontinuity, which consists of two parts. In the part adjacent to the crack tip modeling a process zone, both the normal and tangential displacements are assumed to be discontinuous. In the second part, the normal displacement is discontinuous only. The inclination angle between the prefraction zone and the interface is determined from the condition of stretched circular stress maximum. The expressions for calculation of dimensions of the whole prefraction zone, and of the process zone, the crack opening displacement at the tip, and maximum opening of the initial prefraction zone are obtained. The influence of the friction coefficient on the parameters of prefraction zone is studied. The importance of process zone in the crack starting is analyzed by using the deformation criterion of fracture. The fact that the crack starting occurs due to the relative shear of the faces near the crack tip is discovered. The comparison of the obtained results with the data of other researchers is carried out.*

<sup>1</sup> Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
НАН України, Київ,  
<sup>2</sup> Уманськ. держ. пед. ун-т, Умань

Одержано  
18.06.13