

## ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗЛИЧНЫХ ВАРИАНТОВ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ О ЗВУКОИЗОЛЯЦИИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ, ОКРУЖЕННОЙ АКУСТИЧЕСКИМИ СРЕДАМИ

*Рассматриваются пять различных вариантов постановки стационарной задачи о прохождении плоской звуковой волны сквозь прямоугольную пластину. Первая из них соответствует использованию инерционно-массовой модели, основанной на предположении о недеформируемости незакрепленной жесткой пластины при ее взаимодействии с падающими и формирующимися в окружающих полупространствах плоскими звуковыми волнами. Остальные четыре постановки соответствуют учету (по модели винклеровского основания) или неучету податливости опорного контура шарнирно опертой прямоугольной пластины, деформирующейся по модели Кирхгофа, использованию одномерных или трехмерных волновых уравнений для описания движения акустических сред, а также составлению уравнения движения пластины с учетом некоторого внешнего демпфирования. Использование этих последних четырех постановок позволяет для определения параметра звукоизоляции пластины получить сглаженные графические зависимости от частоты, согласующиеся по виду с экспериментальными зависимостями, получающимися путем испытания образцов в акустической лаборатории.*

**Введение.** Во многих случаях величина допустимой вибрации конструкции обусловлена величиной допустимого шума, формирующегося в окружающей конструкции акустической среде в результате ее динамического взаимодействия с деформирующейся конструкцией. Вопросами вибрации механических систем занимаются, главным образом, специалисты в области механики деформируемого тела, динамики и прочности машин, приборов и аппаратуры, прочности летательных аппаратов, судов и др., не уделяя при этом должного внимания вопросам создаваемого конструкциями шума при их деформировании, а вопросами формирования и распространения шума – специалисты в области акустики [5, 6, 12].

Во второй половине прошлого века в механике сформировалось научное направление, связанное с исследованием стационарного и нестационарного взаимодействия акустических волн с преградами в виде твердых деформируемых тел и тонкостенных элементов конструкций. К настоящему времени относящиеся к этому направлению вопросы аэрогидроупругости тонкостенных конструкций в виде оболочек были освещены во многих работах, в том числе в ряде монографий и обзоров [1–3]. Однако в них абсолютно не рассматривались вопросы формирования звуковых волн и теоретического исследования задач о звукоизоляции и звукопоглощении теми или иными деформируемыми преградами. Этим вопросам со стороны исследователей в последние десятилетия стали уделять значительное внимание (см., например, [13–18 и др.]). На практике звукоизоляционные и звукопоглощающие свойства тонкостенных элементов конструкций исследуются экспериментальными методами в специальных акустических лабораториях, а их теоретические исследования, главным образом, основываются на использовании достаточно упрощенных уравнений для описания процессов деформирования элементов конструкций [5, 12–18 и др.]

Одним из актуальных и приоритетных направлений фундаментальных и прикладных научных исследований для стран Евросоюза в соответствии с седьмой рамочной программой, в которой участвует и Россия, является создание изделий авиастроения и других транспортных средств с комфортными условиями в отношении шума. Решение этой задачи требует проведения и соответствующих теоретических исследований в области акустичности конструкций и их элементов. В связи с изложенным данная ста-

тъя, являющаяся продолжением и развитием полученных ранее результатов [4, 7–9], посвящена рассмотрению и исследованию ряда возможных вариантов постановки задачи о звукоизоляции простейшего тонкостенного элемента конструкции в виде прямоугольной пластины, находящейся в акустической среде.

### 1. Решения задачи для прямоугольной пластины из изотропного материала, построенные на основе гипотезы плоского отражения.

**Параметры плоской гармонической звуковой волны.** Рассмотрим пластину прямоугольной формы в плане, имеющую размеры  $a$ ,  $b$ , толщину  $t$  и окруженную с двух сторон акустическими средами «1» и «2», занимающими ограниченные плоскостью  $z = 0$  полупространства  $V_1$  ( $-\infty \leq z \leq 0$ ) и  $V_2$  ( $0 \leq z \leq +\infty$ ). На пластину набегают гармоническая волна с амплитудой давления  $\tilde{p}_*$  и частотой  $\omega$ . В результате ее взаимодействия с пластиной в окружающих средах возбуждаются акустические волны с амплитудами давления  $\tilde{p}_1$  и  $\tilde{p}_2$ , являющиеся отраженными от пластины в первой среде и излученными пластиной во второй среде.

Будем считать, что как набегающая, так и отраженная и излученная волны являются плоскими волнами, которые относительно потенциалов скоростей  $\Phi_*$ ,  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  описываются волновыми уравнениями, записанными в таком приближении (здесь и в дальнейшем  $k = 1, 2$ )

$$\frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial z^2} - c_1^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_*}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} - c_k^{-2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1)$$

где  $c_k$  – скорости звука в средах «1» и «2». Через функции  $\Phi_*$ ,  $\Phi_k$  давления  $p_*$ ,  $p_k$  и скорости  $v_z^*$ ,  $v_z^k$  выражаются зависимостями

$$p_* = -\rho_1 \frac{\partial \Phi_*}{\partial \tau}, \quad v_z^* = \frac{\partial \Phi_*}{\partial z}, \quad p_k = -\rho_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau}, \quad v_z^k = \frac{\partial \Phi_k}{\partial z}, \quad (2)$$

где  $\rho_k$  – плотности сред «1» и «2».

Для гармонических волн имеют место представления

$$\Phi_* = \tilde{\Phi}_* e^{i\omega\tau}, \quad \Phi_k = \tilde{\Phi}_k e^{i\omega\tau}, \quad (3)$$

где  $i$  – мнимая единица,  $\omega$  – круговая частота. При учете (3) уравнения (1) и соотношения (2) принимают вид

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_*}{dz^2} + k_1^2 \tilde{\Phi}_* = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k}{dz^2} + k_k^2 \tilde{\Phi}_k = 0, \quad k_k^2 = \frac{\omega^2}{c_k^2}, \quad (4)$$

$$p_* = \tilde{p}_* e^{i\omega\tau}, \quad \tilde{p}_* = -i\rho_1 \omega \tilde{\Phi}_*, \quad p_k = \tilde{p}_k e^{i\omega\tau}, \quad \tilde{p}_k = -i\rho_k \omega \tilde{\Phi}_k, \quad (5)$$

$$v_z^* = \tilde{v}_z^* e^{i\omega\tau}, \quad \tilde{v}_z^* = \frac{d\tilde{\Phi}_*}{dz}, \quad v_z^k = \tilde{v}_z^k e^{i\omega\tau}, \quad v_z^k = \frac{d\tilde{\Phi}_k}{dz}. \quad (6)$$

Так как в рассматриваемых полупространствах  $V_1$  и  $V_2$  уравнения (4) имеют решения

$$\tilde{\Phi}_* = A_* e^{-ik_1 z}, \quad \tilde{\Phi}_1 = B_1 e^{ik_1 z}, \quad \tilde{\Phi}_2 = A_2 e^{-ik_2 z}, \quad (7)$$

то при их использовании в соответствии с соотношениями (5), (6) приходим к зависимостям

$$\tilde{p}_*|_{z=0} = -i\rho_1 \omega A_*, \quad \tilde{p}_1|_{z=0} = -i\rho_1 \omega B_1, \quad \tilde{p}_2|_{z=0} = -i\rho_2 \omega A_2, \quad (8)$$

$$\tilde{v}_z^*|_{z=0} = -ik_1 A_*, \quad \tilde{v}_z^1|_{z=0} = ik_1 B_1, \quad \tilde{v}_z^2|_{z=0} = -ik_2 A_2, \quad (9)$$

где  $A_*$  – постоянная интегрирования решения первого из уравнений (4), заданием которой определяются амплитудные значения давления и скорости

падающей на пластину звуковой волны;  $A_2$ ,  $B_1$  – постоянные интегрирования решения двух последних уравнений (4), определяемые из условий кинематического сопряжения полей скоростей пластины и звуковых волн, формирующихся в пространствах  $V_1$ ,  $V_2$ .

При заданном значении  $\tilde{p}_*|_{z=0}$  и значениях  $\tilde{p}_k|_{z=0}$  основной целью исследований является определение уровня звукоизоляции (в децибелах)

$$R_p = -20 \lg |\eta|, \quad \eta = \left| \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_* + \tilde{p}_1} \right|_{z=0}. \quad (10)$$

**Варианты приближенного решения задачи для прямоугольной пластины.** Если пластина выполнена из изотропного материала, имеющего модуль упругости  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$ , то относительно прогиба  $w$  срединной плоскости имеет место уравнение движения следующего вида:

$$D \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) w + \rho_n t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} - (p_* + p_1 - p_2)|_{z=0} = 0, \quad (11)$$

где  $\rho_n$  – плотность материала пластины, а  $D = Et^3/[12(1 - \nu^2)]$  – ее изгибная жесткость.

Решение уравнения (11) и решения (7) уравнений (1) при  $z = 0$  должны быть подчинены условиям

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = v_z^*|_{z=0} + v_z^1|_{z=0}, \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} = v_z^2|_{z=0}, \quad (12)$$

которые при использовании представления

$$w = \tilde{w} e^{i\omega\tau} \quad (13)$$

и соотношений (9) приводят к зависимостям

$$A_2 = -c_2 \tilde{w}, \quad B_1 = A_* + c_1 \tilde{w}. \quad (14)$$

При подстановке выражений (8), (13) уравнение (11) принимает вид

$$D \nabla^2 \nabla^2 \tilde{w} - \Omega^2 \tilde{w} + i\rho_1 \omega (A_* + B_1) - i\rho_2 \omega A_2 = 0,$$

где  $\Omega^2 = \rho_n t \omega^2$ . Внося в него зависимости (14), получим разрешающее уравнение

$$D \nabla^2 \nabla^2 \tilde{w} - \Omega^2 \tilde{w} + i\rho_1 \omega (2A_* + c_1 \tilde{w}) + i\rho_2 \omega c_2 \tilde{w} = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим два вида решения уравнения (15).

1°. Пусть  $\tilde{w} = \tilde{w}_0 = \text{const}$ , что соответствует предположению о бесконечно большой жесткости пластины (инерционно-массовая модель [12]). В рассматриваемом случае из уравнения (15) следует равенство

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0 = - \frac{2i\rho_1 \omega}{-\Omega^2 + i\omega(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)} A_*. \quad (16)$$

В соответствии с соотношениями (8), (14) и (16) получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} (\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0} &= -i\rho_1 \omega (2 + c_1 \tilde{w}_0) A_* = \\ &= -2i\rho_1 \omega \left( 1 + \frac{i\rho_1 \omega c_1}{-\Omega^2 + i\omega(\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)} \right) A_* = \\ &= -2i\rho_1 \omega (R_{11} + i\tilde{R}_{11}) A_*, \\ \tilde{p}_2|_{z=0} &= -i\rho_2 \omega A_2 = i\rho_2 \omega c_2 \tilde{w}_0 = -2i\rho_2 \omega (R_{22} + i\tilde{R}_{22}), \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$R_{11} = 1 + \frac{\rho_1 c_1 \omega^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)}{\Omega^4 + \omega^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}, \quad \tilde{R}_{11} = -\frac{\rho_1 \omega c_1 \Omega^2}{\Omega^4 + \omega^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2},$$

$$R_{22} = \frac{\rho_1 \omega^2 c_2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)}{\Omega^4 + \omega^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}, \quad \tilde{R}_{22} = -\frac{\rho_1 \omega c_2 \Omega^2}{\Omega^4 + \omega^2 (\rho_1 c_1 + \rho_2 c_2)^2}.$$

Используя зависимости (17), получим формулу

$$\eta = \left. \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_* + \tilde{p}_1} \right|_{z=0} = \frac{\rho_2 (R_{22} + i\tilde{R}_{22})}{\rho_1 (R_{11} + i\tilde{R}_{11})},$$

в соответствии с которой уровень звукоизоляции будет равен

$$R_p^{(1)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 \sqrt{R_{22}^2 + \tilde{R}_{22}^2}}{\rho_1 \sqrt{R_{11}^2 + \tilde{R}_{11}^2}} \right|. \quad (18)$$

С целью иллюстрации количественного анализа построенного решения для стальной пластины, имеющей параметры  $\rho_n = 2698 \text{ кг/м}^3$ ,  $t = 3 \text{ мм}$ ,  $a = 480 \text{ мм}$ ,  $b = 560 \text{ мм}$  и находящейся в воздухе с параметрами  $c_1 = c_2 = 340 \text{ м/сек}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 1.225 \text{ кг/м}^3$ , на рис. 1 приведены результаты расчетов параметра  $R_p^{(1)}$  по формуле (18), изображенные сплошной линией в виде графика зависимости  $R_p^{(1)}$  от частоты колебаний падающей звуковой волны  $f = \omega/2\pi$ . Видно, что по мере увеличения частоты  $f$  наблюдается и плавное увеличение параметра звукоизоляции пластины.

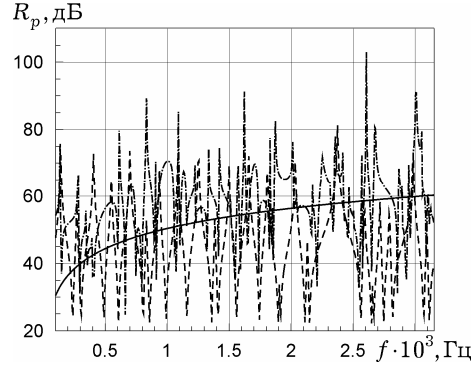


Рис. 1

Видно, что по мере увеличения частоты  $f$  наблюдается и плавное увеличение параметра звукоизоляции пластины.

2°. Пусть  $\tilde{w}_0 = 0$ , а пластина на контурных линиях  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  шарнирно оперта. Тогда функция  $\tilde{w}(x, y)$  представима в виде

$$\tilde{w} = \sum_{n,m} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 3, \dots \quad (19)$$

Используя представление (19) и принимая для  $A_*$  разложение

$$A_* = \sum_{m,n} A_*^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \quad A_{mn}^* = \frac{16}{\pi^2 mn} A_* = f_{mn} A_*, \quad (20)$$

где  $f_{mn} = 16/(\pi^2 mn)$ , уравнение (15) приведем к алгебраическому уравнению вида

$$(d_{mn} + i\tilde{d})\tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1 \omega f_{mn} A_*, \quad (21)$$

где

$$d_{mn} = D(\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2 + d, \quad d = -\Omega^2, \quad \tilde{d} = \rho_1 \omega c_1 + \rho_2 \omega c_2. \quad (22)$$

Из уравнения (21) следует равенство

$$\tilde{w}_{mn} = -\frac{2i\rho_1 \omega f_{mn}}{d_{mn} + i\tilde{d}} A_* = -\frac{2\rho_1 \omega f_{mn} (id_{mn} + \tilde{d})}{d_{mn}^2 + \tilde{d}^2} A_*, \quad (23)$$

при исследовании которого в соответствии с зависимостями (8), (14) получим соотношения

$$\begin{aligned}
((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_1\omega \sum_{m,n} \left( 2f_{mn} + \frac{c_1}{f_{mn}} \tilde{w}_{mn} \right) A_* = \\
&= -2i\rho_1\omega \sum_{m,n} (R_1^{mn} + i\tilde{R}_1^{mn}) A_* = -2i\rho_1\omega (Q_1 + i\tilde{Q}_1) A_*, \\
(\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} &= i\rho_2\omega \sum_{m,n} \frac{c_2}{f_{mn}} \tilde{w}_{mn} = -2i\rho_2\omega \sum_{m,n} (R_2^{mn} + i\tilde{R}_2^{mn}) = \\
&= -2i\rho_2\omega (Q_2 + i\tilde{Q}_2) A_*, \tag{24}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
R_1^{mn} &= f_{mn} + \frac{\rho_1\omega c_1 \tilde{d}}{d_{mn}^2 + \tilde{d}^2}, & \tilde{R}_1^{mn} &= \frac{\rho_1\omega c_1 d_{mn}}{d_{mn}^2 + \tilde{d}^2}, \\
R_2^{mn} &= \frac{\rho_1\omega c_2 \tilde{d}}{d_{mn}^2 + \tilde{d}^2}, & \tilde{R}_2^{mn} &= \frac{\rho_1\omega c_2 d_{mn}}{d_{mn}^2 + \tilde{d}^2}, \\
Q_1 &= \sum_{m,n} R_1^{mn}, & \tilde{Q}_1 &= \sum_{m,n} \tilde{R}_1^{mn}, & Q_2 &= \sum_{m,n} R_2^{mn}, & \tilde{Q}_2 &= \sum_{m,n} \tilde{R}_2^{mn}.
\end{aligned}$$

Таким образом, в соответствии с соотношениями (10) и (24) в рассматриваемом приближении вместо (18) приходим к формуле

$$R_p^{(2)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 \sqrt{Q_2^2 + \tilde{Q}_2^2}}{\rho_1 \sqrt{Q_1^2 + \tilde{Q}_1^2}} \right|. \tag{25}$$

Для рассмотренной выше стальной пластины, находящейся в воздухе и имеющей модуль упругости материала  $E = 200$  ГПа, найденные по формуле (25) значения параметра  $R_p^{(2)}$  на рис. 1 приведены в виде графика, изображенного штриховой линией. Видно, что в среднем при малых частотах  $R_p^{(2)} > R_p^{(1)}$ , а при высоких частотах, когда  $f > \sim 500$  Гц, выполняется неравенство  $R_p^{(2)} < R_p^{(1)}$ .

3°. Предположим, что  $\tilde{w}_0 \neq 0$ ,  $\tilde{w}_{mn} \neq 0$ , и для функции  $\tilde{w}$  примем представление

$$\tilde{w} = \tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y. \tag{26}$$

Внеся его в уравнение (15), получим уравнение

$$(d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} (d_{mn} + i\tilde{d}) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y = -2i\rho_1\omega A_*,$$

которое после использования разложения (20) и интегрирования по методу Бубнова – Галеркина доставляет систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
(d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{f}_{mn} (d_{mn} + i\tilde{d}) \tilde{w}_{mn} &= -2i\rho_1\omega A_*, \\
f_{mn} (d + i\tilde{d}) \tilde{w}_0 + (d_{mn} + i\tilde{d}) \tilde{w}_{mn} &= -2i\rho_1\omega f_{mn} A_*. \tag{27}
\end{aligned}$$

Из второго уравнения системы (27) следует зависимость

$$\tilde{w}_{mn} = -\frac{f_{mn} (d + i\tilde{d})}{d_{mn} + i\tilde{d}} \tilde{w}_0 - \frac{2i\rho_1\omega f_{mn}}{d_{mn} + i\tilde{d}} A_*. \tag{28}$$

Подставляя (28) в первое уравнение из системы (27), по-прежнему приходим к решению (16), которое при учете принятых обозначений (22) запишется как

$$\tilde{w}_0 = -\frac{2i\rho_1\omega}{d+i\tilde{d}}A_*. \quad (29)$$

При его подстановке в равенство (28) приходим к тривиальному решению вида  $\tilde{w}_{mn} \equiv 0$ .

Ниже будет показано, что решение вида (26) при  $\tilde{w}_{mn} \neq 0$  получаем лишь в случае учета податливости опорного контура, обладающего конечной жесткостью на сжатие в направлении оси  $z$ .

**2. Построение решений задачи на основе трехмерных волновых уравнений.** Представим решение уравнения (11) в виде

$$w = \tilde{w}e^{i\omega\tau} = \left( \tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y \right) e^{i\omega\tau}, \quad (30)$$

которое наряду с изгибом пластины позволяет учесть и податливость опорного контура за счет введения неизвестной величины  $w_0 = \text{const}$ . Движение отраженных и излученных волн будем описывать трехмерными волновыми уравнениями

$$\frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial z^2} - \frac{1}{c_k^2} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial \tau^2} = 0, \quad k = 1, 2, \quad (31)$$

где  $0 > z \geq -\infty$  для первой среды ( $k = 1$ ) и  $0 \leq z \leq +\infty$  для второй среды ( $k = 2$ ).

В силу (30) решения уравнений (31) необходимо принять в виде

$$\Phi_k = \left( \tilde{\Phi}_k^0(z) + \sum_{m,n} \tilde{\Phi}_k^{mn}(z) \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y \right) e^{i\omega\tau}. \quad (32)$$

Внеся представления (32) в уравнения (31), получим

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^0}{dz^2} + k_k^2 \tilde{\Phi}_k^0 + \sum_{m,n} \left[ \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^{mn}}{dz^2} - (\alpha_k^{mn})^2 \tilde{\Phi}_k^{mn} \right] \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y = 0, \quad (33)$$

где

$$\alpha_k^{mn} = \sqrt{\lambda_m^2 + \lambda_n^2 - k_k^2}. \quad (34)$$

Уравнения (33) будут выполнены, если будут выполнены уравнения

$$\frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^0}{dz^2} + k_k^2 \tilde{\Phi}_k^0 = 0, \quad \frac{d^2 \tilde{\Phi}_k^{mn}}{dz^2} - (\alpha_k^{mn})^2 \tilde{\Phi}_k^{mn} = 0. \quad (35)$$

В соответствии с результатами п. 1 решения первых уравнений (35) необходимо выбрать в виде

$$\tilde{\Phi}_1^0 = B_1^{00} e^{ik_1 z}, \quad \tilde{\Phi}_2^0 = A_2^{00} e^{-ik_2 z}, \quad (36)$$

а решения других уравнений зависят от знака  $(\alpha_k^{mn})^2$ . В случае, когда  $(\alpha_k^{mn})^2 > 0$ , решения уравнений (35) при  $m, n = 1, 3 \dots$  примем в виде

$$\tilde{\Phi}_1^{mn} = B_1^{mn} e^{\alpha_1^{mn} z}, \quad \tilde{\Phi}_2^{mn} = A_2^{mn} e^{-\alpha_2^{mn} z}. \quad (37)$$

Эти решения являются затухающими при удалении от пластины в направлении оси  $z$ . При их использовании в соответствии с составленными выражениями (8), (9), соотношениями (2) и решениями (36) можно получить соотношения

$$\begin{aligned} (\tilde{v}_z^* + \tilde{v}_z^1)|_{z=0} &= -ik_1(A_* - B_1^{00}) + \sum_{m,n} \alpha_1^{mn} B_1^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \\ \tilde{v}_z^2|_{z=0} &= -ik_2 A_2^{00} - \sum_{m,n} \alpha_2^{mn} A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y, \end{aligned} \quad (38)$$

$$p = (\tilde{p}_* + \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)|_{z=0} = -i\rho_1\omega\left(A_* + B_1^{00} + \sum_{m,n} B_1^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right) + i\rho_2\omega\left(A_2^{00} + \sum_{m,n} A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right). \quad (39)$$

Подчинив далее функции (30) и (32) условиям (12), используя для этого составленные выражения (38), получим

$$i\omega\left(\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right) = -i\frac{\omega}{c_1}(A_* - B_1^{00}) + \sum_{m,n} \alpha_1^{mn} B_1^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y,$$

$$i\omega\left(\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right) = -i\frac{\omega}{c_2} A_2^{00} - \sum_{m,n} \alpha_2^{mn} A_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y.$$

Эти условия будут выполнены, если будут выполнены равенства

$$B_1^{00} = A_* + c_1 \tilde{w}_0, \quad A_2^{00} = -c_2 \tilde{w}_0,$$

$$B_1^{mn} = i\frac{\omega}{\alpha_1^{mn}} \tilde{w}_{mn}, \quad \tilde{B}_2^{mn} = -i\frac{\omega}{\alpha_2^{mn}} \tilde{w}_{mn}. \quad (40)$$

При их подстановке в соотношение (39) получим

$$-p = -(\tilde{p}_* + \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)|_{z=0} = i\rho_1\omega\left[2A_* + c_1 \tilde{w}_0 + i\omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{w}_{mn}}{\alpha_1^{mn}} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right] + i\rho_2\omega\left(c_2 \tilde{w}_0 + i\omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{w}_{mn}}{\alpha_2^{mn}} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right). \quad (41)$$

Во втором случае, когда  $(\alpha_k^{mn})^2 < 0$ , вместо (37) будем иметь решения

$$\tilde{\Phi}_1^{mn} = B_1 e^{i\tilde{\alpha}_1^{mn} z}, \quad \tilde{\Phi}_2^{mn} = A_2 e^{-i\tilde{\alpha}_2^{mn} z}, \quad (42)$$

где  $(\tilde{\alpha}_k^{mn})^2 = |\alpha_k^{mn}|^2$ . При их использовании вместо (38) получим соотношение

$$(\tilde{v}_z^* + \tilde{v}_z^1)|_{z=0} = -ik_1(A_* - B_1^{00}) + i\sum_{m,n} \tilde{\alpha}_1^{mn} B_1^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y,$$

$$\tilde{v}_z^2|_{z=0} = -ik_2 A_2^{00} - i\sum_{m,n} \tilde{\alpha}_2^{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y,$$

а соотношение (39) остается без изменений. В соотношениях (40) вместо двух последних будем иметь соотношения

$$B_1^{mn} = \frac{\omega}{\tilde{\alpha}_1^{mn}} \tilde{w}_{mn}, \quad B_2^{mn} = -\frac{\omega}{\tilde{\alpha}_2^{mn}} \tilde{w}_{mn} \quad (43)$$

и при этом вместо (41) получим соотношение

$$-(\tilde{p}_* + \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)|_{z=0} = i\rho_1\omega\left[2A_* + c_1 \tilde{w}_0 + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{w}_{mn}}{\tilde{\alpha}_1^{mn}} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right] + i\rho_2\omega\left(c_2 \tilde{w}_0 + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{w}_{mn}}{\tilde{\alpha}_2^{mn}} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y\right). \quad (44)$$

В случае, когда  $(x_k^{mn})^2 > 0$ , при использовании соотношений (30) и (41) уравнение движения (11) принимает вид

$$(d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} K_{mn} \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y = -2i\rho_1 \omega A_*, \quad (45)$$

где в дополнение к (22) введены обозначения

$$K_{mn} = DL_{mn} - \Omega^2 - \frac{\rho_1 \omega^2}{x_1^{mn}} - \frac{\rho_2 \omega^2}{x_2^{mn}}, \quad L_{mn} = (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2. \quad (46)$$

Полагая в уравнении (45)  $\tilde{w}_0 \equiv 0$  и проведя его интегрирование методом Бубнова – Галеркина, получим решение

$$\tilde{w}_{mn} = -i \frac{2\rho_1 \omega f_{mn}}{K_{mn}} A_*, \quad f_{mn} = \frac{16}{\pi^2 mn}. \quad (47)$$

В рассматриваемом случае, исходя из (41), для определения давлений в средах «1» и «2» получаем формулы

$$((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} = -2i\rho_1 \omega P_1 A_*, \quad (\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} = 2i\rho_2 \omega P_2 A_*, \quad (48)$$

где

$$P_1 = 1 + \sum_{m,n} \frac{\rho_1 \omega^2 f_{mn}}{x_1^{mn} K_{mn}}, \quad P_2 = \sum_{m,n} \frac{\rho_2 \omega^2 f_{mn}}{x_2^{mn} K_{mn}}.$$

При этом

$$R_p^{(3)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 P_2}{\rho_1 P_1} \right|. \quad (49)$$

Если же  $(x_k^{mn})^2 < 0$ , то вместо уравнения (45) будем иметь уравнение

$$(d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} (d_{mn} + i\varphi_{mn}) \tilde{w}_{mn} \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y = -2i\rho_1 \omega A_*, \quad (50)$$

где

$$\varphi_{mn} = \frac{\rho_1 \omega^2}{\tilde{x}_1^{mn}} + \frac{\rho_2 \omega^2}{\tilde{x}_2^{mn}}.$$

Следовательно, при  $\tilde{w}_0 = 0$  в рассматриваемом случае решением уравнения (11) является равенство

$$\tilde{w}_{mn} = -i \frac{2\rho_1 \omega f_{mn}}{d_{mn} + i\varphi_{mn}}. \quad (51)$$

При этом в соответствии с (44) вместо (48) приходим к формулам

$$\begin{aligned} ((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} &= -2i\rho_1 \omega \left( 1 - \sum_{m,n} \frac{i\rho_1 \omega^2 f_{mn}}{(d_{mn} + i\varphi_{mn}) \tilde{x}_1^{mn}} \right) A_* = \\ &= -2i\rho_1 \omega (Q_1 - i\tilde{Q}_1) A_*, \\ (\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} &= i\rho_2 \omega^2 \sum_{m,n} \frac{\tilde{w}_{mn}}{\tilde{x}_2^{mn}} = -2i\rho_2 \omega^2 \sum_{m,n} \frac{i\rho_1 \omega^2 f_{mn}}{(d_{mn} + i\varphi_{mn}) \tilde{x}_2^{mn}} A_* = \\ &= -2i\rho_2 \omega (Q_2 + i\tilde{Q}_2) A_*, \end{aligned} \quad (52)$$

где



$$Q_1 = 1 - \sum_{m,n} \frac{\rho_1 \omega^2 f_{mn} \phi_{mn}}{(d_{mn}^2 + \phi_{mn}^2) \tilde{\alpha}_1^{mn}}, \quad \tilde{Q}_1 = \sum_{m,n} \frac{\rho_1 \omega^2 f_{mn} d_{mn}}{(d_{mn}^2 + \phi_{mn}^2) \tilde{\alpha}_1^{mn}},$$

$$Q_2 = \sum_{m,n} \frac{\rho_1 \omega^2 f_{mn} \phi_{mn}}{(d_{mn}^2 + \phi_{mn}^2) \tilde{\alpha}_2^{mn}}, \quad \tilde{Q}_2 = \sum_{m,n} \frac{\rho_1 \omega^2 f_{mn} d_{mn}}{(d_{mn}^2 + \phi_{mn}^2) \tilde{\alpha}_2^{mn}},$$

и, в отличие от (49), для вычисления параметра  $R_p$  в соответствии с (10) и (52) будем иметь формулу

$$R_p^{(3)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 \sqrt{Q_2^2 + \tilde{Q}_2^2}}{\rho_1 \sqrt{Q_1^2 + \tilde{Q}_1^2}} \right|, \quad (53)$$

по структуре совпадающую с формулой (25).

Найденные по формуле (53) значения  $R_p^{(3)}$  на рис. 1 изображены штрихпунктирной линией. Видно, что при малых частотах ( $f < 500$  Гц) осредненные значения  $R_p^{(2)}$  и  $R_p^{(3)}$  можно считать практически совпадающими, а при  $f > 500$  Гц они могут значительно различаться в той или иной полосе частот.

**3. Построение приближенного решения задачи о звукоизоляции пластины, имеющей податливый опорный контур.** Предположим, что при действии поперечной нагрузки  $p = (p_* + p^1 - p^2)|_{z=0}$  в точках контурной линии  $\Gamma$ , заданной параметрическим уравнением  $s = s(x, y)$ , возникает поперечная реактивная сила  $R(s)$ , связанная с прогибом  $w(s)$  зависимостью

$$R(s) = \beta w(s),$$

где  $\beta$  – жесткость опорного элемента. В принятом приближении для рассматриваемой механической системы можно записать вариационное уравнение следующего вида:

$$\oint_{\Gamma} \beta w(s) \delta w(s) ds + \iint_{\sigma} \{ D[(w_{,xx} + \nu w_{,yy}) \delta w_{,xx} + 2(1 - \nu) w_{,xy} \delta w_{,xy} + (w_{,yy} + \nu w_{,xx}) \delta w_{,yy}] + C w_{,\tau} \delta w - p \delta w + \rho_n t w_{,\tau\tau} \delta w \} dx dy = 0. \quad (54)$$

В этом уравнении в поверхностном интеграле введено в рассмотрение слагаемое  $C w_{,\tau}$ , содержащее параметр  $C$  некоторого внешнего демпфирования, который имеет смысл логарифмического декремента колебаний. Будем считать, что параметр  $C$  линейно зависит от частоты колебаний  $\omega$  и определяется по формуле

$$C = c_0 \omega (\rho_1 + \rho_2), \quad (55)$$

где  $c_0$  – некоторый безразмерный коэффициент, подлежащий определению (идентификации), исходя из данных специально проводимых экспериментов.

Внеся в (54) представление  $w = \tilde{w} e^{i\omega\tau}$ , получим уравнение

$$\delta \Pi = \oint_{\Gamma} \beta \tilde{w}(s) \delta \tilde{w}(s) ds + \iint_{\sigma} \int_0^a \int_0^b [(\tilde{w}_{,xx} + \nu \tilde{w}_{,yy}) \delta \tilde{w}_{,xx} + 2(1 - \nu) \tilde{w}_{,xy} \delta \tilde{w}_{,xy} + (\tilde{w}_{,yy} + \nu \tilde{w}_{,xx}) \delta \tilde{w}_{,yy} + (iC\omega - \Omega^2) \tilde{w} \delta \tilde{w} - \tilde{p} \delta \tilde{w}] dx dy = 0,$$

преобразующееся к виду

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \oint_{\Gamma} \beta \tilde{w}(s) \delta \tilde{w}(s) ds + \int_0^b (\tilde{M}_x \delta \tilde{w}_{,x} - \tilde{R}_x \delta \tilde{w}) dy \Big|_{x=0}^{x=a} + \\
& + \int_0^a (\tilde{M}_y \delta \tilde{w}_{,y} - \tilde{R}_y \delta \tilde{w}) dx \Big|_{y=0}^{y=b} + \int_0^a \int_0^b [(D\nabla^2 \nabla^2 - \Omega^2 + iC\omega) \tilde{w} - \\
& - \tilde{p}] \delta \tilde{w} dx dy - 2\tilde{M}_{xy} \delta \tilde{w} \Big|_{x=0}^{x=a} \Big|_{y=0}^{y=b} = 0, \quad (56)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\tilde{M}_x = D(\tilde{w}_{,xx} + \nu \tilde{w}_{,yy}), \quad \tilde{M}_y = D(\tilde{w}_{,yy} + \nu \tilde{w}_{,xx}), \quad \tilde{M}_{xy} = D(1 - \nu) \tilde{w}_{,xy}, \\
\tilde{R}_x = \tilde{M}_{x,x} + 2\tilde{M}_{xy,y}, \quad \tilde{R}_y = \tilde{M}_{y,y} + 2\tilde{M}_{xy,x}.
\end{aligned}$$

Так как в рамках аппроксимации (30) в точках контурной линии  $\Gamma$  шарнирно опертой пластины выполняются равенства

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{w} = \delta \tilde{w}_0, \quad \tilde{M}_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, \\
\tilde{M}_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b,
\end{aligned}$$

то при подстановке в уравнение (56) соотношения (41), справедливого при  $(\mathbf{x}_k^{mn})^2 > 0$ , и интегрировании по методу Бубнова – Галеркина с использованием базисных функций

$$\psi(x, y) = 1, \quad \psi_{mn}(x, y) = \sin \lambda_m x \cdot \sin \lambda_n y$$

получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}
2\beta \frac{(a+b)}{ab} \tilde{w}_0 + (d + i\tilde{d}_*) \tilde{w}_0 + \\
+ \sum_{m,n} (K_{mn} + iC\omega) \tilde{f}_{mn} \tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1 \omega A_*, \quad (57)
\end{aligned}$$

$$f_{mn} (d + i\tilde{d}_*) \tilde{w}_0 + (K_{mn} + iC\omega) \tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1 \omega f_{mn} A_*, \quad (58)$$

где по-прежнему  $d = -\Omega^2$ , а

$$\begin{aligned}
K_{mn} = DL_{mn} - \Omega^2 - \frac{\rho_1 \omega^2}{\mathbf{x}_1^{mn}} - \frac{\rho_2 \omega^2}{\mathbf{x}_2^{mn}}, \quad L_{mn} = (\lambda_m^2 + \lambda_n^2)^2, \\
\tilde{d}_* = C\omega + \rho_1 \omega c_1 + \rho_2 \omega c_2.
\end{aligned}$$

Из уравнения (58) неизвестные  $\tilde{w}_{mn}$  выражаются через неизвестную  $\tilde{w}_0$  в соответствии с равенством

$$\tilde{w}_{mn} = -\frac{(d + i\tilde{d}_*) f_{mn}}{K_{mn} + iC\omega} \tilde{w}_0 - \frac{2i\rho_1 \omega f_{mn}}{K_{mn} + iC\omega} A_*, \quad (59)$$

при подстановке которого уравнение (57) принимает вид

$$[r_0 + r(d + i\tilde{d}_*)] \tilde{w}_0 = -2i\rho_1 \omega r A_*, \quad (60)$$

где

$$r_0 = 2\beta \frac{(a+b)}{ab}, \quad r = 1 - \sum_{m,n} \tilde{f}_{mn} f_{mn}, \quad \tilde{f}_{mn} = \frac{4}{\pi^2 mn}.$$

Из уравнения (60) для определения неизвестной  $\tilde{w}_0$  следует формула

$$\tilde{w}_0 = -\frac{2i\rho_1 \omega r}{r_0 + r(d + i\tilde{d}_*)} A_* = -(\chi + i\tilde{\chi}) A_*, \quad (61)$$

где

$$\chi = \frac{2\rho_1\omega r^2 \tilde{d}_*}{(r_0 + dr)^2 + \tilde{d}_*^2 r^2}, \quad \tilde{\chi} = \frac{2\rho_1\omega(r_0 + dr)}{(r_0 + dr)^2 + \tilde{d}_*^2 r^2}. \quad (62)$$

При подстановке полученного выражения (61) равенство (59) преобразуется к виду

$$\tilde{w}_{mn} = \left( \frac{f_{mn}(d + i\tilde{d}_*)(\chi + i\tilde{\chi}) - 2i\rho_1\omega r}{K_{mn} + iC\omega} \right) A_* = (W_{mn} + i\tilde{W}_{mn}) A_*, \quad (63)$$

где

$$W_{mn} = \frac{f_{mn}(K_{mn}q + \tilde{q}C\omega)}{K_{mn}^2 + C^2\omega^2}, \quad \tilde{W}_{mn} = \frac{f_{mn}(\tilde{q}K_{mn} + qC\omega)}{K_{mn}^2 + C^2\omega^2},$$

$$q = d\chi - \tilde{d}_*\tilde{\chi}, \quad \tilde{q} = d\tilde{\chi} - \tilde{d}_*\chi - 2\rho_1\omega.$$

В рассматриваемом случае, когда  $(\mathbf{x}_k^{mn})^2 > 0$ , в соответствии с (41), (61) и (63) будем иметь

$$\begin{aligned} ((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_1\omega \left[ 2 - c_1(\chi + i\tilde{\chi}) + i\omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn} + i\tilde{W}_{mn}}{\mathbf{x}_1^{mn}} \right] A_* = \\ &= -i\rho_1\omega(P_1 + i\tilde{P}_1)A_*, \\ (\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_2\omega \left[ -c_2(\chi + i\tilde{\chi}) + i\omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn} + i\tilde{W}_{mn}}{\mathbf{x}_2^{mn}} \right] A_* = \\ &= -i\rho_2\omega(P_2 + i\tilde{P}_2)A_*. \end{aligned} \quad (64)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 - c_1\chi - \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\mathbf{x}_1^{mn}}, & \tilde{P}_1 &= -c_1\tilde{\chi} + \omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn}}{\mathbf{x}_1^{mn}}, \\ P_2 &= -c_2\chi - \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\mathbf{x}_2^{mn}}, & \tilde{P}_2 &= -c_2\tilde{\chi} + \omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn}}{\mathbf{x}_2^{mn}}, \end{aligned}$$

при этом

$$R_p^{(4)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 \sqrt{P_2^2 + \tilde{P}_2^2}}{\rho_1 \sqrt{P_1^2 + \tilde{P}_1^2}} \right|. \quad (65)$$

В случае же, когда  $(\mathbf{x}_k^{mn})^2 < 0$ , в соответствии с (44), (56) вместо уравнений (57) и (58) приходим к уравнениям

$$2\beta \frac{a+b}{ab} \tilde{w}_0 + (d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} (K_{mn} + i\tilde{K}_{mn}) \tilde{f}_{mn} \tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1\omega A_*, \quad (66)$$

$$f_{mn}(d + i\tilde{d})\tilde{w}_0 + (K_{mn} + i\tilde{K}_{mn})\tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1\omega f_{mn} A_*, \quad (67)$$

где в рассматриваемом случае

$$K_{mn} = DL_{mn} - \Omega^2, \quad \tilde{K}_{mn} = C\omega + \frac{\rho_1\omega^2}{\tilde{\mathbf{x}}_1^{mn}} + \frac{\rho_2\omega^2}{\tilde{\mathbf{x}}_2^{mn}}.$$

Из уравнения (67) следует равенство

$$\tilde{w}_{mn} = -\frac{(d + i\tilde{d})f_{mn}}{K_{mn} + i\tilde{K}_{mn}} \tilde{w}_0 - \frac{2i\rho_1\omega f_{mn}}{K_{mn} + i\tilde{K}_{mn}} A_*. \quad (68)$$

При его подстановке в уравнение (66) по-прежнему приходим к уравнению (62), из которого следует равенство (61), при подстановке которого в соотношение (68) получим

$$\tilde{w}_{mn} = \left( \frac{f_{mn}(d + i\tilde{d}_*)(\chi + i\tilde{\chi}) - 2i\rho_1\omega f_{mn}}{K_{mn} + i\tilde{K}_{mn}} \right) A_* = (W_{mn} + i\tilde{W}_{mn})A_*, \quad (69)$$

где в рассматриваемом случае

$$W_{mn} = \frac{f_{mn}(qK_{mn} + \tilde{q}\tilde{K}_{mn})}{K_{mn}^2 + \tilde{K}_{mn}^2}, \quad \tilde{W}_{mn} = \frac{f_{mn}(\tilde{q}K_{mn} - q\tilde{K}_{mn})}{K_{mn}^2 + \tilde{K}_{mn}^2}.$$

Таким образом, в случае, когда  $(\alpha_k^{mn})^2 < 0$ , в соответствии с соотношениями (44), (61) и (69) вместо (64) получаем соотношения

$$\begin{aligned} ((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_1\omega \left[ 2 - c_1(\chi + i\tilde{\chi}) + \omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn} + i\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_1^{mn}} \right] A_* = \\ &= -i\rho_1\omega(P_1 + i\tilde{P}_1)A_*, \\ (\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_2\omega \left[ -c_2(\chi + i\tilde{\chi}) + \omega \sum_{m,n} \frac{W_{mn} + i\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_2^{mn}} \right] A_* = \\ &= -i\rho_2\omega(P_2 + i\tilde{P}_2)A_*, \end{aligned} \quad (70)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 - c_1\chi + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_1^{mn}}, & \tilde{P}_1 &= -c_1\tilde{\chi} + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_1^{mn}}, \\ P_2 &= -c_2\chi + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_2^{mn}}, & \tilde{P}_2 &= -c_2\tilde{\chi} + \omega \sum_{m,n} \frac{\tilde{W}_{mn}}{\tilde{\alpha}_2^{mn}}, \end{aligned}$$

а параметр  $R_p^{(4)}$  по-прежнему вычисляется по формуле (65).

Если звуковые волны в средах «1» и «2» описывать волновыми уравнениями в приближении (4), то для определения действующего на пластину давления  $\tilde{p}$  получаем выражение

$$\tilde{p} = -(\tilde{p}_* + \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2)|_{z=0} = 2i\rho_1\omega A_* + i\tilde{d}\tilde{w}.$$

При его использовании запишем вариационное уравнение

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \oint_{\Gamma} \beta \tilde{w}(s) \delta\tilde{w}(s) ds + \int_0^a \int_0^b [(\tilde{w}_{,xx} + \nu\tilde{w}_{,yy})\delta\tilde{w}_{,xx} + 2(1-\nu)\tilde{w}_{,xy}\delta\tilde{w}_{,xy} + \\ &+ (\tilde{w}_{,yy} + \nu\tilde{w}_{,xx})\delta\tilde{w}_{,yy} + (d + i\tilde{d}_*)\tilde{w} + \\ &+ 2i\rho_1\omega A_*\delta\tilde{w}] dx dy = 0, \end{aligned}$$

которое в рамках принятой аппроксимации (26) преобразуется к системе алгебраических уравнений следующего вида:

$$(r_0 + d + i\tilde{d}_*)\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} (d_{mn} + i\tilde{d}_*)\tilde{f}_{mn}\tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1\omega A_*,$$

$$f_{mn}(d + i\tilde{d}_*)\tilde{w}_0 + (d_{mn} + i\tilde{d}_*)\tilde{w}_{mn} = -2i\rho_1\omega f_{mn}A_*.$$

Решением этой системы устанавливаются по-прежнему зависимость (61) для  $\tilde{w}_0$  и равенство вида (63) для  $\tilde{w}_{mn}$ :

$$\tilde{w}_{mn} = \frac{f_{mn}(d + i\tilde{d}_*)(\chi + i\tilde{\chi}) - 2i\rho_1\omega r}{d_{mn} + i\tilde{d}_*} A_* = (W_{mn} + i\tilde{W}_{mn})A_*, \quad (71)$$

где в рассматриваемом случае

$$W_{mn} = \frac{f_{mn}(d_{mn}q + \tilde{q}\tilde{d}_*)}{d_{mn}^2 + \tilde{d}_*^2}, \quad \tilde{W}_{mn} = \frac{f_{mn}(\tilde{q}d_{mn} + q\tilde{d}_*)}{d_{mn}^2 + \tilde{d}_*^2}.$$

Входящие сюда коэффициенты  $\chi$ ,  $\tilde{\chi}$ ,  $q$ ,  $\tilde{q}$  по-прежнему определяются по формулам (62) и (63), а для вычисления амплитудных значений давлений в средах «1» и «2» в соответствии с равенствами (8), (26), (61) и (71) приходим к выражениям

$$\begin{aligned} ((\tilde{p}_* + \tilde{p}_1)|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_1\omega(A_* + B_1) = -i\rho_1\omega\left[2A_* + c_1\left(\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn}\right)\right] = \\ &= -i\rho_1\omega(P_1 + i\tilde{P}_1), \\ (\tilde{p}_2|_{z=0})^{\max} &= -i\rho_2\omega A_2 = i\rho_2\omega c_2\left(\tilde{w}_0 + \sum_{m,n} \tilde{w}_{mn}\right) = i\rho_2\omega(P_2 + i\tilde{P}_2), \end{aligned} \quad (72)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 &= 2 + c_1\left(-\chi + \sum_{m,n} W_{mn}\right), & \tilde{P}_1 &= c_1\left(-\tilde{\chi} + \sum_{m,n} \tilde{W}_{mn}\right), \\ P_2 &= c_2\left(-\chi + \sum_{m,n} W_{mn}\right), & \tilde{P}_2 &= c_2\left(-\tilde{\chi} + \sum_{m,n} \tilde{W}_{mn}\right). \end{aligned}$$

При использовании составленных выражений (72) параметр звукоизоляции по-прежнему будет вычисляться по формуле вида (65):

$$R_p^{(5)} = -20 \lg \left| \frac{\rho_2 \sqrt{P_2^2 + \tilde{P}_2^2}}{\rho_1 \sqrt{P_1^2 + \tilde{P}_1^2}} \right|. \quad (73)$$

#### 4. Результаты экспериментальных и теоретических исследований и их анализ.

**Экспериментальные результаты.** Экспериментальное определение параметра звукоизоляции тонкостенных элементов конструкций основано на проведении соответствующих их испытаний в акустических лабораториях, удовлетворяющих требованиям ГОСТ 27296-87. Такая лаборатория включает в себя две смежные камеры высокого и низкого уровней, в проем между которыми устанавливается испытываемый образец (рис. 2), а также измерительно-управляющий комплекс с передающей и приемной системами. С целью количественного и качественного анализа построенных теоретических решений рассматриваемой задачи были проведены экспериментальные исследования звукоизолирующей способности плоской пластины, выполненной из стали Ст.3 и имеющей толщину  $t = 3$  мм, длину  $a = 480$  мм, ширину  $b = 560$  мм. Камеры акустической лаборатории имеют следующие значения площадей  $S$  и объемов  $V$ :  $S_1 = 13 \text{ м}^2$ ,  $V_1 = 35 \text{ м}^3$  (высокого уровня) и  $S_2 = 12 \text{ м}^2$ ,  $V_2 = 31 \text{ м}^3$  (низкого уровня). В камерах в соответствии с ГОСТ 27296-87 обеспечена минимальная возможность косвенной передачи звука и проникновения посторонних звуков.

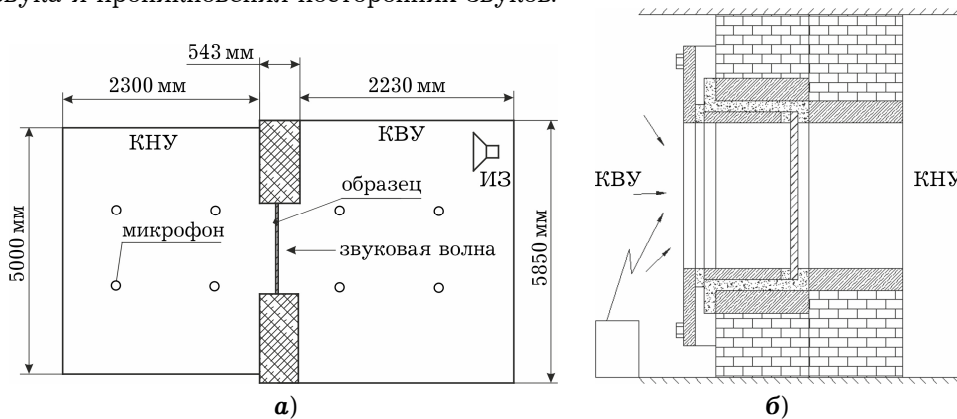


Рис. 2

В табл. 1 для третьоктавных значений частот [10, 11] приведены значения параметра  $R_p$ , найденные в результате четырех испытаний образца при разных температурных режимах и соответствующие измерению звукового давления микрофонами, расположенными равномерно в пределах объемов камер. Значения параметра  $R_p$ , найденные усреднением четырех измеренных величин (табл. 1), на рис. 3 изображены сплошной линией в виде соответствующего графика. Аналогичные значения  $R_p$ , найденные при измерении уровней звукового давления микрофонами, расположенными вблизи испытуемого образца, приведены на рис. 3 в виде пунктирной линии. Сопоставляя приведенные результаты, можно видеть, что при удалении от образца наблюдается весьма значительное ослабление уровня звукового давления при всех частотах падающей на образец звуковой волны. При их сравнении с результатами, приведенными на рис. 1, следует заключить, что используемые в экспериментах измерительные средства и существующие [10, 11] способы обработки экспериментальных данных не позволяют выявить весьма сложную форму зависимости параметра  $R_p$  от частоты  $\omega$  и сложный закон его распределения в пространстве камеры низкого уровня.

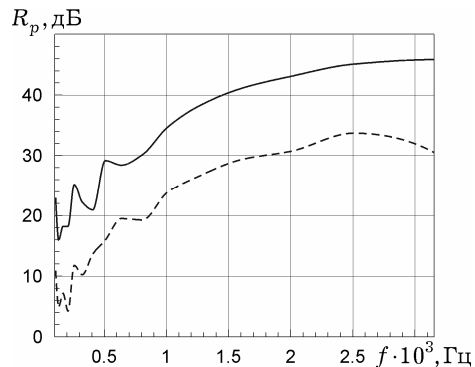


Рис. 3

Таблица 1

$f$ , кГц								
№ обр.	0.1	0.125	0.16	0.20	0.25	0.315	0.4	0.5
1	24	16	18	18	25	23	21	29
2	23	16	18	18	25	22	21	29
3	22	15	18	18	25	21	20	29
4	22	16	18	18	25	22	21	29
$f$ , кГц								
№ обр.	0.63	0.8	1	1.25	1.6	2	2.5	3.15
1	29	30	35	38	42	43	46	46
2	28	30	35	38	41	43	45	46
3	28	30	34	38	40	43	44	45
4	28	30	34	38	41	43	45	46

**Результаты теоретических решений.** Для рассмотренной выше пластины, взаимодействующей с двух сторон с воздухом, на рис. 4 приведены зависимости  $R_p^{(4)} = R_p^{(4)}(\omega)$ , найденные по формуле (65) при различных значениях коэффициента  $\beta$ , но при  $c_0 = 0$  (сплошные кривые соответствуют значению  $\beta = 10, 100$ , штриховые –  $\beta = 10^3$ , штрихпунктирные –  $\beta = 10^4$ .) Видно, что учет податливости опорного контура пластины на значения  $R_p^{(4)}$  влияет только при малых частотах  $\omega$ , а сами величины  $R_p^{(4)}$  находятся в окрестности значений, являющихся средними между значениями параметров  $R_p^{(1)}$  и  $R_p^{(3)}$ , повторяя характер поведения функции  $R_p^{(3)}$  при изменении параметра  $f$ .

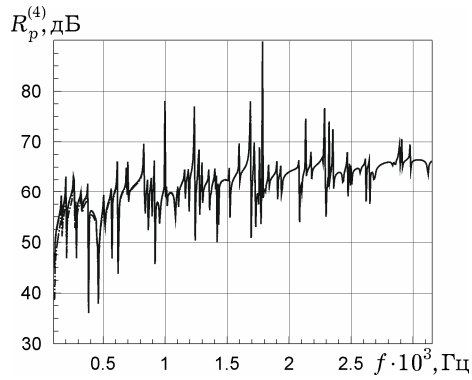


Рис. 4

Как и следовало ожидать, значения  $R_p^{(4)}$  оказались больше экспериментально найденных значений параметра  $R_p$ , что объясняется, прежде всего, тем, что при испытаниях пластины на звукоизоляцию отражение и излучение от нее звуковых волн происходит в ограниченные пространства, соответственно, камер высокого и низкого уровней, в то время как теоретические значения  $R_p$  найдены для случая излучения и отражения волн в неограниченные полупространства.

На рис. 5 также приведены зависимости  $R_p^{(4)} = R_p^{(4)}(\omega)$ , найденные по формуле (65) при  $\beta = 10$ , но при разных значениях коэффициента  $c_0$  (значению  $c_0 = 0$  соответствуют сплошные кривые,  $c_0 = 0.5$  – штриховые,  $c_0 = 1$  – штрихпунктирные,  $c_0 = 5$  – пунктирные.) Видно, что при  $c_0 \geq 1$  приведенные кривые становятся практически гладкими. Следовательно, при теоретическом исследовании задач о прохождении звуковой волны сквозь деформируемые тонкостенные элементы конструкций в виде пластин и оболочек введение слагаемого  $c_0(\rho_1 + \rho_2)\omega w_{,\tau}$  в уравнение (54) позволяет получать сглаженные зависимости вида  $R_p = R_p(\omega)$ , согласующиеся по характеру изменения с экспериментально получаемыми. При этом коэффициент  $c_0$  можно рассматривать как параметр, подлежащий идентификации, исходя из данных экспериментов.

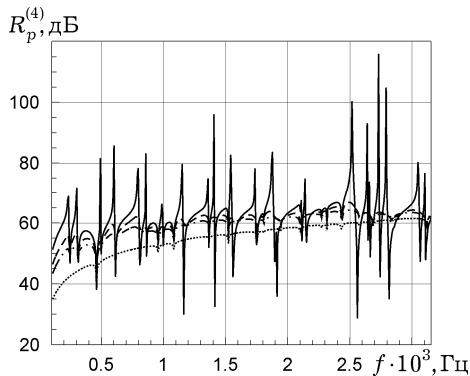


Рис. 5

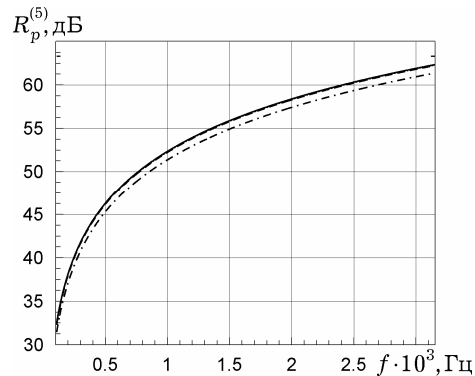


Рис. 6

Зависимости  $R_p^{(5)} = R_p^{(5)}(\omega)$ , соответствующие использованию формулы (73), приведены на рис. 6 (сплошные кривые соответствуют значению  $c_0 = 0$ , штриховые –  $c_0 = 1$ , штрихпунктирные –  $c_0 = 5$ ). Сравнивая их с кривыми, приведенными на рис. 5, можно видеть их значительное различие, что свидетельствует о недостаточной степени точности использованных в [8] уравнений, основанных на гипотезе плоского отражения [1–3].

**Заключение.** Анализ полученных результатов показывает, что из рассмотренных пяти вариантов постановки стационарной задачи о прохождении падающей на пластину плоской звуковой волны наиболее содержательным является вариант, основанный на использовании трехмерных волновых уравнений для описания отраженных и излученных звуковых волн, которые формируются деформируемой пластиной. Установлено, что учет податливости опорного контура пластины оказывает существенное влияние на ее звукоизоляционные свойства лишь при малых частотах звуковой волны. Показано, что введение в уравнение движения пластины некоторого внешнего демпфирования позволяет при определении параметра звукоизоляции пластины получить сглаженные графические зависимости от частоты, согласующиеся по виду с экспериментальными зависимостями, получающимися путем испытания образцов в акустической лаборатории.

1. Горшков А. Г. Взаимодействие ударных волн с деформируемыми преградами // Итоги науки и техники. Сер. «Механика твердых деформируемых тел». – Москва: ВИНТИ, 1980. – 13. – С. 105–186.
2. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. – Ленинград: Судостроение, 1974. – 208 с.
3. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с. – (Методы расчета оболочек: В 5 т. – Т. 5.)
4. Игумнов Л. А., Локтева Н. А., Паймушин В. Н., Тарлаковский Д. В. Звукоизоляционные свойства одномерной трехслойной пластины // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 86–93.  
То же: Igumnov L. A., Lokteva N. A., Paimushin V. N., Tarlakovskii D. V. Soundproof properties of a one-dimensional three-layer plate // J. Math. Sci. – 2014. – 203, No. 1. – P. 104–113.
5. Мунин А. Г., Ефимцов Б. М., Кудисова Л. Я. и др. Авиационная акустика: В 2 ч. Ч. 2: Шум в салонах пассажирских самолетов. – Москва: Машиностроение, 1986. – 261 с.
6. Мунин А. Г., Самохин В. Ф., Шипов Р. А. и др. Авиационная акустика: В 2 ч. Ч. 1: Шум на местности дозвуковых пассажирских самолетов и вертолетов. – Москва: Машиностроение, 1986. – 243 с.
7. Паймушин В. Н. О динамической потере устойчивости сжатой пластины, окруженной с двух сторон акустическими средами // Докл. РАН. – 2014. – 455, № 3. – С. 287–291.  
То же: Paimushin V. N. Dynamic instability of a compressible plate surrounded by an acoustic medium on free surfaces // Doklady Phys. – 2014. – 59, No. 3. – P. 158–162.
8. Паймушин В. Н. О задачах излучения звуковой волны при динамическом процессе деформирования пластин с учетом внешнего и внутреннего демпфирования // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2013. – 56, № 2. – С. 72–85.  
То же: Paimushin V. N. On the problems of emission of sound waves in the dynamic process of deformation of plates with regard for external and internal damping // J. Math. Sci. – 2014. – 203, No. 1. – P. 87–103.
9. Паймушин В. Н., Газизуллин Р. К. Исследование звукоизоляционных свойств абсолютно жесткой пластины, помещенной на деформируемых опорных элементах между двумя преградами // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. – 2013. – 155, кн. 3. – С. 126–141.
10. СП 51.13330.2011 «Защита от шума. Актуализированная редакция СНиП 23-03-2003.» – Москва: Минрегион России, 2011. – 46 с.
11. Справочник по технической акустике / Под ред. М. Хекла, Х. А. Мюллера. – Ленинград: Судостроение, 1980. – 440 с.  
То же: Taschenbuch der Technischen Akustik / Herausgegeben von M. Heckl, H. A. Müller. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1975. – 536 S.
12. Штамм К., Витте Г. Многослойные конструкции. – Москва: Стройиздат, 1983. – 300 с.  
То же: Stamm K., Witte H. Sandwichkonstruktionen. Berechnung, Fertigung, Ausführung. – Wien–New York: Springer-Verlag, 1974. – 337 S.
13. António J., Godinho L., Tadeu A. Acoustic insulation provided by circular and infinite plane walls // J. Sound Vib. – 2004. – 273, No. 3. – P. 681–691.



14. *Matsumoto T., Uchida M., Sugaya H., Tachibana H.* Development of multiple drywall with high sound insulation performance // *Appl. Acoust.* – 2006. – **67**, No. 6. – P. 595–608.
15. *Osipov A., Mees P., Vermeir G.* Low-frequency airborne sound transmission through single partitions in buildings // *Appl. Acoust.* – 1997. – **52**, No. 3/4. – P. 273–288.
16. *Piscoya R., Ochmann M.* Calculation of the transmission loss of finite plates using numerical modal analysis and BEM // 17th Int. Congress on Sound and Vibration (ICSV17), 18–22 July 2010, Cairo, Egypt. – P. 1–8.
17. *Tadeu A., António J. M. P.* Acoustic insulation of single panel walls provided by analytical expressions versus the mass law // *J. Sound Vib.* – 2002. – **257**, No. 3. – P. 457–475.
18. *Tadeu A., António J., Mateus D.* Sound insulation provided by single and double panel walls – A comparison of analytical solutions versus experimental results // *Appl. Acoust.* – 2004. – **65**, No. 1. – P. 15–29.

#### **ДОСЛІДЖЕННЯ РІЗНИХ ВАРІАНТІВ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧІ ПРО ЗВУКОІЗОЛЯЦІЮ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ, ОТОЧЕНОЇ АКУСТИЧНИМИ СЕРЕДОВИЦАМИ**

*Розглядаються п'ять різних варіантів постановки стаціонарної задачі про проходження плоскої звукової хвилі крізь прямокутну пластину. Перший варіант відповідає використанню інерційно-масової моделі, яка базується на припущенні про недеформованість незакріпленої жорсткої пластини за її взаємодії з падаючими плоскими звуковими хвилями і хвилями, що формуються в півпросторах, які оточують пластину. Решта чотири постановки відповідають урахуванню (за моделлю вінклерівської основи) або неврахуванню податливості опорного контуру шарнірно опертої прямокутної пластини, яка деформується згідно з моделлю Кірхгофа, використанню одновимірних або тривимірних хвильових рівнянь для опису руху акустичних середовищ, а також побудові рівняння руху пластини із урахуванням деякого зовнішнього демпфування. Використання цих чотирьох постановок дає можливість для визначення параметра звукоізоляції пластини отримати згладжені графічні залежності від частоти, які узгоджуються з експериментальними залежностями, отриманими шляхом випробування зразків в акустичній лабораторії.*

#### **INVESTIGATION OF DIFFERENT VARIANTS FOR THE STATEMENT OF SOUND INSULATION PROBLEM OF A RECTANGULAR PLATE SURROUNDED BY ACOUSTIC MEDIA**

*The five different variants of statement of a stationary problem on the propagation of a plane sound wave through a rectangular plate are considered. The first variant corresponds to the use of the inertial-mass model based on a hypothesis of non-deformability of an unfixed rigid plate during its interaction with incident and emerging plane sound waves in surrounding half-spaces. The other four problem statements correspond to the accounting (on the model of Winkler base) or neglect of the compliance of a support contour of a hinged rectangular plate, which is being deformed according to the Kirchhoff model, the use of one-dimensional or three-dimensional wave equations to describe the motion of acoustic environments, as well as the construction of the equations of motion for the plate with accounting some external damping. The using these four statements of problem allows for determination of the parameter of sound insulation of plate to obtain smoothed graphical dependencies on the frequency which are in accord with experimental dependences obtained by testing specimens in an acoustic laboratory.*

<sup>1</sup> Казан. нац. исслед. техн. ун-т им. А. Н. Туполева Казань, Россия,

Получено

<sup>2</sup> Казан. фед. ун-т, Казань, Россия,

12.07.14

<sup>3</sup> НИИ механики Моск. гос. ун-та, Москва, Россия,

<sup>4</sup> Моск. авиац. ин-т (нац. исслед. ун-т), Москва, Россия,

<sup>5</sup> Белостокский техн. ун-т, Белосток, Польша