

**УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВИХРЕЙ В КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ – ЭЙНШТЕЙНА:  
ВЛИЯНИЕ ВРАЩЕНИЯ И НЕОДНОРОДНОСТИ ПЛОТНОСТИ**

*Выводятся уравнения движения квантованных вихрей во вращающихся конденсатах Бозе – Эйнштейна в двух случаях: однородный конденсат в жестком вращающемся цилиндре и неоднородный конденсат во вращающейся магнитной ловушке в приближении Томаса – Ферми. Уравнения Шредингера для обеих сред приведены к удобному безразмерному виду. С помощью метода разложения по малому параметру получены два асимптотических решения в разных пространственных масштабах. Сопоставление главных членов этих решений дает искомые уравнения. Уравнения движения вихрей в однородном конденсате сводятся к известным уравнениям движения вихрей в идеальной жидкости. Неоднородность среды дает дополнительные слагаемые. Получены уравнения движения вихрей в самом общем случае: для любого числа вихрей, для сосудов любой формы, при наличии вращения и без него. Показано, что в частном случае движения одного вихря уравнения сводятся к известным уравнениям прецессии вихря. Приведены графики движения нескольких вихрей при различных начальных данных.*

**Введение.** Квантованные вихри на протяжении многих десятилетий остаются объектом исследования как физиков-теоретиков, так и физиков-экспериментаторов. Сначала эти вихри были теоретически предсказаны и открыты в сверхтекучем гелии. Наиболее полным итогом многолетних исследований является книга R. J. Donnelly [7]. Новая волна интереса к вихрям возникла после экспериментального открытия конденсатов Бозе – Эйнштейна, в которых тоже наблюдаются вихри. Из огромного количества публикаций по этой теме выделим недавние обзоры [9, 10], в которых приведены очень подробные списки работ за последние десятилетия. Настоящая работа продолжает исследования движения вихрей во вращающихся конденсатах *в двумерном случае*.

Для описания поведения конденсатов Бозе – Эйнштейна обычно используется теория Гросса – Питаевского, которая хорошо описывает поведение конденсатов как качественно, так и количественно. В качестве предварительной модельной задачи рассматривается поведение вихрей *в однородном конденсате* в жестком вращающемся цилиндре, а затем рассмотрен неоднородный конденсат во вращающейся магнитной ловушке в приближении Томаса – Ферми. Такая последовательность действий была использована в работе [11], где авторы вычислили энергию вращающихся конденсатов Бозе – Эйнштейна при наличии вихрей, а затем получили уравнения движения вихрей.

В этой работе предлагаем иной подход к проблеме. Сначала выпишем уравнения Эйлера (условия минимума функционала Гросса – Питаевского) в безразмерном виде, а затем будем следовать технике, использованной в работе Weinan E [8]: решение уравнений будем искать в виде разложения по малому параметру в двух разных пространственных масштабах. Малый параметр  $\varepsilon$  естественным образом появляется при переходе к безразмерным координатам: он определяется отношением кинетической энергии к энергии взаимодействия. Будем изучать нестационарные уравнения с правой частью  $-iu_t$ , так называемые *уравнения Шредингера*.

В работе получены уравнения движения вихрей в однородных и неоднородных конденсатах Бозе – Эйнштейна. В случае *однородных конденсатов* получаем уравнения, совпадающие с уравнениями движения двумерных вихрей в идеальной жидкости. Неоднородность плотности и наличие вращения существенно изменяет эти уравнения. В частном случае

единственного вихря в конденсате без вращения получаем уравнение, выписанное явно в работе Kim Jong-kwan, A. Fetter [11]. Приведены примеры использования полученных уравнений для исследования движения вихрей в некоторых частных случаях.

**1. Уравнения Гросса – Питаевского в безразмерном виде и схема нахождения решений.** Для описания нестационарных вращающихся конденсатов Бозе – Эйнштейна удобно использовать лагранжев формализм: будем рассматривать лагранжиан [11]

$$L[\psi] = \int d\mathbf{r} \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left[ \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right] - \left[ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi|^2 + V_{tr} |\psi|^2 + i\hbar \psi^* \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) + \frac{Ng}{2} |\psi|^4 \right] \right\}. \quad (1)$$

Первое слагаемое учитывает явную зависимость волновой функции от времени, второе представляет собой энергию Гросса – Питаевского  $E_{GP}[\psi]$  во вращающейся системе координат. Здесь  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  – вектор угловой скорости,  $V_{tr} = \frac{m}{2} \sum_{\alpha=x,y} \omega_\alpha^2 r_\alpha^2$  – потенциал магнитной ловушки (захватывающий потенциал). В этой работе будем рассматривать двумерную ситуацию и осесимметричные ловушки:  $\omega_x = \omega_y = \omega$ ,  $\omega_z = 0$ . Тогда  $V_{tr} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Первые два слагаемых в энергии Гросса – Питаевского представляют собой кинетическую энергию  $E_{kin}$  и энергию ловушки  $E_{tr}$  соответственно, последнее – энергию взаимодействия атомов  $E_{int}$ . Третье слагаемое обеспечивает переход во вращающуюся систему координат. Кроме того, нужно учесть условие нормировки волновой функции  $\int d^2r |\psi|^2 = 1$ .

Будем предполагать, что при вращении конденсатов в них возникают квантованные вихри, расположенные в точках  $\mathbf{r}_j$ ,  $j=1, \dots, N_0$ , и имеющие интенсивность  $d_j = \pm 1$ . Число вихрей зависит от угловой скорости вращения, а положения вихрей являются функциями времени:  $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j(t) = (x_j(t), y_j(t))$ .

Волновую функцию  $\psi(\mathbf{r})$  будем искать в виде  $\psi(\mathbf{r}) = |\psi(\mathbf{r})| e^{i\phi(\mathbf{r}, \{\mathbf{r}_j\})}$ . Поле скоростей определяется как  $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\hbar/m) \nabla \phi$ , при этом предполагается, что вихри не влияют на профиль плотности, но определяют скорость жидкости. Профиль плотности  $|\psi(r)|$  считается либо постоянным (для однородного конденсата в жестком цилиндре), либо удовлетворяющим приближению Томаса – Ферми для неоднородного конденсата (см. ниже).

**А.** Сначала рассмотрим **однородный конденсат в жестком вращающемся цилиндре** радиуса  $R$ . В этом случае магнитной ловушки нет, и энергия Гросса – Питаевского  $E_{GP}[\psi]$  принимает вид

$$E_{GP}[\psi] = \int d^2r \left\{ \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \alpha + i\hbar \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \right) \psi + \frac{\beta}{2} |\psi|^4 \right\}.$$

Условие нормировки  $\int d^2r |\psi|^2 = 1$  уже учтено в слагаемом  $\alpha |\psi|^2$ , причем  $\alpha < 0$  [6]. Вариация  $\delta L / \delta \psi^*$  дает нестационарное уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi - |\alpha| \psi + \beta \psi |\psi|^2 + i\hbar \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2)$$

Перейдем к безразмерным переменным  $\{\boldsymbol{\rho}, u, \tilde{t}, \Omega_0\}$ , связанным с исходными размерными  $\{\mathbf{r}, \psi, t, \Omega\}$  соотношениями  $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}/R$ ,  $|u|^2 = \frac{\beta}{|\alpha|} |\psi|^2$ ,  $\tilde{t} = \frac{t}{t_0} \left( t_0 = \frac{2mR^2}{\hbar} \right)$ . (Заметим, что нормировочный параметр  $t_0$  отличается от аналогичного параметра в [11]  $\Omega_0^{-1} = mR^2/\hbar$  вдвое.) Угловую скорость  $\Omega$  нормируем на ту же величину  $t_0$ :  $\Omega_0 = \Omega t_0$ . Тогда уравнение (2) принимает вид

$$\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(1 - |u|^2) - i(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla u = -iu_{\tilde{t}}. \quad (3)$$

Безразмерный параметр  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar^2}{2mR^2|\alpha|}}$  чрезвычайно мал при всех конечных размерах сосуда (в реальных экспериментах  $R \sim 1$  см).

**Б. Неоднородные конденсаты Бозе – Эйнштейна.** Вернемся теперь к общему виду функционала (1). Вариация этого функционала относительно  $\psi^*$  дает нестационарное уравнение Шредингера:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi - \mu \psi + Ng \psi |\psi|^2 + i \hbar \boldsymbol{\Omega} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \psi) = i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad (4)$$

где химический потенциал  $\mu$  – множитель Лагранжа из условия нормировки.

Основное состояние системы в стационарном случае в отсутствии вращения может быть получено как решение стационарного уравнения Гросса – Питаевского:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 \psi + Ng \psi |\psi|^2 = \mu \psi. \quad (5)$$

В пределе Томаса – Ферми изменением плотности в кинетической энергии можно пренебречь:  $|\nabla \psi|^2 = (\nabla |\psi|)^2 + |\psi|^2 (\nabla \varphi)^2 \approx |\psi|^2 (\nabla \varphi)^2$ . Тогда для равновесной плотности (при отсутствии вихрей) получаем безвихревой параболический профиль Томаса – Ферми:

$$n_0(r) \equiv |\psi|^2 = \frac{\mu - m \omega^2 r^2 / 2}{Ng} \theta(\mu - m \omega^2 r^2 / 2),$$

где  $\theta(x)$  – единичная ступенчатая функция.

Отсюда радиус конденсата (окружность, на которой плотность обращается в нуль) получается в виде  $R_{\text{TF}} = \sqrt{2\mu/(m\omega^2)}$ . Таким образом, в отличие от жидкости в жестком цилиндре, где объем ограничен исключительно объемом цилиндра, размер газообразного неоднородного конденсата Бозе – Эйнштейна определяется противодействием двух сил: силы отталкивания атомов и силы магнитной ловушки. В общем случае граница конденсата представляет собой эллипсоид, размеры которого определяются частотами ловушки  $\{\omega_x, \omega_y, \omega_z\}$ . В осесимметричном двумерном случае  $\omega_x = \omega_y = \omega$  эллипсоид вырождается в круг радиуса  $R = R_{\text{TF}}$ .

Из условия нормировки  $\int |\psi|^2 dV = 1$  получаем явное выражение для химического потенциала:  $\mu^2 = \frac{Ngm\omega^2}{\pi}$ . Плотность  $n_0$  тогда можно записать в виде

$$n_0(r) \equiv |\psi|^2 = \frac{2}{\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^4} \theta(R^2 - r^2). \quad (6)$$

Перейдем к безразмерным переменным  $(\rho, u)$ :  $\rho = \mathbf{r}/R$ ,  $|u|^2 = \frac{\pi}{2} |\psi|^2 R^2$ , где  $R$  – радиус Томаса – Ферми. Плотность (6) примет вид

$$\tilde{n}_0(\rho) = (1 - \rho^2)\theta(1 - \rho^2), \quad (7)$$

а уравнение (5) запишется как

$$\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u((1 - \rho^2) - |u|^2) = 0, \quad (8)$$

где безразмерный параметр  $\varepsilon^2 = \frac{\hbar^2}{2mNgR^2}$  определяется отношением кинетической энергии к энергии взаимодействия и представляет собой квадрат безразмерного радиуса ко́ра вихря. В пределе Томаса – Ферми этот параметр мал [10], поэтому он является подходящим параметром для разложения. Заметим, что в случае неоднородных конденсатов плотность обращается в нуль на границе облака (при  $\rho = 1$ ), поэтому условие зануления потока жидкости на границе автоматически выполняется, и никаких «отраженных вихрей» в этом случае не требуется.

При малых угловых скоростях вращения конденсата ( $\Omega \ll \omega$ ) число вихрей невелико, и они практически не влияют на движение газа в облаке: конденсат, как и сверхтекучая жидкость, не вовлекается во вращение иначе как через движение вихрей. Поэтому *равновесная плотность* конденсата (6) в пределе Томаса – Ферми остается неизменной.

При малых угловых скоростях вращения конденсата ( $\Omega \ll \omega$ ) число вихрей невелико, и они практически не влияют на движение газа в облаке: конденсат, как и сверхтекучая жидкость, не вовлекается во вращение иначе как через движение вихрей. Поэтому *равновесная плотность* конденсата (6) в пределе Томаса – Ферми остается неизменной.

При малых угловых скоростях вращения конденсата ( $\Omega \ll \omega$ ) число вихрей невелико, и они практически не влияют на движение газа в облаке: конденсат, как и сверхтекучая жидкость, не вовлекается во вращение иначе как через движение вихрей. Поэтому *равновесная плотность* конденсата (6) в пределе Томаса – Ферми остается неизменной.

Переходя к безразмерным переменным в уравнении (4), получаем

$$\Delta u + \frac{1}{\varepsilon^2} u(\tilde{n}_0(\rho) - |u|^2) - i(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\rho}) \cdot \nabla u = -i \frac{\partial u}{\partial \tilde{t}}. \quad (9)$$

Это уравнение отличается от уравнения для однородного конденсата в жестком цилиндре (3) только наличием неоднородной плотности  $\tilde{n}_0(\rho)$ .

Увеличение угловой скорости вращения увеличивает радиус конденсата и влияет на количество образующихся вихрей, что требует уточнений и дополнительных предположений при выводе уравнений (см. [10]). В этой статье будем считать, что *угловая скорость  $\Omega$  невелика* (близка к критической скорости образования первого вихря), *число вихрей мало* (в примерах рассматриваем от 1 до 4 вихрей) и *равновесная плотность близка к (6)*.

Итак, безразмерные уравнения Шредингера имеют вид:

(а) для вращающегося однородного конденсата – уравнение (3);

(б) для неоднородного конденсата во вращающейся ловушке – уравнение (9).

Для простоты в дальнейшем волну над  $t$  и  $n_0$  опускаем.

Наша задача – получить уравнения движения вихрей в однородных и неоднородных вращающихся конденсатах Бозе – Эйнштейна.

Для этого воспользуемся схемой «асимптотического сопоставления решений», используемой, в частности, в работе [8] и обоснованной в монографии [5].

1°. Перейдем в систему координат, связанную с  $j$ -м вихрем:  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\xi}_j(t) + \mathbf{r}$ ,

$\mathbf{r} = r \exp(i\theta)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_j = \mathbf{r}_j/R$ . В подвижной системе координат производная

по времени примет вид  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla$ .

2°. Сначала построим «внешнее решение» (*outer solution*) – решение уравнения (3) или (9), *удовлетворяющее условию отсутствия потока жидкости на внешней границе*. Будем искать его в области вблизи  $j$ -го вихря  $\varepsilon^{1/2} < r < 2\varepsilon^{1/2}$  в виде разложения

$$u(\mathbf{r}, t) = u_0(\mathbf{r}, t) + \varepsilon u_1(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 u_2(\mathbf{r}, t) + \dots \quad (10)$$

Подстановка разложения (10) в уравнения (3) и (9) дает последовательность уравнений для функций  $u_0(\mathbf{r}, t)$ ,  $u_1(\mathbf{r}, t)$ ,  $u_2(\mathbf{r}, t)$ , ...

3°. Растянем координаты в  $1/\varepsilon$  раз: перейдем к переменным  $\mathbf{R} = (\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\xi}_j)/\varepsilon = \mathbf{r}/\varepsilon$ . Тогда  $\boldsymbol{\rho} = \varepsilon\mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}_j$ , граница вихря определяется условием  $R = 1$ , а уравнения принимают вид  
– для однородного конденсата:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_R U + \frac{1}{\varepsilon^2} U(1 - |U|^2) - \frac{i}{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times (\varepsilon\mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}_j)) \cdot \nabla_R U = \\ = -i \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla_R U) \right); \end{aligned} \quad (11)$$

– для неоднородного конденсата Бозе – Эйнштейна:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varepsilon^2} \Delta_R U + \frac{1}{\varepsilon^2} U((1 - (\varepsilon\mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}_j)^2) - |U|^2) - \frac{i}{\varepsilon} (\boldsymbol{\Omega}_0 \times (\varepsilon\mathbf{R} + \boldsymbol{\xi}_j)) \cdot \nabla_R U = \\ = -i \left( \frac{\partial U}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla_R U) \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Решения этих уравнений называют «внутренними» (*inner*), они должны удовлетворять граничному условию  $U = 0$  на границе  $j$ -го вихря и выходить на равновесное решение вдали от вихря. Поскольку здесь не учитываем изменение плотности вблизи вихря, будем искать эти решения только вдали от вихря, или, более точно, при  $\varepsilon^{-1/2} < R < 2\varepsilon^{-1/2}$ , в виде разложения

$$U(\mathbf{R}, t) = U_0(\mathbf{R}, t) + \varepsilon U_1(\mathbf{R}, t) + \varepsilon^2 U_2(\mathbf{R}, t) + \dots \quad (13)$$

Решаем последовательно уравнения для  $U_0, U_1, \dots$  и строим внутреннее решение.

4°. В указанном диапазоне расстояний ведущие члены разложений решений  $u(\mathbf{r}, t)$  и  $U(\mathbf{R}, t)$  при замене координат  $\mathbf{R} = \mathbf{r}/\varepsilon$  должны совпадать. Сопоставление решений и дает искомые уравнения движения вихрей.

**2. Однородный вращающийся конденсат в жестком цилиндре: вывод уравнений движения вихрей.** Эта задача (без учета вращения) была решена в работе [2], но для демонстрации метода и получения предварительных результатов приведем вывод уравнений еще раз, добавив вращение и иначе расставив акценты.

**Внешнее решение.** Подстановка разложения (10) в уравнение (3) дает последовательность уравнений:

$$\begin{aligned} u_0(1 - |u_0|^2) &= 0, \\ u_1(1 - |u_0|^2) - u_0(u_0 \bar{u}_1 + u_1 \bar{u}_0) &= 0, \\ \Delta u_0 + u_2(1 - |u_0|^2) - u_1(u_0 \bar{u}_1 + u_1 \bar{u}_0) - u_0(u_0 \bar{u}_2 + u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_0) - \\ &- i\boldsymbol{\Omega}_0 \times (\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla u_0 = -i \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla u_0 \right), \\ &\dots \end{aligned}$$

(чертой над функцией обозначено комплексное сопряжение). Первое уравнение дает

$$|u_0| = 1 \Rightarrow u_0(\mathbf{r}, t) = \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t)).$$

Функции  $u_1(\mathbf{r}, t), u_2(\mathbf{r}, t), \dots$  будем искать в виде

$$u_k(\mathbf{r}, t) = \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t))(u_{kr}(\mathbf{r}, t) + iu_{ki}(\mathbf{r}, t)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (14)$$

выделив множитель  $\exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t))$ , входящий в решение  $u_0(\mathbf{r}, t)$ . Тогда из

второго уравнения имеем  $u_{1r}(\mathbf{r}, t) = 0$ , а третье даст уравнение

$$\Delta\Phi_0(\mathbf{r}, t) = 0$$

(мнимая часть) и алгебраическое уравнение для  $u_{2r}(\mathbf{r}, t)$  (действительная часть).

Вблизи  $j$ -го вихря потенциал  $\varphi_0(\mathbf{r}, t)$  течения жидкости с вихрями может быть разложен в ряд ( $\mathbf{r} = r \exp(i\theta)$ ):

$$\varphi_0(\mathbf{r}, t) = d_j\theta + \Theta_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} r^m (C_{jk}^{(m)} \sin m\theta - S_{jk}^{(m)} \cos m\theta)$$

(см. Приложение, формула (A1), там же разъяснен смысл параметров). Общее решение уравнения для  $\Phi_0$  должно быть записано в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{r}, t) = & d_j\theta + \Theta_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} r^m (C_{jk}^{(m)} \sin m\theta - S_{jk}^{(m)} \cos m\theta) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m r^m \cos m\theta + B_m r^m \sin m\theta), \end{aligned}$$

где последняя сумма – произвольная гармоническая функция, обращающаяся в нуль при  $r = 0$ . Эта функция находится таким образом, чтобы обеспечить условие непротекания на стенках сосуда:  $\frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = 0$ . Для ее нахождения используется, например, метод отраженных вихрей [4]: к существующим вихрям добавляется система отраженных вихрей, симметричных реальным относительно границы и имеющих противоположную завихренность. Тогда число вихрей увеличивается (в случае цилиндра – удваивается) и суммирование в  $\{C_{jk}^{(m)}, S_{jk}^{(m)}\}$  проводится по всем вихрям, как реальным, так и отраженным.

Поэтому волновая функция  $u_0(\mathbf{r}, t)$  принимает вид

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{r}, t) = e^{i(d_j\theta + \Theta_j)} \left( 1 + i \left( -S_{jk}^{(1)} r \cos \theta + C_{jk}^{(1)} r \sin \theta - \frac{1}{2} S_{jk}^{(2)} r^2 \cos 2\theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} C_{jk}^{(2)} r^2 \sin 2\theta + \dots \right) \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Таково нулевое приближение внешнего решения уравнения для волновой функции в однородном вращающемся конденсате. Остальные функции имеют порядок  $\varepsilon$  и выше и оказываются нам не нужны.

**Внутреннее решение.** Подстановка разложения (13) в уравнение (11) дает последовательность уравнений для функций  $U_0, U_1, \dots$ :

$$\Delta U_0 + U_0(1 - |U_0|^2) = 0$$

$$\Delta U_1 + U_1(1 - |U_0|^2) - U_0(U_0 \bar{U}_1 + U_1 \bar{U}_0) - i(\mathbf{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}_j) \cdot \nabla U_0 = i(\boldsymbol{\xi}_j \cdot \nabla U_0),$$

.....

По аналогии с внешним решением функции  $U_0, U_1, \dots$  будем искать в виде

$$U_k(\mathbf{R}, t) = e^{iS_0} (u_{kr}(\mathbf{R}, t) + iu_{ki}(\mathbf{R}, t)), \quad (16)$$

где  $S_0 = d_j\theta + \Theta_j$  – показатель экспоненты в решении (15) – чистый вклад  $j$ -го вихря плюс фазовый сдвиг, обусловленный влиянием остальных вихрей.

Функцию  $U_0$  будем искать в виде  $U_0(\mathbf{R}, t) = e^{iS_0} f_0(\mathbf{R}, t)$ . Уравнение для  $U_0$  дает

$$\frac{\partial f_0}{\partial \theta} = 0, \quad f_0'' + \frac{1}{R} f_0' - \frac{1}{R^2} f_0 + f_0(1 - f_0^2) = 0 \quad (17)$$

(здесь учтено, что  $d_j = \pm 1$ , штрих означает производную по  $R$ ). При больших  $R$  плотность жидкости выходит на постоянное значение, поэтому  $f_0(R) \rightarrow 1$ . Разложение в ряд при больших  $R$  имеет вид

$$f_0(R) = 1 - \frac{1}{2R^2} - \frac{9}{8R^4} - \frac{161}{16R^6} - \dots \quad (18)$$

Уравнение для  $U_1$  дает два уравнения для функций  $u_{1r}(R, \theta, t)$ ,  $u_{1i}(R, \theta, t)$ :

$$\begin{aligned} \Delta u_{1r} - \frac{2d_j}{R^2} \frac{\partial u_{1i}}{\partial \theta} + u_{1r} \left( 1 - 3f_0^2 - \frac{1}{R^2} \right) + \frac{f_0 d_j \Omega_0}{R} (\zeta_j \sin \theta + \eta_j \cos \theta) + \\ + \frac{f_0 d_j}{R} (-\dot{\eta}_j \sin \theta + \dot{\zeta}_j \cos \theta) = 0, \\ \Delta u_{1i} + \frac{2d_j}{R^2} \frac{\partial u_{1r}}{\partial \theta} + u_{1i} \left( 1 - f_0^2 - \frac{1}{R^2} \right) - f_0' \Omega_0 (-\zeta_j \cos \theta + \eta_j \sin \theta) + \\ + f_0' (\dot{\eta}_j \cos \theta + \dot{\zeta}_j \sin \theta) = 0. \end{aligned}$$

Решения уравнений будем искать в виде рядов Фурье:

$$\begin{aligned} u_{1r}(R, \theta, t) = f_{00}(R, t) + f_{1c}(R, t) \cos \theta + f_{1s}(R, t) \sin \theta + \dots, \\ u_{1i}(R, \theta, t) = g_{00}(R, t) + g_{1c}(R, t) \cos \theta + g_{1s}(R, t) \sin \theta + \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Функции  $f_{00}(R, t)$ ,  $f_{1c}(R, t)$ ,  $f_{1s}(R, t)$ , ... получаются явно в виде степенных рядов:

$$\begin{aligned} f_{00}(R, t) &\equiv 0, \quad g_{00}(R, t) = b_0 f_0(R), \\ f_{1c}(R, t) &= \left( -\frac{d_j}{4} \Omega_0 \eta_j - \frac{d_j}{4} \dot{\zeta}_j - D_1 d_j \right) f_0'(R), \\ f_{1s}(R, t) &= \left( -\frac{d_j}{4} \Omega_0 \zeta_j + \frac{d_j}{4} \dot{\eta}_j + C_1 d_j \right) f_0'(R), \\ g_{1c}(R, t) &= (-\Omega_0 \zeta_j + \dot{\eta}_j) \left( \frac{R}{2} - \frac{11}{16R^3} - \frac{85}{16R^5} - \dots \right) + C_1 \frac{f_0(R)}{R}, \\ g_{1s}(R, t) &= (\Omega_0 \eta_j + \dot{\zeta}_j) \left( \frac{R}{2} - \frac{11}{16R^3} - \frac{85}{16R^5} - \dots \right) + D_1 \frac{f_0(R)}{R} \end{aligned}$$

(здесь  $f_0(R)$  – функция (18)). Постоянные  $b_0$ ,  $C_1$ ,  $D_1$ , появляющиеся из общего решения однородных уравнений, остаются произвольными. Заметим, что только функции  $g_{1c}(R, t)$ ,  $g_{1s}(R, t)$  начинаются со слагаемых порядка  $R$ , а функции  $f_{1c}(R, t)$ ,  $f_{1s}(R, t)$  начинаются со слагаемых  $R^{-3}$  и при замене  $R = r/\varepsilon$  дают  $\varepsilon^3$  в числителе, то есть становятся пренебрежимо малыми. Тогда с точностью до слагаемых порядка  $R$  внутреннее решение  $U(\mathbf{R}, t) \approx U_0(\mathbf{R}, t) + \varepsilon U_1(\mathbf{R}, t)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned} U(\mathbf{R}, t) = e^{i(d_j \theta + \Theta_j)} \left\{ 1 + \varepsilon \left[ i b_0 + i(\dot{\eta}_j - \Omega_0 \zeta_j) \cos \theta + (\Omega_0 \eta_j + \right. \right. \\ \left. \left. + \dot{\zeta}_j) \sin \theta \right] \frac{R}{2} + O(R^{-1}) \right\} + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (20)$$

**Сопоставление решений: уравнения и пример.** Теперь учтем, что  $R = r/\varepsilon$  и что главные члены разложений внешнего и внутреннего решения должны совпадать. В окрестности вихря слагаемые порядка  $r^2$  и выше во внешнем решении (15) пренебрежимо малы. Приравнивание слагаемых порядка  $r$  в мнимых частях обоих решений дает искомые уравнения движения вихрей:  $b_0 = 0$ ,

$$\begin{aligned}\dot{\eta}_j(t) - \Omega_0 \zeta_j(t) &= -2S_{jk}^{(1)}, \\ \dot{\zeta}_j(t) + \Omega_0 \eta_j(t) &= 2C_{jk}^{(1)}.\end{aligned}\quad (21)$$

Поскольку подобная процедура может быть проведена в окрестности каждого вихря, имеем систему  $2N_0$  дифференциальных уравнений первого порядка относительно координат вихрей  $\{\eta_j(t), \zeta_j(t)\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, N_0$ .

Выражения  $C_{jk}^{(1)}$ ,  $S_{jk}^{(1)}$  в явном виде выписаны в *Приложении* (формула (A2)). В векторной форме система (21) записывается как

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_j + (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}_j) = 2\mathbf{K}_j^\perp, \quad j = 1, \dots, N_0, \quad (22)$$

где

$$\mathbf{K}_j^\perp = (-S_{jk}^{(1)}, C_{jk}^{(1)}) = \sum_{k=1(k \neq j)}^{N_0} \frac{d_k (\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k)^\perp}{|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k|^2},$$

(суммирование проводится по *всем* вихрям, как реальным, так и отраженным). Таким образом, формула (22) оказывается универсальной и применимой к сосудам любой формы – форма сосуда неявно учитывается при вычислении величины  $\mathbf{K}_j$ . Уравнения применимы для систем с любым числом вихрей, пока расстояние между вихрями остается большим по сравнению с размером кора вихря и вихри не подходят слишком близко к границе сосуда.

Выражение в левой части уравнения (22) представляет собой *скорость  $j$ -го вихря в лабораторной системе координат при наличии вращения*.

Система (21) является гамильтоновой: гамильтониан  $\mathcal{H}$  может быть записан в виде

$$\mathcal{H} = - \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k \neq j}^{N_0} d_k d_j \ln |\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_0} \Omega d_j (\eta_j^2 + \zeta_j^2).$$

Тогда уравнения (21) можно записать как

$$d_j \dot{\eta}_j = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta_j}, \quad d_j \dot{\zeta}_j = - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \eta_j}, \quad j = 1, \dots, N_0. \quad (23)$$

Заметим, что уравнения (22) совпадают с уравнениями движения плоских вихрей произвольной интенсивности в идеальной жидкости, подробно изученными в литературе (см., например, монографии В. В. Мелешко и М. Ю. Константинова [3], С. В. Алексеенко, П. А. Куйбина, В. Л. Окулова [1] и др.). В предыдущей работе автора [2] были приведены примеры траекторий движения квантованных ( $d_j = \pm 1$ ) вихрей в цилиндре и в кольце при отсутствии вращения. Вращение изменяет эти траектории за счет «сноса» вихрей.

**Простейший пример: один вихрь в единичном круге.** Координаты реального вихря будем обозначать  $\boldsymbol{\xi}_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$ , тогда отраженный вихрь имеет координаты  $\boldsymbol{\xi}_2 = 1/r_1 \exp(i\theta_1)$  и завихренность  $d_2 = -d_1 = -1$ . Вектор  $\mathbf{K}_j$  содержит единственное слагаемое при  $k = 2$ , и уравнение (22) в этом случае записывается в виде

$$\dot{r}_1 = 0, \quad r_1 \dot{\theta}_1 + \Omega_0 r_1 = \frac{2r_1}{1 - r_1^2}$$

(учтено, что в комплексном виде  $(\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k)^\perp = i(\xi_j - \xi_k)$ ,  $(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}_j) = i\Omega_0 \xi_j$ ). С точностью до нормировки времени это уравнение совпадает с уравнением прецессии вихря (30) из [11], если добавить вращение сосуда.

Уравнения (22) описывают циклическое (при некоторых начальных положениях) или хаотическое (в общем случае) движение вихрей вокруг точек равновесия (см. подробное исследование в монографии [3]). Чтобы получить картину движения вихрей, отражающую движение к положениям равновесия, нужно включить хотя бы малую диссипацию. Для этого можно, например, в производную по времени в правой части уравнения (4) искусственно добавить диссипацию:  $(i - \gamma)\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$  (где  $\gamma$  – некий малый параметр [12]).

**3. Уравнения движения вихрей в неоднородных конденсатах Бозе – Эйнштейна.** Учтем, что в системе координат, связанной с  $j$ -м вихрем,  $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\xi}_j(t) + \mathbf{r}$ , безразмерная плотность конденсата (7) принимает вид

$$n_0(\boldsymbol{\rho}) = 1 - (\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_j)^2 = 1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2 - 2\eta_j r \cos \theta - 2\zeta_j r \sin \theta - r^2.$$

Поскольку эта функция будет фигурировать во всех уравнениях, удобно ввести величину  $\Xi_j^2 = 1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2$  – квадрат расстояния  $j$ -го вихря до границы конденсата. Тогда запишем

$$n_0(\mathbf{r}) = \Xi_j^2 - 2\eta_j r \cos \theta - 2\zeta_j r \sin \theta - r^2.$$

**Внешнее решение.** Подстановка разложения (10) в уравнение (9) дает последовательность уравнений

$$\begin{aligned} u_0(n_0(\mathbf{r}) - |u_0|^2) &= 0, \\ u_1(n_0(\mathbf{r}) - |u_0|^2) - u_0(u_0 \bar{u}_1 + u_1 \bar{u}_0) &= 0, \\ \Delta u_0 + u_2(n_0(\mathbf{r}) - |u_0|^2) - u_1(u_0 \bar{u}_1 + u_1 \bar{u}_0) - u_0(u_0 \bar{u}_2 + u_1 \bar{u}_1 + u_2 \bar{u}_0) - \\ &- i(\boldsymbol{\Omega}_0 \times (\mathbf{r} + \boldsymbol{\xi}_j)) \cdot \nabla u_0 = -i \left( \frac{\partial u_0}{\partial t} - \dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla u_0 \right), \end{aligned}$$

Из первого уравнения получаем

$$u_0(\mathbf{r}, t) = \sqrt{n_0(\mathbf{r})} \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t)).$$

Функции  $u_1, u_2, \dots$  будем искать в виде (14). Тогда второе уравнение снова дает  $u_{1r}(\mathbf{r}, t) = 0$ , а третье дает алгебраическое уравнение для функции  $u_{2r}$  и дифференциальное уравнение для  $\Phi_0(\mathbf{r}, t)$ :

$$n_0 \Delta \Phi_0 + (\nabla n_0 \cdot \nabla \Phi_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial n_0}{\partial r} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla r) + \frac{\partial n_0}{\partial \theta} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla \theta) \right) = 0. \quad (24)$$

Чисто вихревое решение (A1) этому уравнению уже не удовлетворяет, поэтому будем искать фазу  $\Phi_0$  в виде

$$\Phi_0(\mathbf{r}, t) = \varphi_0(\mathbf{r}, t) + \varphi_1(\mathbf{r}, t),$$

где  $\varphi_0(\mathbf{r}, t)$  – вихревое решение (A1), а для дополнительной функции  $\varphi_1$  имеем уравнение

$$\begin{aligned} n_0 \Delta \varphi_1 + \nabla n_0 \cdot \nabla \varphi_0 + \nabla n_0 \cdot \nabla \varphi_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial n_0}{\partial t} - \\ - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial n_0}{\partial r} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla r) + \frac{\partial n_0}{\partial \theta} (\dot{\boldsymbol{\xi}}_j \cdot \nabla \theta) \right) = 0. \end{aligned}$$

Функцию  $\Phi_1$  опять будем искать в виде ряда Фурье. Оказывается, что разложения только по степеням  $r$  уже недостаточно, нужно учитывать слагаемые порядка  $\ln r$ . С точностью до слагаемых первого порядка по  $\{r, r \ln r\}$  полное решение  $\Phi_0(\mathbf{r}, t)$  записывается в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathbf{r}, t) = & d_j \theta + \Theta_j + \left[ C_{jk}^{(1)} \sin \theta - S_{jk}^{(1)} \cos \theta + \left( A_{11} + \frac{\zeta_j d_j}{\Xi_j^2} \ln r \right) \cos \theta + \right. \\ & \left. + \left( C_{11} - \frac{\eta_j d_j}{\Xi_j^2} \ln r \right) \sin \theta \right] r + O(r^2, r^2 \ln r). \end{aligned}$$

Постоянные  $A_{11}$ ,  $C_{11}$ , появляющиеся из общего решения однородных уравнений, пока остаются неопределенными.

Волновая функция  $u_0$  с этой же точностью оказывается равной

$$\begin{aligned} u_0(\mathbf{r}, t) = & \sqrt{n_0(\mathbf{r}, t)} \exp(i\Phi_0(\mathbf{r}, t)) \approx \\ & \approx \Xi_j e^{i(d_j \theta + \Theta_j)} \left\{ 1 - \frac{\eta_j(t) r \cos \theta + \zeta_j(t) r \sin \theta}{\Xi_j^2} + \right. \\ & + i \left( -S_{jk}^{(1)} + A_{11} + \frac{\zeta_j(t) d_j}{\Xi_j^2} \ln r \right) r \cos \theta + i \left( C_{jk}^{(1)} + C_{11} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\eta_j(t) d_j}{\Xi_j^2} \ln r \right) r \sin \theta + O(r^2, r^2 \ln r) \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Это *внешнее решение* для конденсатов Бозе – Эйнштейна.

**Внутреннее решение.** При переходе к «растянутым» координатам плотность конденсата записывается в виде

$$n_0(\mathbf{R}) = \Xi_j^2 - (2\eta_j R \cos(\theta) + 2\zeta_j R \sin(\theta))\varepsilon - R^2 \varepsilon^2 \equiv F_0 + \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2.$$

Последовательность уравнений для функций  $U_0, U_1, \dots$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta U_0 + U_0(F_0 - |U_0|^2) &= 0, \\ \Delta U_1 + U_1(F_0 - |U_0|^2) + U_0(F_1 - U_0 \bar{U}_1 - U_1 \bar{U}_0) - i(\mathbf{\Omega}_0 \times \mathbf{\xi}_j) \cdot \nabla U_0 &= \\ &= i(\dot{\mathbf{\xi}}_j \cdot \nabla U_0), \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Волновые функции  $U_0, U_1, \dots$  ищем в том же виде (16). Из уравнения для  $U_0 = e^{iS_0} u_{00}(\mathbf{R}, t)$  получаем уравнение для  $u_{00}(\mathbf{R}, t)$ :

$$\frac{d^2 u_{00}}{dR^2} + \frac{du_{00}}{dR} - \frac{u_{00}}{R^2} + u_{00}(\Xi_j^2 - u_{00}^2) = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид ряда

$$u_{00}(\rho_0) = \Xi_j \left( 1 - \frac{1}{2\rho_0^2} - \frac{9}{8\rho_0^4} - \frac{161}{16\rho_0^6} - \dots \right) \equiv \Xi_j f_0(\rho_0),$$

где введена новая переменная  $\rho_0 = \mathbf{R}\Xi_j$ , а  $f_0(R)$  – функция (18). Перейдем к переменным  $\rho_0$  и в уравнении для  $U_1$ , положив

$$u_{1r} = \Xi_j v_{1r}(\rho_0, t), \quad u_{1i} = \Xi_j v_{1i}(\rho_0, t).$$

Для функций  $v_{1r}(\rho_0, t), v_{1i}(\rho_0, t)$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \Delta v_{1r} + v_{1r} \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} - 3f_0^2 \right) - \frac{2d_j}{\rho_0^2} \frac{\partial v_{1i}}{\partial \theta} + \frac{f_0 d_j}{\rho_0 \Xi_j} (\dot{\zeta}_j \cos \theta - \dot{\eta}_j \sin \theta) + \\ + \left( \frac{f_0 d_j \Omega_0}{\rho_0 \Xi_j} - \frac{2f_0 \rho_0}{\Xi_j^3} \right) (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) = 0, \\ \Delta v_{1i} + v_{1i} \left( 1 - \frac{1}{\rho_0^2} - f_0^2 \right) + \frac{2d_j}{\rho_0^2} \frac{\partial v_{1r}}{\partial \theta} - \frac{1}{\Xi_j} f_0' (\dot{\eta}_j \cos \theta + \dot{\zeta}_j \sin \theta) + \\ + \frac{\Omega_0}{\Xi_j} f_0' (\zeta_j \cos \theta - \eta_j \sin \theta) = 0, \end{aligned}$$

$f_0 = f_0(\rho_0)$  и штрих означает производную по  $\rho_0$ . Уравнения похожи на соответствующие уравнения для  $u_{1r}(R, \theta, t)$ ,  $u_{1i}(R, \theta, t)$ , отличие состоит в наличии параметра  $\Xi_j$ , обусловленного неоднородностью плотности. Снова решения ищем в виде рядов Фурье. С точностью до первых гармоник и слагаемых порядка  $(\rho_0, \rho_0 \ln \rho_0)$  решения записываются в виде

$$f_{00}(\rho_0) \equiv 0, \quad g_{00}(\rho_0) = b_0 f_0(\rho_0)$$

( $b_0$  – произвольная постоянная),

$$\begin{aligned} f_{1c}(\rho_0, t) \cos \theta + f_{1s}(\rho_0, t) \sin \theta \approx -\frac{1}{\Xi_j^3} (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) \rho_0, \\ g_{1c}(\rho_0, t) \cos \theta + g_{1s}(\rho_0, t) \sin \theta \approx \frac{1}{\Xi_j^3} \left( -\frac{1}{2} \Omega_0 \zeta_j \Xi_j^2 + \frac{1}{2} \dot{\eta}_j \Xi_j^2 - \frac{1}{4} \zeta_j d_j + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} L_{11} \Xi_j^3 + \zeta_j d_j \ln \rho_0 \right) \rho_0 \cos \theta + \frac{1}{\Xi_j^3} \left( \frac{1}{2} \Omega_0 \eta_j \Xi_j^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \dot{\zeta}_j \Xi_j^2 + \frac{1}{4} \eta_j d_j + \frac{1}{2} Y_{11} \Xi_j^3 - \eta_j d_j \ln \rho_0 \right) \rho_0 \sin \theta. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные  $L_{11}$ ,  $Y_{11}$ , как обычно, появляются из общего решения однородных уравнений.

Теперь можно выписать с желаемой точностью *внутреннее решение* уравнения для волновой функции неоднородного конденсата Бозе – Эйнштейна  $U_0(\boldsymbol{\rho}_0) + \varepsilon U_1(\boldsymbol{\rho}_0) = \Xi_j [f_0(\rho_0) + \varepsilon(v_{1r}(\boldsymbol{\rho}_0) + i v_{1i}(\boldsymbol{\rho}_0))]$ :

$$\begin{aligned} U_0(\boldsymbol{\rho}_0) + \varepsilon U_1(\boldsymbol{\rho}_0) \approx \Xi_j \left\{ 1 + \varepsilon \left[ -\frac{\rho_0}{\Xi_j^3} (\eta_j \cos \theta + \zeta_j \sin \theta) + i \left( b_0 + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \left( -\frac{\Omega_0 \zeta_j}{2\Xi_j} + \frac{\dot{\eta}_j}{2\Xi_j} - \frac{\zeta_j d_j}{4\Xi_j^3} + \frac{1}{2} L_{11} + \frac{\zeta_j d_j}{\Xi_j^3} \ln \rho_0 \right) \rho_0 \cos \theta + \right. \right. \\ \left. \left. + \left( \frac{\Omega_0 \eta_j}{2\Xi_j} + \frac{\dot{\zeta}_j}{2\Xi_j} - \frac{\eta_j d_j}{4\Xi_j^3} + \frac{1}{2} Y_{11} + \frac{\zeta_j d_j}{\Xi_j^3} \ln \rho_0 \right) \rho_0 \sin \theta \right] \right\}. \quad (26) \end{aligned}$$

**Сопоставление решений: вывод уравнения движения вихрей.** Осталось вернуться к исходным переменным и учесть определение  $\Xi_j$ :

$$\boldsymbol{\rho}_0 = \frac{\mathbf{r} \Xi_j}{\varepsilon}, \quad \Xi_j^2 = 1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2.$$

В неоднородном конденсате учитываются только реальные вихри, возникающие в газе. Произвольные постоянные, имеющиеся как во внешнем, так и во внутреннем решении, подбираем так, чтобы они взаимно уничтожились:

$$b_0 = 0, \quad A_{11} = \frac{\Xi_j L_{11}}{2}, \quad C_{11} = \frac{\Xi_j Y_{11}}{2}.$$

Тогда, приравнивая коэффициенты внешнего и внутреннего решений при первых степенях  $r$ , получаем

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j(t) - \Omega_0 \zeta_j &= -2S_{jk}^{(1)} - \frac{2\zeta_j d_j}{1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2} \left( \frac{1}{2} \ln(1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2) - \ln(\varepsilon) - \frac{1}{4} \right), \\ \dot{\zeta}_j(t) + \Omega_0 \eta_j &= 2C_{jk}^{(1)} + \frac{2\eta_j d_j}{1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2} \left( \frac{1}{2} \ln(1 - \eta_j^2 - \zeta_j^2) - \ln(\varepsilon) - \frac{1}{4} \right). \end{aligned} \quad (27)$$

Сохранение только первого слагаемого в правой части дает уравнение движения вихрей в однородной жидкости. Дополнительные слагаемые отражают специфику реальных конденсатов – непостоянную плотность. Снова запишем это в векторном виде:

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_j + (\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}_j) = 2\mathbf{K}_j^\perp + (\boldsymbol{\Omega}_1 \times \boldsymbol{\xi}_j), \quad j = 1, \dots, N, \quad (28)$$

где  $\boldsymbol{\Omega}_1 = (0, 0, \Omega_1)$ , а величина  $\Omega_1 = \frac{2d_j}{\Xi_j^2} \ln\left(\frac{\Xi_j}{\varepsilon e^{1/4}}\right)$  является аналогом некоей угловой скорости (см., например, похожее уравнение (3.13) обзора [9]), однако в рассматриваемом случае не является критической скоростью.

Система (27) тоже является гамильтоновой. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= - \sum_{j=1}^{N_0} \sum_{k \neq j} d_k d_j \ln |\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_0} \Omega d_j |\boldsymbol{\xi}_j|^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N_0} d_j^2 \ln^2(\Xi_j^2) - \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N_0} d_j^2 \ln(\Xi_j^2) \ln(\varepsilon e^{1/4}), \end{aligned}$$

и тогда система (27) может быть записана в виде (23).

**Примеры.** Для численного расчета траекторий движения вихрей в конденсатах Бозе – Эйнштейна нужно знать по крайней мере порядок двух «внешних» параметров: угловую скорость, при которой появляются первые вихри, и радиус кора вихря  $\xi$ . Для типичных конденсатов  $\xi \approx 0.2$  мкм. Критическая угловая скорость, при которой становится энергетически выгодным образование первого вихря, для осесимметричной цилиндрической ( $\omega_z = 0$ )

ловушки записывается в виде [10]  $\Omega_c = \frac{2\hbar}{mR_\perp^2} \ln \frac{0.888R_\perp}{\xi}$ . Радиус  $R_\perp \sim 3.5$  мкм

[10]. Отсюда безразмерная критическая скорость  $\Omega_{0c} = 4 \ln \frac{0.888R_\perp}{\xi} \approx 11$ , а

малый параметр  $\varepsilon = \xi/R_\perp \approx 0.056$ .

**Пример 1.** Рассмотрим снова пример движения *единственного вихря*, находящегося в точке  $\boldsymbol{\xi}_1 = r_1 \exp(i\theta_1)$  и имеющего интенсивность  $d_1 = 1$ . В отличие от однородной жидкости, в случае реальных конденсатов Бозе – Эйнштейна  $\mathbf{K}_j = 0$ , и уравнение (28) принимает вид

$$\dot{r}_1 = 0, \quad r_1 \dot{\theta}_1 + \Omega_0 r_1 = \frac{r_1}{1 - r_1^2} \left( \ln(1 - r_1^2) - 2 \ln \varepsilon - \frac{1}{2} \right),$$

и это при  $\Omega_0 = 0$  с точностью до нормировок совпадает с уравнением (31) работы [11]. Как и в однородной жидкости, в неоднородном конденсате единственный вихрь движется по окружности ( $\dot{r}_1 = 0$ ).

Учет вращения и наличие других вихрей предоставляют широкий спектр для изучения других ситуаций, как теоретических, так и экспериментальных.

**Пример 2.** Два произвольно расположенных вихря. Возможны варианты:

(i). Два одинаковых вихря, расположенные несимметрично (рис. 1а): вихри описывают сложные траектории, уклоняясь друг от друга и не заходя в начало координат.

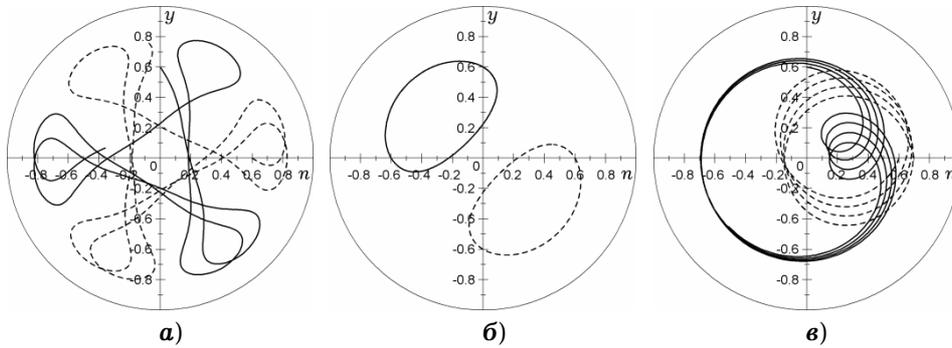


Рис. 1

(ii). Те же вихри, но с разными знаками (рис. 1б): при нулевой скорости вращения описывают замкнутые траектории, причем обходят их в разных направлениях.

С увеличением угловой скорости траектории искажаются и становятся несимметричными. На рис. 1в приведены траектории движения вихрей при угловой скорости, незначительно превышающей критическую.

Заметим, что в реальных экспериментах вихри имеют одинаковые знаки, расположены симметрично и движутся по окружности.

**Пример 3.** Четыре произвольно расположенных вихря. Варианты:

(i). Парно симметричное расположение одинаковых вихрей ( $d_k = 1$  для всех  $k$ ) (рис. 2а): при  $\Omega_0 = \Omega_{0c} + 1.2$  вихри описывают почти замкнутые траектории, обходящие начало координат. Увеличение угловой скорости увеличивает «снос».

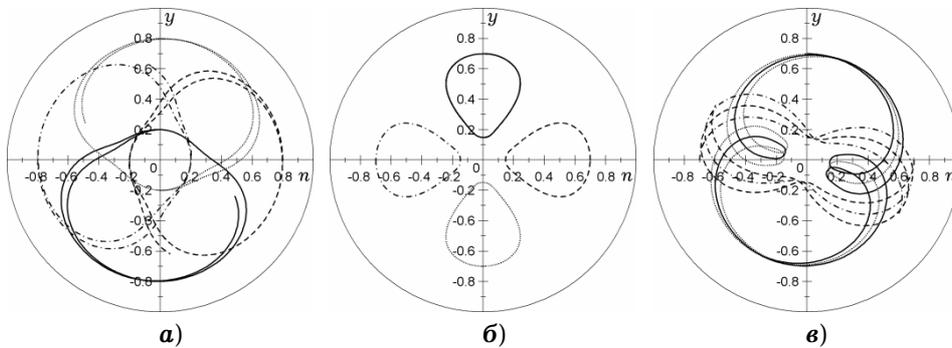


Рис. 2

(ii). Те же вихри, но с разными знаками (рис. 2б): как и в случае двух вихрей, при нулевой скорости имеем замкнутые траектории. Вращение смещает картинку при каждом обходе траектории. Траектории сильно зависят от угловой скорости и начального положения вихрей (рис. 2в).

В случае одинаковых вихрей, расположенных симметрично (реализуемая в экспериментах ситуация), снова имеем равномерное движение по окружности. Заметим, что даже наличие вихря в начале координат ( $\xi_1 = (0.0, 0.0)$ ) при условии, что остальные вихри распределены по окружности равномерно, картинку не меняет: центральный вихрь остается неподвижным, остальные вихри движутся по окружности.

**Заключение.** Настоящая работа продолжает исследование проблемы движения вихрей во вращающихся средах. Получены уравнения движения вихрей в неоднородных конденсатах Бозе – Эйнштейна. Для сравнения приведены подобные уравнения в частном случае конденсатов с постоянной плотностью.

Уравнения движения вихрей получены в самом общем случае: для любого числа вихрей, для сосудов любой формы (форма сосуда «прячется» в выражении для параметров  $\{C_{jk}^{(1)}, S_{jk}^{(1)}\}$ ), при наличии вращения и без него. В случае однородной жидкости эти уравнения имеют вид (22), в случае реальных конденсатов Бозе – Эйнштейна – вид (27). Естественным ограничением применимости уравнений является условие, что расстояние между вихрями намного превышает радиус кора вихря и вихри не слишком приближаются к границе области (стенкам сосуда в случае жесткого цилиндра и к краю газового облака в случае неоднородных конденсатов).

В случае однородной жидкости полученные уравнения сводятся к известным уравнениям движения вихрей в идеальной жидкости, подробно исследованным в монографиях [1, 3]. Неоднородность среды добавляет в эти уравнения слагаемые, зависящие от расстояния вихря до границы конденсата. Поскольку все системы являются бездиссипативными, их можно записать в гамильтоновом виде.

Показано, что в частном случае, когда в конденсате имеется единственный вихрь, полученные уравнения сводятся к известным уравнениям прецессии вихря. Во вращающемся жестком цилиндре с однородной жидкостью прецессия обусловлена наличием отраженного вихря, обеспечивающего движение вихря по окружности даже в отсутствии вращения сосуда, в случае неоднородных конденсатов это вращение обусловлено неравномерностью плотности.

Приведены графики движения нескольких вихрей при различных начальных положениях, различной интенсивности ( $\pm 1$ ) и различных угловых скоростях вращения.

#### Приложение А.

**Потенциал течения жидкости при наличии вихрей.** Пусть в жидкости имеется  $N_0$  вихрей с завихренностью  $d_k$ , расположенных в точках  $z_k = r_k \exp(i\theta_k)$ ,  $k = 1 \dots, N_0$ . Комплексный потенциал такой жидкости записывается в виде

$$W(z) = -i \sum_{k=1}^{N_0} d_k \ln(z - z_k).$$

Перейдем в систему координат, связанную с  $j$ -м вихрем:  $\tilde{z} = z - z_j$ . Тогда

$$\begin{aligned} W(\tilde{z}) &= -id_j \ln \tilde{z} - i \sum_{k(k \neq j)} d_k \ln(\tilde{z} + z_j - z_k) = -id_j \ln \tilde{z} - i \sum_{k(k \neq j)} d_k \ln(z_j - z_k) - \\ &\quad - i \sum_{k(k \neq j)} d_k \ln\left(1 + \frac{\tilde{z}}{z_j - z_k}\right). \end{aligned}$$

Обозначим  $z_j - z_k = \mathbf{R}_{jk} = R_{jk} e^{i\theta_{jk}}$ , где  $\theta_{jk} = \arctan(\zeta_j - \zeta_k)/(\eta_j - \eta_k)$ ,  $R_{jk} = \sqrt{(\eta_j - \eta_k)^2 + (\zeta_j - \zeta_k)^2}$ ;  $\tilde{z} = r e^{i\theta}$ . Тогда  $\frac{\tilde{z}}{z_j - z_k} = \frac{r}{R_{jk}} \exp(i(\theta - \theta_{jk}))$ . Раскладывая в ряд логарифм и отделяя действительную часть, получаем

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) = \operatorname{Re}(W(\tilde{z})) &= d_j \theta + \sum_{k \neq j} d_k \theta_{jk} + \\ &\quad + \sum_{k \neq j} d_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} \frac{(-1)^{m-1}}{R_{jk}^m} (\sin m\theta \cos m\theta_{jk} - \cos m\theta \sin m\theta_{jk}). \end{aligned}$$

После ввода обозначений

$$\Theta_j = \sum_{k \neq j} d_k \theta_{jk},$$

$$C_{jk}^{(m)} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k (-1)^{m-1}}{R_{jk}^m} \cos m\theta_{jk},$$

$$S_{jk}^{(m)} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k (-1)^{m-1}}{R_{jk}^m} \sin m\theta_{jk}$$

получаем окончательно

$$\varphi(r, \theta) = d_j \theta + \Theta_j + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{r^m}{m} (C_{jk}^{(m)} \sin m\theta - S_{jk}^{(m)} \cos m\theta). \quad (\mathbf{A1})$$

В полученные уравнения входят только первые коэффициенты этого разложения. Вычислим их в явном виде:

$$C_{jk}^{(1)} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k \cos \theta_{jk}}{R_{jk}} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k (\eta_j - \eta_k)}{R_{jk}^2},$$

$$S_{jk}^{(1)} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k \sin \theta_{jk}}{R_{jk}} = \sum_{k \neq j} \frac{d_k (\zeta_j - \zeta_k)}{R_{jk}^2}. \quad (\mathbf{A2})$$

Тогда можно ввести вектор

$$\mathbf{K}_j = (C_{jk}^{(1)}, S_{jk}^{(1)}) = \sum_{k \neq j} \frac{d_k (\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k)}{|\boldsymbol{\xi}_j - \boldsymbol{\xi}_k|^2}.$$

Эти выражения были использованы в примерах.

1. Алексеев С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. – Новосибирск: Ин-т теплофизики СО РАН, 2003. – 504 с.
2. Зуева Т. И. Движение вихрей в кольцевой области // Физика низких температур. – 2000. – **26**, № 2. – С. 119–127.
3. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. – Киев: Наук. думка, 1990. – 282 с.
4. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. – Москва: Мир, 1964. – 659 с.  
То же: *Milne-Thomson L. M. Theoretical hydrodynamics.* – London: Macmillan, 1955. – xxi + 632 p. (1968. 744 p.)
5. Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С. Усреднение. Методы и приложения. – Новосибирск: Тамара Рожковская, 2007. – 246 с.
6. Тилли Д. Р., Тилли Дж. Сверхтекучесть и сверхпроводимость. – Москва: Мир, 1977. – 304 с.  
То же: *Tilley D. R., Tilley J. Superfluidity and superconductivity.* – New York etc.: Van Nostrand Reinhold Co., 1974.
7. *Donnelly R. J. Quantized vortices in Helium II.* – Cambridge, U.K.: Cambridge Univ. Press, 1991. – 368 p.
8. *E Weinan. Dynamics of vortices in Ginzburg – Landau theories with applications to superconductivity // Physica D.* – 1994. – **77**, No. 4. – P. 383–404.
9. *Fetter A. Rotating trapped Bose – Einstein condensates // Rev. Mod. Phys.* – 2009. – **81**, No. 2. – P. 647–691.
10. *Kasamatsu K., Tsubota M. Quantized vortices in atomic Bose – Einstein condensates // Prog. Low Temp. Phys. / Ed. by W. P. Halperin and M. Tsubota.* – **16.** – Amsterdam: Elsevier, 2008. – P. 349–401.
11. *Kim Jong-kwan, Fetter A. Dynamics of a single ring of vortices in two-dimensional trapped Bose – Einstein condensates // Phys. Rev. A.* – 2004. – **70**, No. 4. – 043624.
12. *Tsubota M., Kasamatsu K. Dynamics of quantized vortices in superfluid helium and rotating Bose – Einstein condensates // J. Low Temp. Phys.* – 2005. – **138**, No. 3-4. – P. 471–480.

## РІВНЯННЯ РУХУ ВИХОРИВ У КОНДЕНСАТАХ БОЗЕ – ЕЙНШТЕЙНА: ВПЛИВ ОБЕРТАННЯ ТА НЕОДНОРІДНОСТІ ГУСТИНИ

Отримано рівняння руху квантованих вихорів у конденсатах Бозе – Ейнштейна, що обертаються, у двох випадках: однорідний конденсат у жорсткому циліндрі, що обертається, та неоднорідний конденсат у магнітній пастці, що обертається, у наближенні Томаса – Фермі. Рівняння Шредінгера для обох середовищ зведено до зручного безрозмірного вигляду. За допомогою методу розвинення за малим параметром отримано два асимптотичних розв'язки у різних просторових масштабах. Порівнянням головних членів цих розв'язків отримано шукані рівняння. Рівняння руху вихорів в однорідному конденсаті зводяться до відомих рівнянь руху вихорів в ідеальній рідині. Неоднорідність середовища дає додаткові члени рівняння. Рівняння руху вихорів наведено у найбільш загальному випадку: для будь-якої кількості вихорів, для посудин будь-якої форми, за наявності обертання і без нього. Показано, що в окремому випадку руху єдиного вихорю отримуємо відомі рівняння прецесії вихорю. Наведено графіки руху декількох вихорів за різних початкових умов.

## VORTEX MOTION EQUATIONS IN BOSE – EINSTEIN CONDENSATES: INFLUENCE OF ROTATING AND INHOMOGENEITY OF DENSITY

*The paper is devoted to obtaining the equations of the vortex motion in rotating Bose – Einstein condensates in two different cases: a uniform condensate in a rigid rotating cylinder and a nonuniform trapped condensate in rotating magnetic trap in the Thomas – Fermi approximation. The Schrödinger equation for both cases is reduced to the convenient dimensionless form. Using the method of asymptotical expansion in a small parameter, two asymptotic solutions are obtained in two different space scales. Matching of dominant terms in these solutions yields the desired equations of vortex motion. Equations for the uniform condensate are reduced to the known vortex motion equation in ideal liquid. Inhomogeneity of medium gives additional terms in the equations. The vortex motion equations are obtained in the most general case for any vortex number, any locations, any form of vessel and with and without rotation. In particular case of one vortex, the equations take the form of known vortex precession equations. The trajectories of some vortex motion for different cases are shown.*

Физ.-техн. ин-т низких температур  
им. Б. И. Веркина НАН Украины, Харьков

Получено  
07.07.14