УДК 519.46: 517.944

В. І. Федорчук

ПРО ІНВАРІАНТНІ РОЗВ'ЯЗКИ ДЕЯКИХ П'ЯТИВИМІРНИХ РІВНЯНЬ Д'АЛАМБЕРА

З використанням інваріантів неспряжених підгруп групи Пуанкаре $P(1,4)$ (спряження розглядається стосовно групи $P(1,4)$) побудовано анзаци, які редукують деякі лінійні і нелінійні п'ятивимірні рівняння Д'Аламбера до звичайних диференціальних рівнянь. На основі розв'язків редукованих рівнянь побудовано інваріантні розв'язки досліджуваних п'ятивимірних рівнянь Д'Аламбера.

Вступ. При розв'язуванні багатьох задач диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, теоретичної і математичної фізики у просторах різних вимірностей часто використовують лінійні та нелінійні рівняння Клейна – Гордона, рівняння sine-Gordon, рівняння sinh-Gordon, рівняння Ліувілля тощо.

Лінійні та нелінійні рівняння Клейна – Гордона в просторах різних вимірностей використовують при побудові та вивченні моделей теорії поля.

Багато різних застосувань рівняння Клейна – Гордона в п'ятивимірній теорії поля можна знайти в монографії [7]. У п'ятивимірному просторі Мінковського $M(1,4)$ лінійні рівняння Клейна – Гордона виникають в теорії поля з фундаментальною довжиною [5].

У роботі [22] побудовано і проаналізовано трансляційно інваріантні та сферично симетричні аналітичні розв'язки нелінійних багатовимірних рівнянь Клейна – Гордона з поліноміальними нелінійностями.

Деякі інші моделі теорії поля, пов'язані з нелінійними багатовимірними рівняннями Клейна – Гордона, описано у роботах [20, 21].

Рівняння sine-Gordon у просторах різних вимірностей широко використовуються у фізиці і математиці. Двовимірне рівняння sine-Gordon використовується, зокрема, при описі: поширення дислокацій у кристалах, руху стінок Блоха в магнітних кристалах, поверхонь з постійною від'ємною кривиною, в унітарній теорії елементарних частинок, моделі Тіррінга у класичній і квантовій теорії поля тощо (див. [1, 4, 11, 25, 29, 34] і цитовану там літературу).

У просторах вищих вимірностей рівняння sine-Gordon також має застосування в фізиці і ретельно вивчалося [10, 12, 26, 35].

Для двовимірних рівнянь sine-Gordon добре відомі солітонні розв'язки [6].

Багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівняння sine-Gordon у просторах різних вимірностей побудовано у роботах [14, 17–20].

Рівняння sinh-Gordon у просторах різних вимірностей широко використовують у фізиці і математиці. Це рівняння виникає, зокрема, при розгляді деяких задач теорії поля [27].

Аналіз і фізична інтерпретація розв'язків двовимірних рівнянь sinh-Gordon наведено в [32].

У роботах [16, 18] побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків для рівняння sinh-Gordon у просторах різних вимірностей.

У роботі [33] автори будують і досліджують сингулярні розв'язки суттєво нелінійних рівнянь Ліувілля і sinh-Gordon. Автори також пропонують фізичну інтерпретацію сингулярних розв'язків.

Рівняння Ліувілля виникає у задачах диференціальної геометрії, теорії нелінійних хвиль, а також у квантовій теорії поля [3].

У двовимірному випадку загальний розв'язок рівняння Ліувілля побудував у 1853 р. сам Ліувілль.

У [17, 18] проведено симетрійну редукцію та побудовано деякі точні розв'язки для тривимірного рівняння Ліувілля.

Симетрійна редукція рівняння Ліувілля в просторі Мінковського $\mathbb{R}_{1,n}$ проведена у [2]. У цій же роботі також побудовано деякі точні розв'язки цього рівняння.

Сингулярні розв'язки рівняння Ліувілля побудовано і досліджено у роботах [13, 23, 33].

У цій статті розглядаємо такі п'ятивимірні диференціальні рівняння із частинними похідними:

$$\Box_5 u = \lambda u, \qquad \lambda \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$\Box_5 u = \sin u, \tag{2}$$

$$\Box_5 u = e^u, \tag{3}$$

$$\Box_5 u = \sinh u, \tag{4}$$

де $\Box_5 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}$ – оператор Д'Аламбера у п'ятивимірному просторі Мінковського $M(1,4)$.

Для дослідження цих рівнянь використаємо регулярний метод побудови (часткових) точних розв'язків диференціальних рівнянь, відкритий багато років тому Софусом Лі (див., наприклад, [30, 31]).

Рівняння (1)–(4) є інваріантними відносно узагальненої групи Пуанкаре $P(1,4)$. Група $P(1,4)$ – це група поворотів і зсувів простору $M(1,4)$. Неспряжені підалгебри алгебри Лі групи $P(1,4)$ (спряження розглядалося стосовно групи $P(1,4)$) описано в [8, 9, 15].

У цій роботі з використанням підгрупової структури групи $P(1,4)$ та інваріантів її неспряжених підгруп проведено симетрійну редукцію рівнянь (1)–(4) і побудовано деякі класи їх інваріантних розв'язків. Ці розв'язки наведено у наступних параграфах без обчислюваних деталей.

1. Деякі інваріантні розв'язки лінійного п'ятивимірного рівняння Д'Аламбера. Розглянемо рівняння

$$\Box_5 u = \lambda u, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Нижче наводимо деякі інваріантні розв'язки цього рівняння.

(а). Випадок $\lambda \neq 0$.

1. $$u(x) = c_1 \exp\left(\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\omega\right) + c_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{\lambda}{k}}\,\omega\right),$$

де ω – одновимірні інваріанти неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, k – стала.

Можливі ω і k мають такий вигляд:

$$\omega = x_0, \quad k = 1, \quad \omega = x_2, \quad k = -1, \quad \omega = x_3, \quad k = -1,$$

$$\omega = x_4, \quad k = -1, \quad \omega = x_2 - a\ln(x_0 + x_4), \quad k = -1,$$

$$\omega = x_3 - a\ln(x_0 + x_4), \quad k = -1, \quad \omega = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2, \quad k = -4,$$

$$\omega = (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3, \qquad k = -4\alpha_0^2,$$

$$\omega = \mu\big((x_0 + x_4)^2 - 2x_1\big) + 2x_3, \qquad k = -4(\mu^2 + 1),$$

$$\omega = 2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0 + x_4)^2, \qquad k = -4(\delta^2 + \gamma^2).$$

2. $u(x) = c_1 J_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\,\omega\right) + c_2 Y_0\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\,\omega\right)$,

де J і Y − функції Бесселя першого роду і другого роду відповідно. Можливі інваріанти ω і параметри ε мають вигляд:

$$\omega = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 1, \qquad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = -1,$$

$$\omega = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = -1.$$

3. $u(x) = \dfrac{c_1}{\omega}\sinh\left(\sqrt{\lambda\varepsilon}\,\omega\right) + \dfrac{c_2}{\omega}\cosh\left(\sqrt{\lambda\varepsilon}\,\omega\right)$,

де ω і ε мають такий вигляд:

$$\omega = (x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 1, \qquad \omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = -1.$$

4. $u(x) = \dfrac{c_1}{\omega} J_1\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\,\omega\right) + \dfrac{c_2}{\omega} Y_1\left(\sqrt{-\lambda\varepsilon}\,\omega\right)$,

де ω і ε мають такий вигляд:

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 1,$$

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 1,$$

$$\omega = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = -1.$$

5. $u\,(x) = \dfrac{c_1}{\omega^3}\exp\left(\sqrt{\lambda}\,\omega\right)\left(\sqrt{\lambda} - \lambda\omega\right) + \dfrac{c_2}{\omega^3}\exp\left(-\sqrt{\lambda}\,\omega\right)\left(\lambda\omega + \sqrt{\lambda}\right)$,

де

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}.$$

6. $u(x) = f_1(\omega_2)\sin\left(\sqrt{\lambda}\,\omega_1\right) + f_2(\omega_2)\cos\left(\sqrt{\lambda}\,\omega_1\right)$,

де

$$\omega_1 = x_2, \quad \omega_2 = x_0 + x_4, \qquad \omega_1 = x_3, \quad \omega_2 = x_0 + x_4.$$

7. $u(x) = f_1(\omega_1)\sin\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}\,\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right) + f_2(\omega_1)\cos\left(\dfrac{\sqrt{\lambda}\,\omega_1\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2 + 1}}\right)$,

де

$$\omega_1 = x_0 + x_4, \qquad \omega_2 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2,$$

$$\omega_1 = x_0 + x_4, \qquad \omega_2 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4}.$$

8. $u(x) = f_1(\omega_2) J_0\left(\sqrt{\lambda}\,\omega_1\right) + f_2(\omega_2) Y_0\left(\sqrt{\lambda}\,\omega_1\right)$,

де f_1 і f_2 − довільні гладкі функції; J, Y − функції Бесселя першого та другого роду відповідно; ω_1 і ω_2 − двовимірні інваріанти неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, які є такими:

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \qquad \omega_2 = x_0 + x_4.$$

9. $u(x) = \dfrac{f_1(\omega_1)}{\omega_2}\sinh\left(\sqrt{-\lambda}\,\omega_2\right) + \dfrac{f_2(\omega_1)}{\omega_2}\cosh\left(\sqrt{-\lambda}\,\omega_2\right)$,

де

$$\omega_1 = x_0 + x_4, \qquad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

(б). *Випадок* $\lambda = 0$.

1. $u(x) = c_1\omega + c_2$,

де c_1 і c_2 − довільні сталі, ω − одновимірні інваріанти неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, подані такими формулами:

$$x_0,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_2 - a\ln(x_0 + x_4),\quad x_3 - a\ln(x_0 + x_4),$$

$$2x_2 - (x_0 + x_4)^2,\quad (x_0 + x_4)^2 + 2\alpha_0 x_3,\quad \mu\left((x_0 + x_4)^2 - 2x_1\right) + 2x_3,$$

$$2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0 + x_4)^2.$$

2. $u(x) = c_1\ln(\omega) + c_2$,

де ω − один з одновимірних інваріантів неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, поданих такими формулами:

$$(x_0^2 - x_4^2)^{1/2},\quad (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\quad (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}.$$

3. $u(x) = \dfrac{c_1}{\omega} + c_2$,

де ω − один із інваріантів:

$$(x_0^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2},\quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

4. $u(x) = \dfrac{c_1}{\omega^2} + c_2$,

де ω − один із таких інваріантів:

$$(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_4^2)^{1/2},\quad (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)^{1/2},\quad (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2)^{1/2}.$$

5. $u(x) = \dfrac{c_1}{\omega^3} + c_2$,

де

$$\omega = (x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)^{1/2}.$$

6. $u(x) = \omega_1 f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2)$,

де f_1 і f_2 − довільні гладкі функції; ω_1 і ω_2 − двовимірні інваріанти неспряжених підгруп групи $P(1,4)$, перераховані у наступних формулах:

$$\omega_1 = x_2,\quad \omega_2 = x_0 + x_4,\qquad \omega_1 = x_3,\quad \omega_2 = x_0 + x_4,$$

$$\omega_1 = \frac{x_3}{x_0 + x_4} + x_2,\qquad \omega_2 = x_0 + x_4,$$

$$\omega_1 = x_3 + \frac{x_1}{x_0 + x_4},\qquad \omega_2 = x_0 + x_4.$$

7. $u(x) = \ln(\omega_1) f_1(\omega_2) + f_2(\omega_2)$,

де

$$\omega_1 = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2},\qquad \omega_2 = x_0 + x_4.$$

8. $u(x) = \dfrac{1}{\omega_2} f_1(\omega_1) + f_2(\omega_1)$,

де

$$\omega_1 = x_0 + x_4,\qquad \omega_2 = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}.$$

2. Деякі інваріантні розв'язки п'ятивимірного рівняння sine-Gordon. Розглянемо рівняння

$$\Box_5 u = \sin u$$

і наведемо деякі його інваріантні розв'язки.

1. $$u(x) = 4\arctan(\alpha e^{\varepsilon_0 \omega}) - \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\pi .$$

2. $$u(x) = 2\arccos[\mathrm{dn}(\omega+\alpha, m)] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \quad 0 < m < 1 .$$

3. $$u(x) = 2\arccos\left[\mathrm{cn}\left(\frac{\omega+\alpha}{m}, m\right)\right] + \frac{1}{2}(1+\varepsilon)\pi, \quad 0 < m < 1, \quad \alpha = \mathrm{const} ,$$

де $\mathrm{dn}(\omega+\alpha, m)$ і $\mathrm{cn}\left(\dfrac{\omega+\alpha}{m}, m\right)$ – еліптичні функції Якобі, $\varepsilon_0 = \pm 1$, $\varepsilon = \pm 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$; ω і ε мають такий вигляд:

$$\omega = x_0, \quad \varepsilon = 1, \qquad \omega = x_2, \quad \varepsilon = -1, \qquad \omega = x_3, \quad \varepsilon = -1,$$

$$\omega = x_4, \quad \varepsilon = -1, \qquad \omega = x_2 - a_2 \ln(x_0 + x_4), \quad \varepsilon = -1,$$

$$\omega = x_3 - a \ln(x_0 + x_4), \quad \varepsilon = -1 .$$

4. $$u(x) = 4\arctan\left(\tanh\frac{\omega}{2}\right),$$

де ω має одну з наступних форм:

$$x_2, \quad x_3, \quad x_4, \quad x_2 - a_2\ln(x_0 + x_4), \quad x_3 - a\ln(x_0 + x_4) .$$

Такого вигляду розв'язки для рівняння sine-Gordon у просторах різних вимірів отримано у [14, 17, 20]. Зокрема, розв'язки ***1–3*** з $\omega = x_0$, $\varepsilon = 1$ можна знайти в [18, 20].

3. Деякі інваріантні розв'язки п'ятивимірного рівняння Ліувілля. Розглянемо рівняння

$$\Box_5 u = e^u .$$

Нижче подаємо деякі інваріантні розв'язки для цього рівняння.

1. $$u(x) = \ln\left(\frac{c_1}{2}\left(\tan^2\left(\sqrt{\frac{c_1}{4k}}(\omega + c_2)\right) + 1\right)\right),$$

де

$$\omega = x_0, \quad k = 1, \qquad \omega = x_2, \quad k = -1, \qquad \omega = x_3, \quad k = -1,$$

$$\omega = x_4, \quad k = -1, \qquad \omega = x_2 - a_2\ln(x_0 + x_4), \quad k = -1,$$

$$\omega = x_3 - a_3\ln(x_0 + x_4), \quad k = -1, \qquad \omega = 2x_2 - (x_0 + x_4)^2, \quad k = -4,$$

$$\omega = (x_0 + x_4)^2 + 2a_0 x_3, \qquad k = -4\alpha_0^2, \qquad \alpha_0 < 0,$$

$$\omega = \mu\big((x_0 + x_4)^2 - 2x_1\big) + 2x_3, \qquad k = -4(\mu^2 + 1), \qquad \mu > 0,$$

$$\omega = 2(\delta x_2 - \gamma x_3) - \delta(x_0 + x_4)^2, \qquad k = -4(\delta^2 + \gamma^2), \qquad \gamma > 0 .$$

2. $$u(x) = \ln\left(\frac{\varepsilon(c_1 - 4)}{2\omega^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2\varepsilon}\sqrt{c_1 - 4}(\ln\omega - c_2)\right) + 1\right)\right),$$

де

$$\omega = (x_0^2 - x_4^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = 1, \qquad \omega = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}, \quad \varepsilon = -1,$$

$$\omega = (x_3^2 + x_4^2)^{1/2}, \qquad \varepsilon = -1 .$$

3. $$u(x)=\ln\left(-\frac{1}{2f_1^2(\omega_2)}\left(\tanh^2\left(\frac{f_2(\omega_2)+\omega_1}{2f_1(\omega_2)}\right)-1\right)\right),$$

де

$$\omega_1=x_2,\quad \omega_2=x_0+x_4,\qquad \omega_1=x_3,\quad \omega_2=x_0+x_4.$$

4. $$u(x)=\ln\left(-\frac{f_1(\omega_1)}{2\omega_1^2}\left(\tanh^2\left(\frac{\sqrt{f_1(\omega_1)}\left(f_2(\omega_1)+\omega_2\right)}{2\sqrt{\omega_1^2+1}}\right)-1\right)\right),$$

де

$$\omega_1=x_0+x_4,\qquad \omega_2=\frac{x_3}{x_0+x_4}+x_2,$$

$$\omega_1=x_0+x_4,\qquad \omega_2=x_3+\frac{x_1}{x_0+x_4}.$$

5. $$u(x)=\ln\left(\frac{4-f_1(\omega_2)}{2\omega_1^2}\left(\tan^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{f_1(\omega_2)-4}\left(f_2(\omega_2)-\ln(\omega_1)\right)\right)+1\right)\right),$$

де

$$\omega_1=(x_1^2+x_2^2)^{1/2},\qquad \omega_2=x_0+x_4.$$

4. Деякі інваріантні розв'язки п'ятивимірного рівняння sinh-Gordon. Наступне рівняння, яке розглядаємо, має вигляд

$$\Box_5 u=\sinh u.$$

Нижче перераховані деякі його інваріантні розв'язки.

1. $$u(x)=2\operatorname{arc\,tanh}(\sin\omega).$$

2. $$u(x)=2\operatorname{arc\,tanh}(\operatorname{sn}(z,k)),\quad z=\frac{\sqrt{c+2}}{2}\omega,\quad k^2=\frac{c-2}{c+2},\quad c>2,$$

де $\operatorname{sn}(z,k)$ – еліптична функція Якобі.

3. $$u(x)=4\operatorname{arc\,tanh}(e^{\omega}),\qquad c=2,$$

де $\omega=x_0$.

4. $$u(x)=\operatorname{arc\,cosh}\left(\frac{c}{2}\operatorname{cn}^2(z,k)+\operatorname{sn}^2(z,k)\right),$$

$$z=\frac{\sqrt{c+2}}{2}\omega,\qquad k^2=\frac{c-2}{c+2},\qquad c>2,$$

де ω – одна із наступних функцій:

$$x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_2-a\ln(x_0+x_4),\quad x_3-a\ln(x_0+x_4).$$

У роботах [16, 18] побудовано багатопараметричні сім'ї точних розв'язків рівняння sinh-Gordon у просторах різних вимірностей. Зокрема, розв'язки ***1–3*** з $\omega=x_0$ можна знайти у [18].

Отже, показано, що деякі результати, отримані в [16, 18] з використанням узагальненого підходу Лі, у випадку рівняння sinh-Gordon у $(1+4)$-вимірному просторі Мінковського $M(1,4)$ можуть бути отримані в рамках класичного методу Лі.

Заключні зауваження. Таким чином, наведено набір інваріантних розв'язків рівнянь (1)–(4). Ці розв'язки отримано з використанням стандартного алгоритму Лі та інваріантів неспряжених підалгебр алгебри Лі групи $P(1,4)$. Деякі з побудованих розв'язків можуть бути цікавими при побудові п'ятивимірних релятивістських моделей. З приводу точних розв'язків рівнянь Максвелла і рівнянь аксионної електродинаміки див. [24] і [28].

1. *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – Москва: Мир, 1987. – 480 с.
   Те саме: *Ablowitz M. J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. – Philadelphia: SIAM, 1981. – 425 p. – SIAM: Studies in Appl. Math. – Vol. 4.
2. *Баранник А. Ф.* Про редукцію рівняння Ліувілля у просторі Мінковського $R_{1,n}$ // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1990. – № 7. – С. 3–6.
3. *Барбашов Б. М., Нестеренко В. В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. – Москва: Энергоатомиздат, 1987. – 176 с.
   Те саме: *Barbashov B. M., Nesterenko V. V.* Introduction to the relativistic string theory. – Singapore: World Sci., 1990. – 249 p.
4. *Бхатнагар П. Л.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах. – Москва: Мир, 1983. – 136 с.
   Те саме: *Bhatnagar P. L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems. – Oxford: Clarendon Press, 1979. – xii + 142 p.
5. *Кадышевский В. Г.* Новый подход к теории электромагнитных взаимодействий // Физика элементарных частиц и атомного ядра. – 1980. – **11**, № 1. – С. 5–39.
6. *Раджараман Р.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. – Москва: Мир, 1985. – 414 с.
   Те саме: *Rajaraman R.* Solitons and instantons: An introduction to solitons and instantons in quantum field theory. – Amsterdam – New York: North-Holland, 1982. – 409 p.
7. *Румер Ю. Б.* Исследования по 5-оптике. – Москва: Гостехтеоретиздат, 1956. – 152 с.
8. *Федорчук В. М.* Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1981. – **33**, № 5. – С. 696–700.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Nonsplit subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ // Ukr. Math. J. – 1981. – **33**, No. 5. – P. 535–538.
9. *Федорчук В. М.* Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$ // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 6. – С. 717–722.
   Те саме: *Fedorchuk V. M.* Splitting subalgebras of the Lie algebra of the generalized Poincaré group $P(1,4)$ // Ukr. Math. J. – 1979. – **31**, No. 6. – P. 554–558.
10. *Anderson R. L., Barut A. O., Rączka R.* Bäcklund transformations and new solutions of nonlinear wave equations in four-dimensional space-time // Lett. Math. Phys. – 1979. – **3**, No. 5. – P. 351–358.
11. *Barone A., Esposito F., Magee C. J., Scott A. C.* Theory and applications of the sine-Gordon equation // La Rivista del Nuovo Cimento. – 1971. – **1**, No. 2. – P. 227–267.
12. *Christiansen P. L., Lomdahl P. S.* Numerical study of 2+1-dimensional sine-Gordon solitons // Physica **D**. – 1981. – **2**, No. 3. – P. 482–494.
13. *Dzhordzhadze G. P., Pogrebkov A. K., Polivanov M. K.* Singular solutions of the equation $\Box\varphi + \frac{m^2}{2}\exp(\varphi) = 0$ and dynamics of singularities // Theor. Math. Phys. – 1979. – **40**, No. 2. – P. 706–715.
14. *Fushchich W. I.* Symmerty in problems of mathematical physics // In: Algebraic-Theoretical Studies in Mathematical Physics (Kyiv, 1981). – Kyiv: Inst. of Math. Acad. of Sci. Ukrainian SSR, 1981. – P. 6–28.
15. *Fushchich W. I., Barannik A. F., Barannik L. F., Fedorchuk V. M.* Continuous subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ // J. Phys. **A**: Math. Gen. – 1985. – **18**, No. 15. – P. 2893–2899.
16. *Fushchich W. I., Seheda Yu. N.* Some exact solutions of the many-dimensional Sine-Gordon equation // Lettere al Nuovo Cimento. – 1984. – **41**, No. 14. – P. 462–464.
17. *Fushchich W. I., Serov N. I.* The symmetry and some exact solutions of the nonlinear many-dimensional Liouville, d'Alembert and eikonal equations // J. Phys. **A**: Math. Gen. – 1983. – **16**, No. 15. – P. 3645–3656.
18. *Fushchich W. I., Shtelen W. M., Serov N. I.* Symmetry analysis and exact solutions of equations of nonlinear mathematical physics. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ., 1993. – 435 p.
19. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Solutions of the multidimensional sine-Gordon equation obtained by symmetry reduction // KINAM Rev. Fís. – 1982. – **4**, No. 3. – P. 333–344.

20. *Grundland A. M., Harnad J., Winternitz P.* Symmetry reduction for nonlinear relativistically invariant equations // J. Math. Phys. – 1984. – **25**, No. 4. – P. 791–806.
21. *Grundland A. M., Tuszyński J. A., Winternitz P.* Applications of the three-dimensional «φ^6»-model to structural phase transitions // Proc. XV-th Int. Colloquium on Group Theoretical Methods in Physics (Philadelphia, PA, 1986). – Teaneck (NJ): World Sci. Publ., 1987. – P. 589–601.
22. *Grundland A. M., Tuszyński J. A., Winternitz P.* Group theory and solutions of classical field theories with polynomial nonlinearities // Found. Phys. – 1993. – **23**, No. 4. – P. 633–665.
23. *Jorjadze G. P., Pogrebkov A. K. Polivanov M. C., Talalov S. V.* Liouville field theory: IST and Poisson bracket structure // J. Phys. **A**: Math. Gen. – 1986. – **19**, No. 1. – P. 121–139.
24. *Lahno H. O., Smalij V. F.* Subgroups of Poincaré group and new exact solutions of Maxwell equations // Proc. of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine. – 2002. – **43**, No. 1. – P. 162–166.
25. *Lamb G. L.* (*Jr.*) Elements of soliton theory. – New York–Chichester–Brisbane–Toronto: John Wiley & Sons, 1980. – 289 p.
26. *Leibbrandt G.* New exact solutions of the classical sine-Gordon equation in 2+1 and 3+1 dimensions // Phys. Rev. Lett. – 1978. – **41**, No. 7. – P. 435–438.
27. *Newell A. C.* The inverse scattering transform // In: Solitons / Eds R. K. Bullough, P. J. Caudrey. – Berlin–Heidelberg: Springer, 1980. – Ser. Topics in Current Physics. – Vol. 17. – P. 177–242.
28. *Nikitin A. G., Kuriksha O.* Invariant solutions for equations of axion electrodynamics // Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. – 2012. – **17**. – P. 4585–4601.
29. *Novikov S. P., Manakov S. V., Pitaevskii L. P., Zakharov V. E.* Theory of solitons: The inverse scattering method. – New York: Consultants Bureau, 1984. – xi+276 p.
30. *Olver P. J.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer-Verlag, 1986. – 513 p.
31. *Ovsiannikov L. V.* Group analysis of differential equations. – New York–London: Acad. Press, 1982. – xvi+416 p.
32. *Pogrebkov A. K., Polivanov M. K.* Interaction of particles and fields in classical theory // Soviet J. Particles and Nuclei. – 1983. – **14**, No. 5. – P. 450–457.
33. *Pogrebkov A. K., Polivanov M. K.* The Liouville and sinh-Gordon equations. Singular solutions, dynamics of singularities and the inverse problem method // Math. Phys. Rev. – 1985. – **5**. – P. 197–271. [Soviet Sci. Rev. Sect. C Math. Phys. Rev., 5, Harwood Academic Publ., Chur, 1985].
34. *Scott A. C., Chu F. Y. F., McLaughlin D. W.* The soliton: a new concept in applied science // Proc. IEEE. – 1973. – **61,** No. 10. – P. 1443–1483.
35. *Whitham G. B.* Comments on some recent multisoliton solutions // J. Phys. **A:** Math. Gen. – 1979. – **12**, No. 1. – L1–L3.

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ ПЯТИМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ Д’АЛАМБЕРА

С использованием инвариантов несопряженных подгрупп группы Пуанкаре $P(1,4)$ (*сопряжение рассматривается относительно группы* $P(1,4)$) *построены анзацы, которые редуцируют некоторые линейные и нелинейные пятимерные уравнения Д’Аламбера к обыкновенным дифференциальным уравнениям. С учетом решения редуцированных уравнений построены инвариантные решения исследуемых пятимерных уравнений Д’Аламбера.*

ON INVARIANT SOLUTIONS OF SOME FIVE-DIMENSIONAL D’ALEMBERT EQUATIONS

Using invariants of nonconjugate subgroups of the Poincaré group $P(1,4)$ (*conjugation is considered with respect to the group* $P(1,4)$), *ansatzes which reduce some linear and nonlinear five-dimensional d’Alembert equations to ordinary differential equations are constructed. Taking into account solutions of the reduced equations, invariant solutions of those five-dimensional d’Alembert equations are found.*

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
03.07.14