УДК 517.95

О. М. Боценюк

# ПРО ОЦІНКИ СПАДАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЧАТКОВО-КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ МАГНІТОПРУЖНОСТІ В ЗОВНІШНІХ ОБЛАСТЯХ

*Досліджено поведінку при $t \to \infty$ сильних розв'язків початково-крайової задачі для системи напівлінійних рівнянь магнітопружності в зовнішніх областях. Для векторів магнітної індукції та переміщення отримано оцінки спадання в $L^\infty$ і в просторах Соболєва дробового порядку відповідно.*

Асимптотична поведінка розв'язків при $t \to \infty$ еволюційних рівнянь у необмежених областях розглядалась у багатьох роботах (див., наприклад, [2, 6, 8–10, 12, 13]). Зв'язані системи рівнянь, що виникають в гідродинаміці, досліджувалися в [12, 13]. У запропонованій роботі вивчається поведінка розв'язків змішаної задачі для системи напівлінійних рівнянь магнітопружності. Методи дослідження цієї системи істотно відрізняються від методів, використовуваних в [12, 13], з огляду на наявність рівнянь другого порядку за змінною $t$.

**Формулювання задачі та основний результат.** Нехай $\Omega$ – зовнішня область в $\mathbb{R}^3$ з гладкою межею $\Gamma$ і $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G}$, де $G$ – обмежена зіркова область. Позначимо $Q = \Omega \times (0,\infty)$, $\Sigma = \Gamma \times (0,\infty)$. Для системи напівлінійних рівнянь магнітопружності розглянемо таку початково-крайову задачу:

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \frac{1}{\sigma\mu_0}\Delta b - \operatorname{rot}\left(\frac{\partial u}{\partial t} \times b\right) = 0, \qquad \operatorname{div} b = 0, \qquad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div} u - \frac{1}{\mu_0}(\operatorname{rot} b \times b) = 0, \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$b(x,0) = b_0(x), \quad u(x,0) = u_0(x), \quad u'(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$n \cdot b = 0, \quad n \times \operatorname{rot} b = 0, \quad u = 0 \qquad \text{на} \qquad \Sigma. \tag{4}$$

Тут $b : Q \to \mathbb{R}^3$, $u : Q \to \mathbb{R}^3$ – вектор-функції магнітної індукції та переміщення, $n$ – одиничний вектор нормалі до межі $\Gamma = \partial\Omega$. Розв'язність задачі (1)–(4) досліджена в [2–4].

**Позначення.** Для функціональних просторів будемо використовувати однакові позначення як для скалярних, так і для векторних функцій. Нехай $\Omega$ – задана область. Норму в просторах Соболєва $W^{k,p}(\Omega)$ позначаємо через $\|\,.\,\|_{k,p}$ і також будемо використовувати позначення $H^m(\Omega)$ для $W^{m,2}(\Omega)$, $m \in \mathbb{N}$. У просторах $L^p(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, норму позначаємо через $\|\,.\,\|_p$. Для необмеженої області $\Omega$ означимо однорідні простори Соболєва $\dot{H}_0^k(\Omega)$, $\dot{H}^k(\Omega)$ як поповнення множин $C_0^\infty(\Omega)$ і $C_0^k(\bar{\Omega})$ відповідно за нормою $\left\|\nabla^k u\right\|_2 = \sum_{|\alpha|=k}\left\|D^\alpha u\right\|_2$, де $C_0^k(\bar{\Omega})$ – простір звужень на $\Omega$ функцій із $C_0^k(\mathbb{R}^3)$ і $\nabla^k f = \{D^\alpha f : |\alpha| = k\}$. Через $\dot{H}^{s,p}(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, $1 < p < \infty$, позначаємо звуження простору $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ на $\Omega$. Простір $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ [1, с. 187] розглядаємо як класи розподілів $f$ за модулем многочленів. Означимо простір $W$ як поповнення множини $\mathcal{W} = \{\varphi : \varphi \in C_0^1(\bar{\Omega}), \operatorname{div}\varphi = 0, n \cdot \varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\}$ за нормою

$\|\operatorname{rot}\varphi\|_2$. Через $C_b(\mathbb{R}_+;X)$ позначимо простір обмежених і неперервних функцій $g:\mathbb{R}_+\to X$, де $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$, $X$ – банахів простір. Надалі літерою $c$ будемо позначати різні додатні сталі, а через $u'$ – похідну за часом $\dfrac{\partial u}{\partial t}$.

**Теорема 1.** *Припустимо, що* $b_0\in H^2(\Omega)\cap W\cap L^{6/5}(\Omega)$, $n\times\operatorname{rot}b_0=0$ *на* $\Gamma$, $u_0\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\cap W^{2,p}(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$, *де* $p=4/3$. *Тоді існує таке* $\eta>0$, *що за умови*

$$\|b_0\|_{2,2}+\|\nabla u_0\|_{1,2}+\|u_1\|_{1,2}<\eta \tag{5}$$

*існує єдиний розв'язок* $\{b,u\}$ *задачі* (1)–(4), *який задовольняє включення*

$$b\in L^2(\mathbb{R}_+;W)\cap C_b(\mathbb{R}_+;H^1(\Omega)),\qquad \Delta b\in L^2(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)), \tag{6}$$

$$b'\in L^2(\mathbb{R}_+;W)\cap C_b(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)), \tag{7}$$

$$u\in C_b(\mathbb{R}_+;\dot H_0^1(\Omega)),\quad u'\in C_b(\mathbb{R}_+;H_0^1(\Omega)),\quad u''\in C_b(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)), \tag{8}$$

*і для цього розв'язку виконуються оцінки*

$$\|b(t)\|_\infty\le c(1+t)^{-5/4}, \tag{9}$$

$$\|u(t)\|_{\dot H^{\alpha,\ell}(\Omega)}+\|u'(t)\|_{\dot H^{\alpha-1,\ell}(\Omega)}\le c(1+t)^{-\gamma}, \tag{10}$$

*де* $\alpha=(1-\varepsilon)/(2-\varepsilon)$, $\ell=4(2-\varepsilon)/(3-2\varepsilon)$, $\gamma=(1-\varepsilon)/(4-2\varepsilon)$ *і* $\varepsilon$ *– довільне число з інтервалу* $(0,2/3)$.

**Допоміжні твердження.** Із теореми 1 у [2] випливає така

**Лема 1.** *Нехай початкові дані* $b_0$, $u_0$, $u_1$ *задачі* (1)–(4) *задовольняють умови* $b_0\in H^2(\Omega)\cap W$, $n\times\operatorname{rot}b_0=0$ *на* $\Gamma$, $u_0\in\dot H_0^1(\Omega)\cap\dot H^2(\Omega)$, $u_1\in H_0^1(\Omega)$. *Тоді існує таке* $\eta>0$, *що за умови* $\|b_0\|_{2,2}+\|\nabla u_0\|_{1,2}+\|u_1\|_{1,2}<\eta$ *існує єдиний розв'язок* $\{b,u\}$ *задачі* (1)–(4), *який задовольняє включення* (6)–(8).

Уведемо функціональний простір

$$C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)=\{f\in[C_0^\infty(\Omega)]^3:\operatorname{div}f=0\quad\text{в}\quad\Omega\}.$$

Означимо простір $L_\sigma^p(\Omega)$ як замикання $C_{0,\sigma}^\infty(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$. Якщо $\partial\Omega$ є класу $C^{2,1}$, то соленоїдний простір $L_\sigma^p(\Omega)$ характеризується як [6, с. 160]

$$L_\sigma^p(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega):\operatorname{div}f=0\quad\text{в}\quad\Omega,\quad n\cdot f=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\}.$$

Означимо лінійний оператор $\mathcal{M}=\mathcal{M}_{q,\Omega}$ таким чином:

$$\mathcal{D}(\mathcal{M})=L_\sigma^q(\Omega)\cap\{b\in[W^{2,q}(\Omega)]^3:n\times\operatorname{rot}b=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\},$$

$$\mathcal{M}b=\operatorname{rot}\operatorname{rot}b\qquad\text{для}\qquad b\in\mathcal{D}(\mathcal{M}).$$

У [12, 13] доведено, що при $1<q<\infty$ оператор $-\mathcal{M}$ є генератором аналітичної напівгрупи $(e^{-t\mathcal{M}})_{t\ge0}$ на $L_\sigma^q(\Omega)$ і для цієї напівгрупи справджуються $L^q-L^r$ оцінки, що містяться у наступному твердженні.

**Лема 2.** *1°*). *Нехай* $1\le q\le r\le\infty$ *і* $q\ne\infty$, $r\ne1$. *Тоді існує стала* $c=c_{q,r}>0$ *така, що для* $f\in L_\sigma^q(\Omega)$ *виконується нерівність*

$$\left\|e^{-t\mathcal{M}}f\right\|_r\le ct^{-\frac32\left(\frac1q-\frac1r\right)}\|f\|_q,\qquad t>0. \tag{11}$$

**2°**). *Нехай* $1 \le q \le r \le 3$, $r \ne 1$. *Тоді існує стала* $c = c_{q,r} > 0$ *така, що*

$$\left\|\nabla e^{-t\mathcal{M}} f\right\|_r \le c t^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{2}} \|f\|_q, \qquad t > 0 \qquad \forall f \in L^q_\sigma(\Omega). \tag{12}$$

У [12, 13] також показано, що $\mathcal{M}_q b \in L^q_\sigma(\Omega)$ для $b \in \mathcal{D}(\mathcal{M}_q)$, область визначення $\mathcal{D}(\mathcal{M}_q)$ щільна в $L^q_\sigma(\Omega)$ і $\mathcal{M}_q$ – замкнутий оператор при $1 < q < \infty$. Крім того, якщо $\mathcal{M}_q^*$ – оператор, спряжений до $\mathcal{M}_q$, то $\mathcal{M}_q^* = \mathcal{M}_{q'}$, де $q' = q/(q-1)$, $1 < q < \infty$.

Позначимо $H_0(\mathrm{rot};\Omega) = \{f : f \in L^2(\Omega), \mathrm{rot}\, f \in L^2(\Omega), n \times f = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\}$ [5, с. 316], $T(t) \equiv e^{-t\mathcal{M}}$, $(u,v) = \int\limits_\Omega u(x)\cdot v(x)\,dx$ для $u : \Omega \to \mathbb{R}^3$, $v : \Omega \to \mathbb{R}^3$.

**Лема 3.** *Нехай* $\frac{3}{2} \le p < \infty$, $\text{æ} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2p}$. *Тоді існує стала* $c = c_p > 0$ *така, що*

$$\|T(t)\,\mathrm{rot}\, f\|_\infty \le c t^{-\text{æ}} \|f\|_p, \qquad t > 0, \tag{13}$$

*для всіх* $f \in H_0(\mathrm{rot};\Omega) \cap L^p$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\psi \in C^\infty_{0,\sigma}(\Omega)$ і числа $q$, $r$ такі, що $1 < q \le r \le 3$. Тоді маємо

$$|(T(t)\,\mathrm{rot}\, f, \psi)| = |(f, \mathrm{rot}\, T(t)\psi)| \le \|f\|_{r'} \|\mathrm{rot}\, T(t)\psi\|_r, \tag{14}$$

де $r' = r/(r-1)$. Використавши оцінку (12), із (14) отримаємо

$$|(T(t)\,\mathrm{rot}\, f, \psi)| \le c t^{-\gamma} \|f\|_{r'} \|\psi\|_q, \tag{15}$$

де $\gamma = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}$. Оскільки $L^q_\sigma(\Omega)^* = L^{q'}_\sigma(\Omega)$ [8, теорема 1.6], то з (15) випливає оцінка

$$\|T(t)\,\mathrm{rot}\, f\|_{q'} \le c t^{-\gamma} \|f\|_{r'}. \tag{16}$$

Використовуючи (11), (16), маємо

$$\|T(t)\,\mathrm{rot}\, f\|_\infty = \left\|T\left(\frac{t}{2}\right) T\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{rot}\, f\right\|_\infty \le c t^{-3/2q'} \left\|T\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{rot}\, f\right\|_{q'} \le$$

$$\le c t^{-3/2r' - 1/2} \|f\|_{r'}. \tag{17}$$

Поклавши у (17) $r' = p$, одержуємо оцінку (13). ♦

Розглянемо задачу

$$\rho u'' + Au = 0 \qquad \text{в} \qquad L^\infty(\mathbb{R}_+; H^{-1}(\Omega)), \tag{18}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \quad u_0 \in \dot{H}^1_0(\Omega), \quad u_1 \in L^2(\Omega), \tag{19}$$

де $Au = -\mu\Delta u - (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\, u$. Нехай $u(t)$ – розв'язок задачі (18), (19). Означимо енергію $E(u,D)(t)$ в області $D \subset \Omega$ таким чином:

$$E(u,D)(t) = \int\limits_D \left\{(\lambda + \mu)|\mathrm{div}\, u(t)|^2 + \mu \sum_{j=1}^3 |\mathrm{grad}\, u_j(t)|^2 + \rho |u'(t)|^2\right\} dx.$$

Нехай $\Omega_R = \{x \in \Omega : |x| < R\}$, $R > 0$. Для локальної енергії справджується таке твердження [14, теорема 4.1].

**Лема 4.** *Припустимо, що область* $G$ *є зірковою. Тоді для кожного* $R>0$ *існують сталі* $\alpha=\alpha(\Omega,R)$ *і* $c=c(\Omega,R)$ *такі, що якщо* $\operatorname{supp} u_0 \subset \Omega_R$, $\operatorname{supp} u_1 \subset \Omega_R$, *то для розв'язку* $u$ *задачі* (18), (19) *справджується оцінка*

$$E(u,\Omega_R)(t) \le c e^{-\alpha t} E(u,\Omega)(0). \tag{20}$$

Через $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $1<p<\infty$, $s\in\mathbb{R}$, $s>-n/p'$, $1/p+1/p'=1$, позначимо поповнення простору $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ за нормою $\|v\|_{\dot{H}^{s,p}} = \left\|F^{-1}(|\xi|^s F(v))\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Перетворення Фур'є функції $v$ будемо позначати через $F(v)$, а обернене перетворення – через $F^{-1}(v)$. Розглянемо задачу (18), (19) в $\mathbb{R}^n$.

**Лема 5.** *Нехай* $2<q<\infty$, $1/q+1/p=1$, $s>1-n/p$, $\sigma=(n-1)/2-(n+1)/q$, $n\ge 2$. *Тоді для розв'язку* $u(t)$ *задачі Коші* (18), (19) *виконується оцінка*

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{s,q}} + \|u'(t)\|_{\dot{H}^{s-1,q}} \le c|t|^{-\beta}\left(\|u_0\|_{\dot{H}^{s+\sigma+1,p}} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s+\sigma,p}}\right), \tag{21}$$

*де* $\beta=(n-1)(1/2-1/q)$ *і стала* $c$ *не залежить від* $u$.

Д о в е д е н н я. З огляду на розклад Гельмгольца (див. [6, теорема III.1.2]) достатньо довести оцінку (21) для хвильового рівняння. Із [9, твердження 2.3] випливає оцінка

$$\left\|F^{-1}\left[\frac{\exp(it|\xi|)}{|\xi|}F(\psi)(\xi)\right]\right\|_q \le c|t|^{-\beta}\|\psi\|_{\dot{H}^{\sigma,p}}. \tag{22}$$

Використовуючи зображення $Fu(t)=\cos(t|\xi|)Fu_0+\dfrac{\sin(t|\xi|)}{|\xi|}Fu_1$ і (22), отримуємо оцінку (21) для розв'язків хвильового рівняння, а отже, і для розв'язків задачі (18), (19). ♦

**Наслідок 1.** *Нехай виконуються умови леми* 5 *і число* $q$ *таке, що* $2<q\le q_0$, $q_0=2(n+1)/(n-1)$. *Тоді для розв'язку* $u(t)$ *задачі Коші* (18), (19) *справджується оцінка*

$$\|u(t)\|_{\dot{H}^{s,q}} + \|u'(t)\|_{\dot{H}^{s-1,q}} \le ct^{-\beta}\left(\|u_0\|_{\dot{H}^{s+1,\tilde{p}}} + \|u_1\|_{\dot{H}^{s,\tilde{p}}}\right), \tag{23}$$

*де* $\tilde{p}=2nq/[(n+1)q+2]$, $\beta=(n-1)(1/2-1/q)$.

Д о в е д е н н я. Використавши вкладення $\dot{H}^{s,\tilde{p}} \subset \dot{H}^{s+\sigma,p}$, $\dot{H}^{s+1,\tilde{p}} \subset \dot{H}^{s+\sigma+1,p}$, із (21) отримаємо (23). ♦

Нехай $s\in\mathbb{R}$ і $1<p<\infty$. Означимо простір $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)=\{f : f\in S'(\mathbb{R}^n)\}$, $\|f\|_{H^{s,p}(\mathbb{R}^n)}=\left\{\left\|F^{-1}\{(1+|\xi|^2)^{s/2}Ff\}\right\|_p<\infty\right\}$. Простори $H^{s,p}(\Omega)$, $\dot{H}^{s,p}(\Omega)$ означимо як звуження просторів $H^{s,p}(\mathbb{R}^n)$, $\dot{H}^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ на $\Omega$ відповідно. Ці простори наділяються нормами

$$\|f\|_{X(\Omega)} = \inf\{\|g\|_{X(\mathbb{R}^n)} : g\in X(\mathbb{R}^n),\ g|_\Omega = f\},$$

де літера $X$ позначає $H^{s,p}$ або $\dot{H}^{s,p}$.

Аналогічно, як у [10], за допомогою методу зрізання гладкими функціями, використовуючи оцінки (20), (21), (23), доводимо наступну лему.

**Лема 6.** *Нехай* $n=3$ *і число* $q$ *таке, що* $2<q\le q_0$, $q_0=2(n+1)/(n-1)$. *Тоді для розв'язку* $u(t)$ *задачі* (18), (19) *в* $\Omega$ *справджується оцінка*

$$\|u(t)\|_{L^q(\Omega)} + \|u'(t)\|_{\dot{H}^{-1,q}(\Omega)} \le c(1+t)^{1-\beta-d}\left(\|u_0\|_{\dot{H}^{2+\mu,\bar{p}}(\Omega)} + \|u_1\|_{\dot{H}^{1+\mu,\bar{p}}(\Omega)}\right), \tag{24}$$

*де* $\mu = \dfrac{n-1}{2} - \dfrac{n+1}{r}$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{r} = 1$, $r_0 \le r < \infty$, $r_0 = \dfrac{2n}{n-2}$, $\beta = (n-1)\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{q}\right)$, $d = (n-1)(1/2 - 1/r)$.

**Наслідок 2.** *Нехай виконуються припущення леми* 6. *Тоді для розв'язку* $u(t)$ *задачі* (18), (19) *справджується оцінка*

$$\|u(t)\|_{\dot H^{\alpha,\ell}(\Omega)} + \|u'(t)\|_{\dot H^{\alpha-1,\ell}(\Omega)} \le c(1+t)^{-\gamma}\left(\|u_0\|_{H^{2,\eta}(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{1,\eta}(\Omega)}\right), \quad (25)$$

*де* $\alpha = \dfrac{\mu}{1+\mu}$, $\dfrac{1}{\ell} = \dfrac{1}{1+\mu}\left(\dfrac{1}{q} + \dfrac{\mu}{2}\right)$, $\mu = \dfrac{n-1}{2} - \dfrac{n+1}{r}$, $r_0 \le r < \infty$, $r_0 = \dfrac{2n}{n-2}$, $1/\eta = 1/2 + 1(n+1)$, $\gamma = (\beta + d - 1)/(1+\mu)$. *Тут числа* $\beta$ *і* $d$ *такі ж самі, як у лемі* 6, *а* $q$, $r$ *– довільні числа з півінтервалів* $(2, q_0]$ *і* $[r_0, \infty)$ *відповідно.*

Д о в е д е н н я. Із енергетичної рівності для задачі (18), (19) випливає

$$\|u(t)\|_{\dot H^{1,2}(\Omega)} + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)} \le c\left(\|u_0\|_{H^{1,2}(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}\right). \quad (26)$$

Застосовуючи комплексний метод інтерполяції [1, теорема 6.4.5], із (24) і (26) отримуємо (25). ♦

**Лема 7.** *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Тоді для всіх вектор-функцій* $w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *таких, що* $w \in H^2(\Omega)$, $\operatorname{div} w = 0$ *в* $\Omega$, $n \cdot w = 0$ *і* $n \times \operatorname{rot} w = 0$ *на* $\Gamma$, *справджуються оцінки*

$$\|w\|_{1,6} \le c\left(\|\operatorname{rot}\operatorname{rot} w\|_2 + \|\operatorname{rot} w\|_2\right), \quad (27)$$

$$\|\nabla \operatorname{rot} w\|_2 \le c\left(\|\operatorname{rot}\operatorname{rot} w\|_2 + \|\operatorname{rot} w\|_2\right). \quad (28)$$

Д о в е д е н н я. Покладемо $u = \operatorname{rot} w$. Тоді для всіх $\psi \in H^1(\Omega)$, $n \times \psi = 0$ на $\Gamma$ виконується тотожність

$$(\nabla u, \nabla\psi) = (\operatorname{rot} u, \operatorname{rot}\psi) + (\operatorname{div} u, \operatorname{div}\psi) + \int\limits_\Gamma u \cdot (\psi \cdot \nabla n - \psi \operatorname{div} n)\, dS. \quad (29)$$

Покладемо у (29) $\psi = u$. Тоді за допомогою теореми про сліди отримаємо нерівність $\|u\|_{1,2} \le c\left(\|\operatorname{rot} u\|_2 + \|u\|_2\right)$, звідки випливає (28) і з огляду на вкладення $W^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ маємо

$$\|\operatorname{rot} w\|_6 \le c\left(\|\operatorname{rot}\operatorname{rot} w\|_2 + \|\operatorname{rot} w\|_2\right). \quad (30)$$

Із [11, теорема 3.2, формула (3.5)] випливає нерівність

$$\|\nabla w\|_6 + \|\nabla w\|_2 \le c\left(\|\operatorname{rot} w\|_6 + \|\operatorname{rot} w\|_2\right). \quad (31)$$

Підставивши оцінку (30) в (31), з огляду на вкладення $\dot H^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ отримаємо (27). ♦

**Лема 8.** *Нехай* $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. *Тоді для всіх вектор-функцій* $w : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *таких, що* $w \in H^1(\Omega)$, $\operatorname{div} w = 0$ *в* $\Omega$, $n \cdot w = 0$ *на* $\Gamma$ *справджується оцінка*

$$\|w\|_6 \le c\|\operatorname{rot} w\|_2. \quad (32)$$

Д о в е д е н н я. Із [11, теорема 3.2, формула (3.4)] випливає нерівність $\|\nabla w\|_2 \le c\|\operatorname{rot} w\|_2$. Звідси на підставі вкладення $\dot H^{1,2}(\Omega) \subset L^6(\Omega)$ отримуємо оцінку (32). ♦

**Оцінка розв'язків.**

Д о в е д е н н я **теореми 1.** Помноживши рівняння (1) скалярно в $L^2(\Omega)$ на $b(t)$, отримаємо

$$\frac{d}{dt}\|b(t)\|_2^2 + c\|\operatorname{rot} b(t)\|_2^2 \le c\|u'(t)\|_3 \|b(t)\|_6 \|\operatorname{rot} b(t)\|_2 . \qquad (33)$$

Звідси, використавши (32) для $b(t)$, вкладення $H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$ для $u'(t)$, а також вибравши початкові дані задачі (1)–(4) достатньо малими, дістанемо

$$\frac{d}{dt}\|b(t)\|_2^2 + c\|\operatorname{rot} b(t)\|_2^2 \le 0 . \qquad (34)$$

Помножимо нерівність (34) на $t$ і проінтегруємо на $[0,t]$. Тоді отримаємо

$$t\|b(t)\|_2^2 + c\int_0^t \tau\|\operatorname{rot} b(\tau)\|_2^2\, d\tau \le \int_0^t \|b(\tau)\|_2^2\, d\tau . \qquad (35)$$

Покажемо, що $b \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Позначимо $f = u' \times b$. Означимо простір $X_\sigma^r(\Omega)$, $1 < r < \infty$, як поповнення множини $\mathcal{W}$ за нормою $\|\operatorname{rot}\varphi\|_r$. Нехай для $f \in L^2(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ функція $w \in X_\sigma^r(\Omega)$ є розв'язком задачі $(\operatorname{rot} w, \operatorname{rot}\varphi) = (f, \operatorname{rot}\varphi)$ $\forall \varphi \in X_\sigma^{r'}(\Omega)$, а функція $g(t)$ є розв'язком задачі $\mathcal{M}g(t) = b(t)$, $\mathcal{M} \equiv \operatorname{rot}\operatorname{rot}$, $g(t) \in X_\sigma^2(\Omega)$, $b(t) \in L_\sigma^2(\Omega) \cap L^{6/5}(\Omega)$. Зазначимо, що з використанням (11) при $r = q = 6/5$ неважко вивести з (1) оцінку $\|b(t)\|_{6/5} \le c\|b_0\|_{6/5} + c(1+t)^{3/4}$. Тоді з огляду на (32) маємо $\|\operatorname{rot} g(t)\|_2 \le$ $\le c\|b(t)\|_{6/5}$. Помноживши скалярно в $L^2(\Omega)$ обидві частини рівняння (1) на $g(t)$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\operatorname{rot} g(t)\|_2^2 + c\|b(t)\|_2^2 = (\operatorname{rot} f, g) = (w, b). \qquad (36)$$

Із [11] маємо $\|\nabla w\|_{6/5} \le c\|\operatorname{rot} w\|_{6/5} \le c\|f\|_{6/5}$, звідки з огляду на вкладення $\dot{H}^{1,r}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $r = 6/5$, отримуємо оцінку

$$\|w(t)\|_2 \le c\|u'(t)\|_3 \|b(t)\|_2 . \qquad (37)$$

Оцінимо праву частину в (36) за допомогою (37) і проінтегруємо на $[0,t]$. Виберемо початкові дані задачі (1)–(4) такими, щоб $\sup\{\|u'(t)\|_3 : t \in \mathbb{R}_+\} <$ $< \varepsilon$, де $\varepsilon$ є достатньо малим. Тоді маємо, що $b \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, і тому з (35) випливає, що $\sqrt{t}\operatorname{rot} b(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Помножимо скалярно в $L^2(\Omega)$ обидві частини рівняння (1) на $\mathcal{M}b$. Тоді, використавши нерівність Гельдера, оцінку (27) при $w = b$, вкладення $W^{1,6}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$, дістанемо

$$\frac{d}{dt}\|\operatorname{rot} b(t)\|_2^2 + c\|\mathcal{M}b(t)\|_2^2 \le$$
$$\le c\|u'(t)\|_{1,2}\left(\|\mathcal{M}b(t)\|_2 + \|\operatorname{rot} b(t)\|_2\right)\|\mathcal{M}b(t)\|_2 . \qquad (38)$$

Помножимо нерівність (38) на $t$ і проінтегруємо на $[0,t]$. Тоді, вибравши початкові дані достатньо малими, отримаємо $\sqrt{t}\,\mathcal{M}b(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$. Отже, з огляду на оцінку (28) маємо

$$b \in L^2(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)), \qquad \sqrt{t}\operatorname{rot} b(t) \in L^2(\mathbb{R}_+; W^{1,2}(\Omega)). \qquad (39)$$

Оскільки $b' \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $\operatorname{rot} b \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, то з (1) аналогічно виводимо, що $\mathcal{M}b \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$.

Встановимо оцінки для розв'язку $u(t)$ рівняння (2). За допомогою принципу Дюамеля і оцінки (25) з (2) отримуємо

$$\|u(t)\|_{\dot H^{\alpha,\ell}(\Omega)} + \|u'(t)\|_{\dot H^{\alpha-1,\ell}(\Omega)} \le c(1+t)^{-\gamma}\left(\|u_0\|_{H^{2,\eta}(\Omega)} + \|u_1\|_{H^{1,\eta}(\Omega)}\right) + \\ + c\int_0^t (1+t-s)^{-\gamma}\,\|\mathrm{rot}\, b\times b\|_{1,\eta}\,ds, \qquad \eta = 4/3. \tag{40}$$

**Лема 9.** *Нехай* $b\in\mathcal{D}(\mathcal{M}_{2,\Omega})$. *Тоді при* $\eta = 4/3$ *справджується оцінка*

$$\|\mathrm{rot}\, b\times b\|_{1,\eta} \le c\left(\|\mathcal{M}b\|_2^2 + \|\mathrm{rot}\, b\|_2^2\right) + c\left(\|\mathcal{M}b\|_2 + \|\mathrm{rot}\, b\|_2\right)\|b\|_2. \tag{41}$$

Д о в е д е н н я. Використавши нерівність Гельдера, оцінки (27), (28), (32), отримаємо (41). ♦

Для інтеграла в правій частині (40), використовуючи (41), (39), (6), маємо співвідношення

$$I(t) \equiv c\int_0^t (1+t-s)^{-\gamma}\,\|\mathrm{rot}\, b\times b\|_{1,\eta}\,ds \le$$

$$\le c\int_0^{t/2} (1+t-s)^{-\gamma}\left(\|\mathcal{M}b\|_2^2 + \|\mathrm{rot}\, b\|_2^2 + \|b\|_2^2\right)ds + \\ + c\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-\gamma}\left(\|\mathcal{M}b\|_2 + \|\mathrm{rot}\, b\|_2\right)ds \le c\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\gamma} + \\ + c\left(\int_{t/2}^{t} (1+t-s)^{-2\gamma}(1+s)^{-1}\,ds\right)^{1/2} \times \\ \times\left(\int_{t/2}^{t} (1+s)\left[\|\mathcal{M}b\|_2^2 + \|\mathrm{rot}\, b\|_2^2\right]ds\right)^{1/2} \le c(1+t)^{-\gamma}. \tag{42}$$

У наслідку 2 позначимо $r = 4/\varepsilon$ і покладемо $q = q_0 = 4$. Тоді з (40) і (42) випливає оцінка (10).

Встановимо оцінку для розв'язку $b(t)$ рівняння (1). За допомогою формули Дюамеля і нерівностей (11), (13) отримуємо

$$\|b(t)\|_\infty \le ct^{-\delta}\,\|b_0\|_{6/5} + J_1(t) + J_2(t), \tag{43}$$

де

$$J_1(t) \equiv c\int_0^{t/2} (t-s)^{-\delta}\,\|u'\times b\|_2\,ds, \qquad J_2(t) \equiv c\int_{t/2}^{t} (t-s)^{-æ}\,\|u'\times b\|_p\,ds,$$

$\delta = 5/4$, а $æ$ і $p$ такі, як в умові леми 3. Для $J_1(t)$ неважко довести оцінку

$$J_1(t) \le ct^{-\delta}\sup\left\{\|u'(t)\|_2 : s\in[0,t]\right\}\sup\left\{(1+s)^{\delta}\,\|b(s)\|_\infty : s\in[0,t]\right\}. \tag{44}$$

Для інтеграла $J_2(t)$ в (43) маємо

$$J_2(t) \le ct^{-\omega}\sup\left\{s^{\nu}\,\|u'(s)\|_p : s\in[0,t]\right\}\sup\left\{s^{\delta}\,\|b(s)\|_\infty : s\in[0,t]\right\}, \tag{45}$$

де $\omega = æ + \nu + \delta - 1$ (число $\nu > 0$ уточнимо нижче). Для $u'(t)$ використаємо інтерполяційну нерівність (див. [7, наслідок 2])

$$\|u'(t)\|_{L^p(\Omega)} \le c\,\|u'(t)\|^{\theta}_{\dot H_0^1(\Omega)}\,\|u'(t)\|^{1-\theta}_{\dot H^{\alpha-1,\ell}(\Omega)}, \tag{46}$$

де $\ell \le p < 6$, $0 < \theta < 1$, $\theta\left(\frac{3}{p} - \frac{1}{2}\right) + (1-\theta)\left(\alpha - 1 - \frac{3}{\ell} + \frac{3}{p}\right) = 0$, числа $\alpha$, $\ell$ такі ж, як у формулюванні теореми 1, лише $\varepsilon$ вибираємо з інтервалу $(0, 1/4)$. Із (46), (10) отримуємо оцінку

$$\|u'(t)\|_p \le ct^{-(1-\theta)\gamma} \sup\{\|u'(s)\|^{\theta}_{\dot{H}^1_0(\Omega)} : s \in \mathbb{R}_+\}. \tag{47}$$

Покладемо $\nu = (1-\theta)\gamma$. Умова $\omega \ge \delta$ рівносильна умові $\nu \ge (p-3)/2p$. Щоб задовольнити цю умову, виберемо число $p > 3$ достатньо близьким до числа 3. Тоді при $t \ge 1$, вибравши початкові дані (3) достатньо малими, із (43)–(45) виводимо оцінку (9). Оцінка (9) при $t \le 1$ випливає із того, що $\mathcal{M}b \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, $\operatorname{rot} b \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega))$, оцінки (27) і вкладення $W^{1,6}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$. ♦


1. *Берг Й., Лёфстрем Й.* Интерполяционные пространства. Введение. – Москва: Мир, 1980. – 264 с.
   Те саме: *Bergh J., Löfström J.* Interpolation spaces. An introduction. – Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1976. – x + 207 p.
2. *Боценюк О. М.* Про $L^2$-оцінки спадання розв'язків за часом початково-крайової задачі для системи півлінійних рівнянь магнітопружності в зовнішніх областях // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43,** № 3. – С. 51–55.
3. *Боценюк О. М.* Про розв'язність початково-крайової задачі для системи півлінійних рівнянь магнітопружності // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 9. – С. 1181–1186.
   Те саме: *Botsenyuk O. M.* On the solvability of the initial- and boundary-value problem for the system of semilinear equations of magnetoelasticity // Ukr. Math. J. – 1992. – **44,** No. 9. – P. 1080–1084.
4. *Боценюк О. М.* Регулярність розв'язків початково-крайової задачі для системи півлінійних рівнянь магнітопружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1995. – Вип. 38. – С. 62–66.
   Те саме: *Botsenyuk O. M.* Regularity of solutions of an initial/boundary problem for a system of semilinear equations of magnetoelasticity // J. Math. Sci. – 1996. **81**, No. 6. – P. 3053–3057.
5. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 384 с.
   Те саме: *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1972. – xx+387 p.
6. *Galdi G. P.* An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Steady-state problems. – New York–Dordrecht–Heidelberg etc: Springer, 2011. – xiv + 1018 p.
7. *Machihara S., Ozawa T.* Interpolation inequalities in Besov spaces // Proc. Amer. Math. Soc. – 2003. – **131,** No. 5. – P. 1553–1556.
8. *Miyakawa T.* On nonstationary solutions of the Navier–Stokes equations in an exterior domain // Hiroshima Math. J. – 1982. – **12,** No. 1. – P. 115–140.
9. *Mochizuki K., Motai T.* The scattering theory for the nonlinear wave equation with small data // J. Math. Kyoto Univ. – 1985. – **25,** No. 4. – P. 703–715.
10. *Nakao M.* $L^p$ estimates for the linear wave equation and global existence for semilinear wave equations in exterior domains // Math. Ann. – 2001. – **320,** No. 1. – P. 11–31.
11. *Wahl W., von.* Estimating $\nabla u$ by $\operatorname{div} u$ and $\operatorname{curl} u$ // Math. Methods Appl. Sci. – 1992. – **15**, No. 2. – P. 123–143.
12. *Yamaguchi N.* Existence theorem for some initial boundary value problems of nonlinear partial differential equations arising from hydrodynamics // http: // dspace.wul.waseda.ac.jp/dspace/bitstream/2065/5389/3/Honbun-4214.pdf.
13. *Yamaguchi N.* On an existence theorem of global strong solutions to the magneto-hydrodynamic system in three-dimensional exterior domains // Differential and Integral Equations. – 2006. – **19**, No. 8. – P. 919–944.
14. *Yamamoto K.* Exponential energy decay of solutions of elastic wave equations with the Dirichlet condition // Math. Scand. – 1989. – **65.** – P 206–220.

**ОБ ОЦЕНКАХ УБЫВАНИЯ РЕШЕНИЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАГНИТОУПРУГОСТИ ВО ВНЕШНИХ ОБЛАСТЯХ**

*Исследовано поведение при* $t \to \infty$ *сильных решений начально-краевой задачи для системы полулинейных уравнений магнитоупругости во внешних областях. Для векторов магнитной индукции и перемещения получены оценки убывания в* $L^\infty$ *и пространствах Соболева дробного порядка соответственно.*

**ON DECAY ESTIMATES OF THE SOLUTIONS OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SYSTEM OF SEMILINEAR EQUATIONS OF MAGNETOELASTICITY IN EXTERIOR DOMAINS**

*The behavior of the strong solutions to the initial-boundary value problem for the system of semilinear equations of magnetoelasticity in exterior domains is investigated at* $t \to \infty$. *For vectors of magnetic induction and displacement, decay estimates are obtained in* $L^\infty$ *and in fractional-order Sobolev spaces, respectively.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
20.05.13