

ВАРІАЦІЙНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ТЕРМОПРУЖНОСТІ ТОНКИХ ОБОЛОНОК, ПОДАТЛИВИХ ДО ЗСУВІВ І СТИСНЕННЯ

На основі варіаційної задачі класичної термопружності просторових тіл малої товщини сформульовано відповідну варіаційну задачу нестационарної термопружності оболонок, податливих до зсувів і стиснення. Зменшення розмірності вихідної варіаційної задачі досягнуто використанням часткової дискретизації Гальоркіна і гіпотез Тимошенка – Міндіна про лінійність зміни зміщень та температури за товщиною оболонки. Знайдене формулювання задачі записано у термінах вектора пружних зміщень і поворотів нормалі, температури та її градієнта, визначених на серединній поверхні оболонки. Більш детально проаналізовано випадок квазістатичної задачі, для якої встановлено умови коректності. Подано результати скінченноелементного аналізу задачі термопружності для сталюї пластини при дві термо-силових навантажень.

Вступ. Побудова математичних моделей, що відтворюють термопружну поведінку тонких оболонок є актуальним напрямком сучасних досліджень [8]. Перехід від тривимірної задачі термопружності до адекватної двовимірної задачі є предметом даного дослідження. Для чисельного розв'язування вказаного класу варіаційних задач зазвичай застосовують проєкційно-сіткові методи, засновані на частково дискретних апроксимаціях Гальоркіна. Оскільки практичною реалізацією методу Гальоркіна є метод скінченних елементів, то природним є використання технології d -адаптивності [4, 11]. Можливості d -адаптування для задач теплопровідності у тонкому криволінійному шарі були продемонстровані у [2] і розвинуті у [5]. Мета праці – поширення цієї методики на задачі термопружності тонких оболонок, податливих до зсувів та стиснення.

У **п. 1** сформульовано початково-крайову та відповідну їй варіаційну задачу динамічної термопружності пружного тіла. Далі, у **п. 2** за припущення про малість товщини та відповідного вибору криволінійної ортогональної системи координат сконструйовано такий підпростір допустимих функцій, який дозволяє відокремити незалежну змінну, ортогональну до серединної поверхні. В результаті отримано відповідну частково дискретизовану варіаційну задачу в термінах вектора пружних зміщень і поворотів нормалі, температури та її градієнта, визначених на серединній поверхні оболонки. У **п. 3** розглянуто варіаційну задачу квазістатичної термопружності оболонок, податливих до зсувів і стиснення. Доведення, що така задача успадковує від вихідної задачі коректність формулювання, подано у **п. 4**. На прикладі одновимірної задачі для сталюї пластини у **п. 5** проілюстровано деякі характеристики скінченноелементних апроксимацій.

1. Початково-крайова та варіаційна задачі термопружності. Нехай пружне тіло займає у просторі \mathbb{R}^3 обмежену область D з неперервною за Ліпшицем межею $S = \partial D$. Припускаємо, що на нього діють масові сили $\{F_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$, поверхневі навантаження $\boldsymbol{\sigma} = \{\hat{\sigma}_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ на частині межі $S_\sigma \subset S$, внутрішні джерела тепла $g = g(\mathbf{x}, t)$ і тепловий потік $\hat{q} = \hat{q}(\mathbf{x}, t)$ на частині межі $S_q \subset S$, під впливом яких виникають переміщення $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{x}, t)\}_{i=1}^3$ і зміни температури $\theta(\mathbf{x}, t)$ відносно початкової температури $\theta_0(\mathbf{x})$. Вважаємо, що ці характеристики задовольняють рівняння лінійної термопружності [9, 10]

$$\rho \partial_{tt} U_i - \sigma_{ki,k}(\mathbf{U}, \theta) = \rho F_k, \\ c_\varepsilon \partial_t \theta - \partial_k (\lambda_{ki} \partial_k \theta) + \theta_0 \beta_{ki} E_{ki} (\partial_t \mathbf{U}) = g \quad \text{в} \quad D \times (0, T), \quad (1)$$

де $\{\sigma_{ik}\}_{i,k=1}^3$ – тензор напружень:

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}, \theta) := c_{ijkl} E_{km}(\mathbf{U}) - \beta_{ij} \theta = \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) - \beta_{ij} \theta = \sigma_{ij}^e(\mathbf{U}) + \sigma_{ij}^{\text{temp}}(\theta), \quad (2)$$

а $\{E_{ik}(\mathbf{U})\}_{i,k=1}^3$ – тензор лінійних деформацій:

$$E_{ik}(\mathbf{U}) := \frac{1}{2} (\partial_i U_k + \partial_k U_i). \quad (3)$$

Властивості матеріалу пружного тіла характеризуються густиною маси $\rho = \rho(\mathbf{x})$, коефіцієнтами пружності $\{c_{ijkl}(\mathbf{x})\}_{i,j,k,m=1}^3$, теплопровідності $\{\lambda_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^3$, температурних напружень $\{\beta_{ij}(\mathbf{x})\}_{i,j=1}^3$ (які є симетричними та еліптичними) і, нарешті, коефіцієнтом питомої теплоємності при сталих деформаціях $c_\varepsilon = c_\varepsilon(\mathbf{x})$ (докладніше див. [9]).

Для ізотропного матеріалу коефіцієнти пружності c_{ijkl} повністю визначаються параметрами Ляме λ та μ і записуються так:

$$c_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{km} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jk}),$$

де δ_{ij} – символ Кронекера, а параметри λ і μ виражаються через модуль Юнга E і коефіцієнт Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

а співвідношення Дюгамеля – Неймана (2) набувають вигляду

$$\sigma_{ij}(\mathbf{U}, \theta) := (2\mu + \lambda \delta_{ij}) E_{ij}(\mathbf{U}) - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \theta \delta_{ij}, \quad (4)$$

де α_T – коефіцієнт лінійного температурного розширення.

Доповнимо основні рівняння (1)–(3) початковими умовами

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{U}_0, \quad \partial_t \mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{V}_0, \quad \theta|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в} \quad D, \quad (5)$$

та крайовими умовами вигляду

$$\mathbf{U} = 0 \quad \text{на} \quad S_u \times [0, T], \quad S_u \subset S, \quad \sigma_{ij} n_j = \hat{\sigma}_i \quad \text{на} \quad S_\sigma \times [0, T], \quad S_\sigma = S \setminus S_u, \quad (6)$$

$$\theta = 0 \quad \text{на} \quad S_\theta \times [0, T], \quad -n_i \lambda_{ik} \partial_k \theta = \alpha \theta + \hat{q} \quad \text{на} \quad S_q \times [0, T], \quad S_q = S \setminus S_\theta, \quad (7)$$

де α – відомий коефіцієнт теплообміну.

Будемо використовувати позначення $\mathbf{v}'(t) := \partial_t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{v}''(t) := \partial_{tt} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$.

Простори допустимих переміщень і температур означимо як

$$\mathbf{Y} = \{\mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V} = 0 \quad \text{на} \quad S_u\} \quad \text{і} \quad G = \{\xi \in H^1(D) : \xi = 0 \quad \text{на} \quad S_\theta\}$$

і запишемо варіаційне формулювання початково-крайової задачі термопружності (1)–(5):

$$\text{задано} \quad \mathbf{U}_0 \in \mathbf{Y}, \quad \mathbf{V}_0 \in \mathbf{H} := [L^2(D)]^d, \quad \theta_0 \in Z := L^2(D),$$

$$\text{знайти} \quad \{\mathbf{U}, \theta\} \in L^2(0, T; \mathbf{Y} \times G) \quad \text{такі, що}$$

$$m(\mathbf{U}''(t), \mathbf{V}) + c(\mathbf{U}(t), \mathbf{V}) - b(\theta(t), \mathbf{V}) = \langle \ell_s(t), \mathbf{V} \rangle,$$

$$s(\theta'(t), \xi) + \lambda(\theta(t), \xi) + b(\xi, \mathbf{U}'(t)) = \langle \ell_c(t), \xi \rangle \quad \forall t \in (0, T),$$

$$m(\mathbf{U}'(0) - \mathbf{V}_0, \mathbf{V}) = 0, \quad c(\mathbf{U}(0) - \mathbf{U}_0, \mathbf{V}) = 0 \quad \forall \mathbf{V} \in \mathbf{Y},$$

$$s(\theta(0) - \theta_0, \xi) = 0 \quad \forall \xi \in G, \quad (8)$$

де

$$m(\mathbf{U}, \mathbf{V}) := \iiint_D \rho \mathbf{U} \cdot \mathbf{V} dD, \quad \langle \ell_s, \mathbf{V} \rangle := \iiint_D \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dD + \iint_{S_q} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{V} dS,$$

$$c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) := \iiint_D \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD,$$

$$b(\theta, \mathbf{V}) := \iiint_D \beta \theta : E(\mathbf{V}) dD \quad \forall \mathbf{U}, \mathbf{V} \in \mathbf{Y} \quad \forall \theta \in G,$$

$$s(\theta, \xi) := \iiint_D \theta_0^{-1} c_\varepsilon \theta \xi dD, \quad \lambda(\theta, \xi) := \iiint_D \theta_0^{-1} (\lambda \nabla \theta) \cdot \nabla \xi dD + \iint_{S_q} \alpha \theta \xi dS,$$

$$\langle \ell_c, \xi \rangle := \iiint_D \theta_0^{-1} g \xi dD - \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \bar{q} \xi dS \quad \forall \theta, \xi \in G. \quad (9)$$

2. Припущення малості товщини.

2.1. Вважаємо, що пружне тіло $D \in \mathbb{R}^3$ у криволінійній ортогональній системі координат $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ можна описати таким чином:

$$D := \left\{ \mathbf{r} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3 : \boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2) \in \Omega, \alpha_3 \in \left(-\frac{1}{2}h, +\frac{1}{2}h \right) \right\},$$

де товщина $h = \text{const}$ є малою порівняно з іншими розмірами тіла: $\frac{h}{\text{diam } \Omega} \ll 1$.

Множину $\Omega = \{ \mathbf{r} = (\boldsymbol{\alpha}, 0) \in D \}$ назвемо серединною поверхнею оболонки. Позначимо елементи поверхні Ω та області D оболонки символами $d\Omega$ та dD , відповідно,

$$d\Omega = H_1 H_2 d\boldsymbol{\alpha}, \quad H_i = A_i (1 + \alpha_3 k_i), \quad i = 1, 2,$$

$$dD = H_1 H_2 H_3 d\boldsymbol{\alpha} d\alpha_3 = d\Omega d\alpha_3, \quad H_3 = A_3 \equiv 1,$$

де $A_i = A_i(\boldsymbol{\alpha})$ та $k_i = k_i(\boldsymbol{\alpha})$ – коефіцієнти першої квадратичної форми та головні кривини поверхні Ω [7] (рис. 1).

На основі кінематичних гіпотез Тимошенка – Міндіна [8] напівдискретизуємо вектор переміщень $\mathbf{U} = \{U_i(\mathbf{r})\}_{i=1}^3$ за змінною товщиною зі збереженням повного вектора поворотів нормалі серединної поверхні. Іншими словами, розвинемо його в ряд Маклорена в околі серединної поверхні оболонки зі збереженням лінійних членів:

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}) + O(h^2) \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, \alpha_3) \in D. \quad (10)$$

Тут $\mathbf{u} = \{u_i(\boldsymbol{\alpha})\}_{i=1}^3 = \{U_i(\boldsymbol{\alpha}, 0)\}_{i=1}^3$ – вектор переміщень серединної поверхні, а $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma_i(\boldsymbol{\alpha})\}_{i=1}^3$ – вектор кутів поворотів нормалі до серединної поверхні Ω , компоненти якого визначаються так:

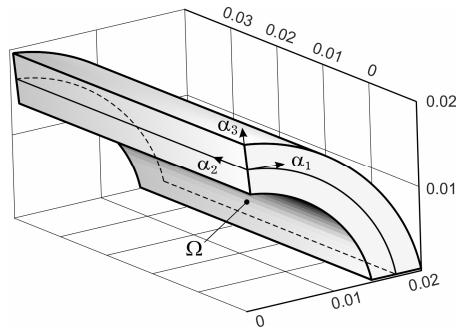


Рис. 1

$$\gamma_i(\boldsymbol{\alpha}) = \partial_3 U_i(\boldsymbol{\alpha}, 0) \equiv \frac{\partial U_i(\boldsymbol{\alpha}, 0)}{\partial \alpha_3}, \quad i = 1, 2, 3.$$

За умови, що $\gamma_3(\boldsymbol{\alpha}) \neq 0$, можна стверджувати, що товщина оболонки може змінюватися під дією силового та теплового навантаження. Характер цих навантажень конкретизуємо нижче.

Аналогічно до переміщень апроксимуємо температуру

$$\theta(\mathbf{r}, t) = \theta_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \theta_2(\boldsymbol{\alpha}, t) + O(h^2) \quad \forall (\boldsymbol{\alpha}, \alpha_3) \in D. \quad (11)$$

Тепер, нехтуючи величинами порядку $O(h^2)$, напружено-деформований стан оболонки D будемо характеризувати векторами розвинень переміщень $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = (\mathbf{u}(\boldsymbol{\alpha}), \boldsymbol{\gamma}(\boldsymbol{\alpha}))$ та температури $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\boldsymbol{\alpha}), \theta_2(\boldsymbol{\alpha}))$.

2.2. Надалі розглядатимемо лінійний тензор деформацій $\mathbf{E} = \{E_{ik}(\mathbf{U})\}_{i,k=1}^3$,

$$\begin{aligned} E_{ii}(\mathbf{U}) &:= H_i^{-1}(\partial_i U_i + H_j^{-1} U_j \partial_j H_i + H_k^{-1} U_k \partial_k H_i), \\ E_{ij}(\mathbf{U}) &:= (H_i H_j)^{-1} [H_j^2 \partial_i (H_j^{-1} U_j) + H_i^2 \partial_j (H_i^{-1} U_i)], \end{aligned} \quad (12)$$

компоненти якого визначаються циклічною перестановкою індексів $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow i$ від 1 до 3. Оскільки застосовуємо апроксимацію (10), то нехтуємо величинами порядку $O(h^2)$. Тоді рівняння (12) у термінах тензорів $\{e_{mn}(\mathbf{s})\}$ та $\{K_{mn}(\mathbf{s})\}$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} E_{ii}(\mathbf{U}) &:= (1 + \alpha_3 k_i)^{-1} [e_{ii}(\mathbf{s}) + \alpha_3 K_{ii}(\mathbf{s})], \quad E_{33} = \gamma_3, \\ E_{ij}(\mathbf{U}) &:= (H_i H_j)^{-1} A_i A_j H_k [e_{ij}(\mathbf{s}) + \alpha_3 K_{ij}(\mathbf{s})], \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} e_{ii}(\mathbf{s}) &= (A_1 A_2)^{-1} \{ (2 - i) [A_2 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 A_1] + \\ &\quad + (1 - i) [A_1 \partial_2 u_2 + u_1 \partial_1 A_2] + k_i u_3 \}, \\ e_{ij}(\mathbf{s}) &= (A_1 A_2)^{-1} \left\{ (1 - i) \frac{\partial_i u_3}{A_i} + (2 - i) \left[A_2^2 \partial_i \frac{u_j}{A_j} + A_1^2 \partial_j \frac{u_i}{A_i} \right] \right\} + \\ &\quad + (2 - j) [k_i u_i - \gamma_i], \end{aligned}$$

$$e_{33}(\mathbf{s}) = \gamma_3, \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 3, \quad i < j, \quad (14)$$

$$K_{ii}(\mathbf{s}) = (A_1 A_2)^{-1} [(1 - i) \gamma_1 \partial_1 A_2 + (2 - i) \gamma_2 \partial_2 A_1] + \partial_i \frac{\gamma_i}{A_i} + k_i \gamma_3,$$

$$\begin{aligned} K_{ij}(\mathbf{s}) &= \frac{3 - j}{A_1 A_2} \left[A_1 k_1 \partial_2 u_1 + A_2 k_2 \partial_1 u_2 - k_1 \partial_1 A_2 u_2 - k_2 \partial_2 A_1 u_1 + \right. \\ &\quad \left. + A_1^2 \partial_2 \frac{\gamma_1}{A_1} + A_2^2 \partial_1 \frac{\gamma_2}{A_2} \right] + \partial_i \frac{\gamma_j}{A_i}, \quad i = 1, 2, \quad j = 2, 3, \quad i < j. \end{aligned} \quad (15)$$

Застосовуючи введені позначення (14), (15), перейдемо від тензора деформацій до матриці-вектора деформацій оболонки $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) = (e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{12}, e_{13}, e_{23}, K_{11}, K_{22}, K_{12}, K_{13}, K_{23})^\top$, компоненти якої пов'язані з вектором переміщень таким чином:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C} \mathbf{s},$$

де

$$\mathbf{C} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \\ \hline \mathbf{C}_{31} & \mathbf{C}_{32} \end{array} \right), \quad \mathbf{C}_{11} = \left(\begin{array}{cc} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \\ \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \\ 0 & 0 \\ \frac{A_1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\cdot}{A_1} \right) & \frac{A_2}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\cdot}{A_2} \right) \end{array} \right),$$

$$\mathbf{C}_{12} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ k_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_{21} = \left(\begin{array}{ccc} -k_1 & & 0 \\ 0 & & -k_2 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \frac{1}{2A_1 A_2} \left(k_1 A_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_2} - k_2 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \right) & & \frac{1}{2A_1 A_2} \left(k_2 A_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - k_1 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \right) \end{array} \right),$$

$$\mathbf{C}_{22} = \left(\begin{array}{cccc} \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} & k_1 \\ 0 & \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} & k_2 \\ 0 & \frac{A_1}{2A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left(\frac{\cdot}{A_1} \right) & \frac{A_2}{2A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left(\frac{\cdot}{A_2} \right) & 0 \end{array} \right),$$

$$\mathbf{C}_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C}_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{A_2} \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \end{pmatrix}.$$

2.3. Вважаємо, що оболонка знаходиться під впливом масових сил $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t)$, поверхневих навантажень $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) = \{\tilde{\sigma}_i(\mathbf{r}, t)\}_{i=1}^3$, внутрішніх розподілених джерел тепла $g(\mathbf{r}, t)$ і поверхневого теплового потоку $\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t) = \{\hat{q}_i(\mathbf{r}, t)\}_{i=1}^3$ так, що

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = \{f_i(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \varphi_i(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^3 = \mathbf{f}_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 \mathbf{f}_2(\boldsymbol{\alpha}, t),$$

$$g(\mathbf{r}, t) = g_1(\boldsymbol{\alpha}, t) + \alpha_3 g_2(\boldsymbol{\alpha}, t).$$

Для спрощення викладок припускаємо, що

$$\begin{aligned}
S_u = S_\theta = \Sigma &:= \left\{ \mathbf{r} \in D : \boldsymbol{\alpha} \in \Gamma = \partial\Omega, |\alpha_3| \leq \frac{1}{2}h \right\}, \\
S_\sigma = S_q = \Omega_+ \cup \Omega_-, \quad \Omega_\pm &:= \left\{ \mathbf{r} \in \bar{V} : \boldsymbol{\alpha} \in \Omega, \alpha_3 = \pm \frac{1}{2}h \right\}, \\
\hat{\mathbf{q}}(\mathbf{r}, t) &= \begin{cases} q^+(\boldsymbol{\alpha}, t), & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_+, \\ q^-(\boldsymbol{\alpha}, t), & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_-, \end{cases} \\
\hat{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{r}, t) &= \begin{cases} \boldsymbol{\sigma}^+(\boldsymbol{\alpha}, t) = \{\sigma_i^+(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^3, & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_+, \\ \boldsymbol{\sigma}^-(\boldsymbol{\alpha}, t) = \{\sigma_i^-(\boldsymbol{\alpha}, t)\}_{i=1}^3, & \boldsymbol{\alpha} \in \Omega_-. \end{cases} \quad (16)
\end{aligned}$$

3. Напівдискретизація варіаційної задачі за товщиною. Введемо підпростори просторів допустимих переміщень та температур

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_h &= \{ \mathbf{V} \in [H^1(D)]^3 : \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \mathbf{v}_1(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \mathbf{v}_2(\boldsymbol{\alpha}); \mathbf{V} = \mathbf{0} \text{ на } S_u \}, \quad Z = L^2(\Omega), \\
G_h &= \{ \xi \in H^1(D) : \xi(\mathbf{r}) = \xi_1(\boldsymbol{\alpha}) + \alpha_3 \xi_2(\boldsymbol{\alpha}); \xi = 0 \text{ на } S_\theta \}, \quad \mathbf{H} = Z^3, \\
W_h &= \{ \mathbf{w} \in [H^1(\Omega)]^6 : \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ на } S_u \}, \\
Q_h &= \{ \boldsymbol{\xi} \in [H^1(\Omega)]^2 : \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \text{ на } S_\theta \}.
\end{aligned}$$

Тепер для всіх $\theta, \xi \in G_h$ означена в (9) білінійна форма $s(\theta, \xi)$ має вигляд

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}(\theta, \xi) &= s(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2, \xi_1 + \alpha_3 \xi_2) = \iiint_D \theta_0^{-1} c_\varepsilon (\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) dD = \\
&= \theta_0^{-1} c_\varepsilon \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} (\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) (1 + \alpha_3 k_1) \times \\
&\quad \times (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 = c_\varepsilon \mathfrak{g}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}), \\
\forall \boldsymbol{\theta} &= (\theta_1, \theta_2), \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \in Q_h,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &= \theta_0^{-1} \sum_{i,j=1}^2 \iint_\Omega \phi^{i+j-2} \theta_i \xi_j A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}, \\
\phi^n(\boldsymbol{\xi}) &:= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n (1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha})) (1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha})) d\alpha_3.
\end{aligned}$$

Аналогічно для білінійної форми $\lambda(\theta, \xi)$ з (9) отримаємо

$$\begin{aligned}
\lambda(\theta, \xi) &= \lambda(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2, \xi_1 + \alpha_3 \xi_2) = \iiint_D \theta_0^{-1} [\lambda \nabla(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2)] \cdot \nabla[\xi_1 + \alpha_3 \xi_2] dD + \\
&\quad + \iint_{S_q} \mathfrak{x}(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2) (\xi_1 + \alpha_3 \xi_2) dS = \\
&= \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \left\{ \theta_0^{-1} [\lambda \nabla(\theta_1 + \alpha_3 \theta_2)] \cdot \nabla[\xi_1 + \alpha_3 \xi_2] \times \right. \\
&\quad \left. \times (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \mathbf{x}^+ \left[\theta_1 + \frac{h}{2} \theta_2 \right] \left[\xi_1 + \frac{h}{2} \xi_2 \right] \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) + \\
& + \mathbf{x}^- \left[\theta_1 - \frac{h}{2} \theta_2 \right] \left[\xi_1 - \frac{h}{2} \xi_2 \right] \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) \} d\alpha_3 = \\
& = \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) + \mathbf{x}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) \quad \forall \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{Q}_h,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &= \theta_0^{-1} \iint_\Omega \lambda \left[\sum_{k=1}^2 \frac{\gamma_k^{i+j-2}}{A_k^2} \frac{\partial \theta_i}{\partial \alpha_k} \frac{\partial \xi_j}{\partial \alpha_k} + \right. \\
& \left. + (ij - i - j + 1) \phi^{i+j-4} \theta_i \xi_j \right] A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}, \\
\gamma_i^n(\boldsymbol{\alpha}) &= \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_3^n \chi_i d\alpha_3, \quad \chi_i(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{(1 + \alpha_3 k_1(\boldsymbol{\alpha}))(1 + \alpha_3 k_2(\boldsymbol{\alpha}))}{(1 + \alpha_3 k_i(\boldsymbol{\alpha}))^2}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}$$

З огляду на припущення про лінійність апроксимації переміщень і температури тут і в наступних означеннях відкидаємо величини порядку $O(h^2)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\xi}) &= \theta_0^{-1} \iint_\Omega \left\{ (\mathbf{x}^+ + \mathbf{x}^-) \theta_1 \xi_1 + (\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-) \frac{h}{2} [(k_1 + k_2) \theta_1 \xi_1 + \right. \\
& \left. + (\theta_1 \xi_2 + \theta_2 \xi_1)] \right\} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}.
\end{aligned}$$

Тут \mathbf{x}^+ , \mathbf{x}^- – коефіцієнти теплообміну на поверхнях Ω_+ , Ω_- відповідно.

Необхідно також з урахуванням (11) перетворити лінійний функціонал $\langle \ell_c, \xi \rangle$, означений у (9):

$$\begin{aligned}
\langle \ell_c, \xi \rangle &= \iiint_D \theta_0^{-1} g \xi dD - \iint_{S_q} \theta_0^{-1} \hat{\mathbf{q}} \xi dS = \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_0^{-1} (g_1 + \alpha_3 g_2) (\xi_1 + \\
& + \alpha_3 \xi_2) (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 - \\
& - \iint_\Omega A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \theta_0^{-1} \left\{ q^+ \left(\xi_1 + \frac{h}{2} \xi_2 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) + \right. \\
& \left. + q^- \left(\xi_1 - \frac{h}{2} \xi_2 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) \right\} d\alpha_3 = \\
& = \mathfrak{g}_\Omega(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}) - \langle \ell_{c_\Omega}, \boldsymbol{\xi} \rangle,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\langle \ell_{c_\Omega}, \xi \rangle &= \theta_0^{-1} \iint_\Omega \left\{ [(q^+ + q^-) + (q^+ - q^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2)] \xi_1 + \right. \\
& \left. + (q^+ - q^-) \frac{h}{2} \xi_2 \right\} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} + O(h^2) \quad \forall \mathbf{g}, \boldsymbol{\xi} \in \mathcal{Q}_h.
\end{aligned}$$

Тут q^+ , q^- – задані теплові потоки на Ω_+ , Ω_- .

Запишемо білінійну форму $m(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ так:

$$\begin{aligned}
m(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &:= m(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2, \mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) = \iiint_D \rho(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot (\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) dD = \\
&= \rho \sum_{i,j=1}^2 \iint_{\Omega} \phi^{i+j-2} \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{v}_j A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = m_{\Omega}(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2),
\end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_h.$$

Тепер напівдискретизуємо функціонал $\langle \ell_s, \mathbf{V} \rangle$:

$$\begin{aligned}
\langle \ell_s, \mathbf{V} \rangle &= \iiint_D \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{V} dD - \iint_{S_{\sigma}} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{V} dS = \iint_{\Omega} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \times \\
&\times \sum_{i=1}^3 \int_{-h/2}^{h/2} \rho[\mathbf{f}_1 + \alpha_3 \mathbf{f}_2] \cdot [\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2] (1 + \alpha_3 k_1) (1 + \alpha_3 k_2) d\alpha_3 - \\
&- \iint_{\Omega_+} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\mathbf{v}_1 + \frac{h}{2} \mathbf{v}_2 \right] \left(1 + \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 + \frac{h}{2} k_2 \right) d\alpha_3 - \\
&- \iint_{\Omega_-} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} \int_{-h/2}^{h/2} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left[\mathbf{v}_1 - \frac{h}{2} \mathbf{v}_2 \right] \left(1 - \frac{h}{2} k_1 \right) \left(1 - \frac{h}{2} k_2 \right) d\alpha_3 = \\
&= m_{\Omega}(\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \ell_{s_{\Omega}}, \mathbf{v} \rangle,
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\langle \ell_{s_{\Omega}}, \mathbf{v} \rangle &= \sum_{i,j=1}^2 \iint_{\Omega} \left\{ \left[(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) + (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2) \right] \mathbf{v}_1 + \right. \\
&\left. + (\widehat{\boldsymbol{\sigma}}^+ + \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^-) \frac{h}{2} \mathbf{v}_2 \right\} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} + O(h^2)
\end{aligned}$$

$$\forall \mathbf{f} = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2), \quad \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in W_h.$$

Перед тим, як інтегрувати білінійну форму $c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ за змінною товщиною, введемо такі інтегральні характеристики тензора напружень [10]:

$$\begin{aligned}
N_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{\text{temp}}] (1 + \alpha_3 k_{3-i}) d\alpha_3 = N_{ij}^e - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T h \theta_1 \delta_{ij} = \\
&= N_{ij}^e + N_{ij}^{\text{temp}}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\
N_{33} &= N_{33}^e + (3\lambda + 2\mu) \alpha_T h \theta_1 = N_{33}^e + N_{33}^{\text{temp}}, \\
M_{ij} &= \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^{\text{temp}}] (1 + \alpha_3 k_{3-i}) \alpha_3 d\alpha_3 = \\
&= M_{ij}^e - (3\lambda + 2\mu) \alpha_T \frac{h^3}{12} \theta_2 \delta_{ij} = M_{ij}^e + M_{ij}^{\text{temp}}. \tag{17}
\end{aligned}$$

Тоді компоненти тензора напружень $\{\sigma_{ik}\}_{i,k=1}^3$ обчислюються таким чином:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{1}{h} \left[N_{ij} + \alpha_3 \frac{12}{h^2} M_{ij} \right], \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3, \\
\sigma_{33} &= \frac{1}{h} \left[N_{33} + \alpha_3 \frac{6\nu}{h^2} (M_{11} + M_{22}) \right].
\end{aligned}$$

Ці формули отримано зі співвідношень (4) та (13) з урахуванням (14), (15) та (17).

Використовуючи з точністю до $O(h^2)$ рівність крутних моментів

$$H = M_{12} = M_{21}$$

та симетричне зусилля Новожилова [6]

$$S = N_{12} - k_2 M_{21} = N_{21} - k_1 M_{12},$$

зберемо означені у (17) внутрішні зусилля і моменти у вектор $\mathbf{\Pi} = \{N_{11}, N_{22}, N_{33}, S, N_{13}, N_{23}, M_{11}, M_{22}, H, M_{13}, M_{23}\}$ та покажемо його зв'язок із вектором деформацій оболонки $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s})$ і вектором температури $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1(\boldsymbol{\alpha}), \theta_2(\boldsymbol{\alpha}))$:

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{s}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) - \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{\Pi}^e(\mathbf{s}) - \mathbf{\Pi}^{\text{temp}}(\boldsymbol{\theta}), \quad (18)$$

де \mathbf{B} – симетрична матриця пружних констант розміру 11×11 , ненульові компоненти якої обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} B^{11} = B^{22} = B^{33} &= \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} h, \\ B^{12} = B^{13} = B^{23} &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} h, \\ B^{44} = B^{55} = B^{66} &= \frac{E}{1 + \nu} h, \quad B^{77} = B^{88} = \frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{h^3}{12}, \\ B^{78} &= \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \frac{h^3}{12}, \quad B^{99} = B^{1010} = B^{1111} = \frac{E}{1 + \nu} \frac{h^3}{12}, \end{aligned} \quad (19)$$

а вектор $\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta})$ означено таким чином:

$$\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) = \{\Phi^i(\boldsymbol{\theta})\}_{i=1}^{11} = \left\{ h\theta_1, h\theta_1, h\theta_1, 0, 0, 0, \frac{h^3}{12}\theta_2, \frac{h^3}{12}\theta_2, 0, 0, 0 \right\}^\top.$$

Перетворення білінійної форми $c(\mathbf{U}, \mathbf{V})$ приводить її до вигляду

$$\begin{aligned} c(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \iiint_D \boldsymbol{\sigma}^e(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD = \iint_\Omega \mathbf{\Pi}^e(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \iint_\Omega \mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{s}, \mathbf{v} \in W_h. \end{aligned}$$

Тепер проінтегруємо білінійну форму $b(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V})$ за змінною товщиною:

$$\begin{aligned} b(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{V}) &= \iiint_D \boldsymbol{\sigma}^{\text{temp}}(\mathbf{U}) : E(\mathbf{V}) dD = \iiint_D \beta \xi E(\mathbf{V}) dD = \\ &= \iint_\Omega \mathbf{\Pi}^{\text{temp}}(\mathbf{s}_1 + \alpha_3 \mathbf{s}_2) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_1 + \alpha_3 \mathbf{v}_2) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = \\ &= \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \iint_\Omega \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) \cdot (\mathbf{C}\mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = b_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \mathcal{Q}_h, \quad \forall \mathbf{v} \in W_h.$$

Підсумовуючи результати стосовно напівдискретизації за змінною товщиною, приходимо до такого варіаційного формулювання задачі термопружності тонких оболонок:

задано $\mathbf{s}_0, \mathbf{v}_0 \in W_h, \boldsymbol{\theta}_0 \in Z^2$;

знайти $\{\mathbf{s}(t), \boldsymbol{\theta}(t)\} \in L^2(0, T; W_h \times Q_h)$ такі, що

$$m_\Omega(\mathbf{s}''(t), \mathbf{v}) + c_\Omega(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) - b_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \mathbf{v}) = m_\Omega(\mathbf{f}(t), \mathbf{v}) - \langle \ell_{s_\Omega}(t), \mathbf{v} \rangle,$$

$$c_\varepsilon \vartheta_\Omega(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) + \alpha_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) + b_\Omega(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{s}'(t)) =$$

$$= \vartheta_\Omega(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\xi}) - \langle \ell_{c_\Omega}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T],$$

$$m_\Omega(\mathbf{s}'(0) - \mathbf{v}_0, \mathbf{v}) = 0, \quad c_\Omega(\mathbf{s}(0) - \mathbf{s}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W_h,$$

$$\vartheta_\Omega(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\xi}) = 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h. \quad (20)$$

4. Квазістатична задача термомпружності оболонок. Як перший крок у дослідженні сформульованої задачі (20) розглянемо практично важливий випадок настільки малих швидкостей переміщень $\mathbf{s}'(t)$, що ними, а також прискореннями $\mathbf{s}''(t)$ можна знехтувати. В результаті задача (20) розбивається на дві послідовно розв'язувані задачі:

1°) задача теплопровідності тонких оболонок:

задано $\boldsymbol{\theta}_0 \in Z^2$;

знайти $\boldsymbol{\theta} \in L^2(0, T; G_h)$ таке, що

$$c_\varepsilon \vartheta_\Omega(\boldsymbol{\theta}'(t), \boldsymbol{\xi}) + \lambda_\Omega(\boldsymbol{\theta}(t), \boldsymbol{\xi}) = \vartheta_\Omega(\mathbf{g}(t), \boldsymbol{\xi}) - \langle \ell_{c_\Omega}(t), \boldsymbol{\xi} \rangle \quad \forall t \in (0, T],$$

$$\vartheta_\Omega(\boldsymbol{\theta}(0) - \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in W_h, \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in Q_h; \quad (21)$$

2°) задача статички тонких оболонок:

задано $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2)^\top \in Z^2, \quad \langle \ell, \mathbf{v} \rangle \in W_h'$;

знайти $\mathbf{s} \in W_h$ таке, що

$$c_\Omega(\mathbf{s}(t), \mathbf{v}) = \langle \ell(t), \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{v} \in W_h \quad \forall \boldsymbol{\theta} \in G_h, \quad (22)$$

де W_h' – простір, спряжений до W_h , а змінна часу t відіграє роль параметра. Тут білінійна форма $c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v})$ та лінійний функціонал визначені у такий спосіб:

$$c_\Omega(\mathbf{s}, \mathbf{v}) = \iint_\Omega \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{B}\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} = \iint_\Omega (\mathbf{C}\mathbf{s}) \cdot (\mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{v}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}, \quad (23)$$

$$\langle \ell(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{v} \rangle = b_\Omega(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{v}) + m_\Omega(\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \langle \ell_{s_\Omega}, \mathbf{v} \rangle. \quad (24)$$

Перепишемо лінійний функціонал (24) у такому вигляді:

$$\langle \ell(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{v} \rangle = \frac{\alpha_T E}{1 - 2\nu} \iint_\Omega (\mathbf{C}\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{\theta}) A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha} + \iint_\Omega \{\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{m} \cdot \mathbf{v}_2\} A_1 A_2 d\boldsymbol{\alpha}$$

$$\forall \mathbf{v} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \in W_h, \quad (25)$$

де

$$\mathbf{P} = \{P_i\}_{i=1}^3, \quad P_i = \left[(\sigma_i^+ + \sigma_i^-) + (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \frac{h}{2} (1 + k_1 + k_2) \right] + \phi^0 f_i,$$

$$\mathbf{m} = \{m_i\}_{i=1}^3, \quad m_i = (\sigma_i^+ + \sigma_i^-) \frac{h}{2} + \phi^1 \varphi_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Оскільки множник $\frac{E}{1+\nu}h$ є додатним, то спочатку оцінимо перші три доданки суми, розміщеної у квадратних дужках правої частини рівності (29):

$$\begin{aligned} & y_1(Ay_1 + Dy_2 + Dy_3) + y_2(Dy_1 + Ay_2 + Dy_3) + y_3(Dy_1 + Dy_2 + Ay_3) = \\ &= \frac{1}{1-2\nu} [(1-\nu)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + 2\nu(y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3)] = \\ &= \frac{1}{1-2\nu} [(1-2\nu)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + \nu(y_1 + y_2 + y_3)^2] \geq \\ &\geq (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2). \end{aligned}$$

Подібно оцінимо наступний доданок:

$$\begin{aligned} C\{x_1(Ax_1 + Dx_2) + x_2(Dx_1 + Ax_2)\} &= \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \{x_1[(1-\nu)x_1 + \nu x_2] + \\ &+ x_2[\nu x_1 + (1-\nu)x_2]\} = \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \{(1-\nu)(x_1^2 + x_2^2) + \\ &+ 2\nu x_1 x_2\} = \frac{h^2}{12(1-2\nu)} \{(1-2\nu)[x_1^2 + x_2^2] + \nu[x_1 + x_2]^2\} \geq \\ &\geq \frac{h^2}{12} (x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

Збираючи одержані оцінки, приходимо до висновку, що

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \mathbf{B} \mathbf{x} &\geq \frac{E}{1+\nu} h \left[y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \frac{h^2}{12} (x_1^2 + x_2^2 + \right. \\ &+ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) \left. \right] \geq \frac{E}{1+\nu} \frac{h^3}{12} [y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \\ &+ z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2] = \\ &= \frac{E}{1+\nu} \frac{h^3}{12} \|\mathbf{x}\|_{\mathbb{R}^{11}}^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{11}. \end{aligned}$$

Таким чином, симетрична матриця \mathbf{B} є додатно визначеною. Решта тверджень є наслідком теореми 1 з [2]. \blacklozenge

4.2. Коректність квазістатичної задачі термопружності. Підсумовуючи результати, отримані у п. 4.1, можна встановити основний результат стосовно варіаційної задачі (22).

Теорема 2 (про коректність варіаційної задачі квазістатичної термопружності). *Нехай дані задачі (20) задовольняють умови регулярності (26) і виконуються умови теореми 1. Тоді варіаційна задача термопружності оболонки (22) має єдиний розв'язок $\mathbf{s} = (u_1, u_2, u_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^\top \in W_h$ такий, що*

$$\|\mathbf{s}\|_{W_h} \leq \omega^{-1} \|\ell(\boldsymbol{\theta})\|_* = \omega^{-1} C \{ \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} + [\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2]^{1/2} \},$$

де стала $C > 0$ залежить лише від даних задачі.

Доведення цього твердження базується на теоремі Лакса – Мільграма – Вишика про коректність абстрактних варіаційних задач [9]. Тому з огляду на доведену теорему 1, яка встановлює неперервність і W_h -еліптичність білінійної форми $c_\Omega(\cdot, \cdot) : W_h \times W_h \rightarrow \mathbb{R}$, залишається показати обмеженість лінійного функціонала (24). Беручи до уваги умови регу-

лярності (26), маємо

$$\begin{aligned}
|\langle \ell(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{s} \rangle| &\leq |b_{\Omega}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{s})| + |m_{\Omega}(\mathbf{f}, \mathbf{s})| + |\langle \ell_{s_{\Omega}}, \mathbf{s} \rangle| \leq C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + \\
&+ \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}} + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}} \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{H}} \leq C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + \\
&+ \{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2\}^{1/2} \{\|\mathbf{v}_1\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{v}_2\|_{\mathbf{H}}^2\}^{1/2} = \\
&= C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} \|\mathbf{v}\|_{W_h} + C_2 \{\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2\}^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{W_h} \leq \\
&\leq \{C_1 \|\boldsymbol{\theta}\|_{Q_h} + C_2 [\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{H}}^2 + \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}}^2]^{1/2}\} \|\mathbf{v}\|_{W_h} = \\
&= \|\ell(\boldsymbol{\theta})\|_* \|\mathbf{v}\|_{W_h} \quad \forall \mathbf{v} \in W_h,
\end{aligned}$$

де сталі $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ залежать лише від даних задачі. Таким чином, задача (22) є коректно сформульованою, іншими словами, має єдиний розв'язок, який неперервно залежить від даних задачі. \blacklozenge

Встановлення коректності варіаційної задачі (22) квазістатичної термопружності для тонких оболонок підтверджує обґрунтованість розвиненої теорії для її подальшого застосування і вказує на можливість використання проєкційно-сіткових методів розв'язування цієї проблеми, а саме методу скінченних елементів.

5. Числовий експеримент. Розглянемо задачу про визначення термопружного стану смуги-пластини довжини $L=1.0$ м, товщини $h=0.05$ м, навантаженої рівномірним тиском $P_3 = -1 \cdot 10^6$ Н/м². Пластина перебуває під дією температурного поля, яке описується усередненими температурними характеристиками $T_1 = e^{-\alpha_1}$ та $T_2 = 0$. Властивості матеріалу оболонки визначають такі параметри: модуль Юнга $E=0.8001 \cdot 10^{11}$ Н/м², коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного температурного розширення $\alpha_T = 0.23 \cdot 10^{-4}$ 1/град. Лівий край пластини $\alpha_1 = 0$ жорстко защемлений, а правий край $\alpha_1 = L$ є вільним.

Оскільки задача є одновимірною (серединна поверхня $\Omega = [0, L]$ визначається тільки змінною α_1), невідомими є компоненти u_1 , u_3 , γ_1 , γ_3 вектора узагальнених переміщень \mathbf{s} , за допомогою яких визначаємо напруження σ_{11} , σ_{13} . Обчислення виконано із застосуванням ізопараметричних апроксимацій методу скінченних елементів і отримані результати проаналізовано на рівномірно згущуваних скінченноелементних поділах поверхні Ω .

У табл. 1 наведено обчислені максимальні та мінімальні швидкості збіжності наближених переміщень і напружень. Значення мінімальних та максимальних порядків p збіжності у вузлах скінченних елементів $x_i \in [0, L]$ розраховували за формулою Ейткена [3, с. 92]

$$p^{(\Delta, \Delta/2, \Delta/4)} = \log_2 \frac{|f^{(\Delta)} - f^{(\Delta/2)}|}{|f^{(\Delta/2)} - f^{(\Delta/4)}|}, \quad (30)$$

де Δ – діаметр скінченноелементного поділу.

За формулою $p_n = \log_2 \frac{\|f^{(\Delta)} - f^{(\Delta/2)}\|}{\|f^{(\Delta/2)} - f^{(\Delta/4)}\|}$ при $\Delta = 1/8, 1/16, 1/32$ визначали значення мінімальних і максимальних швидкостей збіжності таких норм похибок знайдених розв'язків:

$$\|f^{(\Delta)} - f^{(\Delta/2)}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n [f^{(\Delta)}(x_i) - f^{(\Delta/2)}(x_i)]^2}. \quad (31)$$

Максимальні відносні похибки норм розв'язків обчислювали за формулою

$$\max \delta = \max \left(\frac{\|f^{(\Delta)} - f^{(\Delta/2)}\|}{\|f^{(\Delta)}\|} \right) \cdot 100\%.$$

Як бачимо із табл. 1, швидкість збіжності за формулою (30) набуває значень від мінімального 1.05 (для σ_{11}^+) до максимального 7.68 (для γ_3). Тире у таблиці означає відсутність зміни розв'язків за наступного згущення сітки. Серед обчислених швидкостей збіжності норм похибок (31) максимальна швидкість досягається для γ_3 : $p_n = 5.17$. Найбільше значення серед максимальних відносних похибок норм розв'язків маємо також для γ_3 : $\max \delta = 5.73\%$. Значення апроксимації γ_1 не змінювалися в обчислювальних експериментах зі згущенням сітки.

Отже, викладена тут методика дає результати з очікуваними швидкостями збіжності та за досить малих відносних похибок.

Таблиця 1

| Переміщення/ напруження | Швидкості збіжності | | | | | | | | Відносна похибка $\max \delta, \%$ |
|-----------------------------------|--|------|---|------|--|------|-------|------|--|
| | $p \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 16 & 32 \end{pmatrix}$ | | $p \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 16 & 32 & 64 \end{pmatrix}$ | | $p \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 32 & 64 & 128 \end{pmatrix}$ | | p_n | | |
| | min | max | min | max | min | max | min | max | |
| $u_1 \cdot \frac{E}{P_3 L}$ | 1.39 | 3.23 | 2.19 | 2.66 | 3.34 | 3.50 | 1.79 | 2.53 | 0.43 |
| $u_3 \cdot \frac{E}{P_3 h}$ | 3.41 | 3.43 | 3.82 | 3.82 | 3.95 | 3.95 | 3.39 | 3.81 | 0.28 |
| $\gamma_3 \cdot \frac{2E}{P_3 h}$ | 1.06 | 5.70 | 2.43 | 7.68 | 3.79 | 5.15 | 1.50 | 5.17 | 5.73 |
| σ_{11}^+ | 2.30 | 2.30 | 1.05 | 2.64 | – | – | 2.24 | 2.32 | 2.21 |
| σ_{13}^+ | 1.43 | 6.82 | – | 4.99 | – | – | 2.29 | 2.67 | 2.14 |

Висновки. Сформульовано початково-крайові задачі загальної термопружності. Математична модель базується на лінійній теорії оболонок, податливих до зсувів і стиснення. Фізичні співвідношення відображають гіпотезу Дюгамеля – Неймана. Деформаційні співвідношення визначають лінійний розподіл тензора кутів поворотів за товщиною оболонок. Еволюція температурного поля під впливом внутрішніх і поверхневих розподілених джерел тепла відбувається шляхом відокремлення незалежної змінної товщини теплопровідного шару з використанням лінійної апроксимації температури. Сформульовано відповідну варіаційну задачу. Невідомими у варіаційній задачі квазістатичної термопружності оболонок, податливих до зсуву та стиснення, є вектор пружного зміщення точок серединної поверхні і вектор кутів повороту нормалі до серединної поверхні.

Основним результатом цієї роботи є умови коректності варіаційної задачі квазістатичної термопружності оболонок, податливих до зсуву та стиснення, що створює сприятливі умови для вибору чисельних схем розв'язування. Окрім того, перехід до варіаційного формулювання дозволяє встановити умови гладкості сили навантаження, що важливо для інженерної практики.

Проведені дослідження знайдуть свій розвиток у розширенні класу розглянутих у цій праці задач. Саме застосування розробленої методики до задачі динамічної термопружності та дослідження умов коректності відповідної варіаційної задачі, а також дослідження властивостей апроксимацій методу скінченних елементів і співставлення із даними числових експериментів дозволить узагальнити та розширити описаний тут підхід до розв'язування еволюційних задач термопружності.

1. Вагін П. П., Іванова Н. В., Шинкаренко Г. А. Постановка, розв'язуваність та апроксимація варіаційних задач статички зсувних оболонок // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 1999. – **42**, № 2. – С. 53–61.
2. Вагін П. П., Малець Р. Б., Шинкаренко Г. А. Напівдискретизація за товщиною задачі теплопровідності у тонкому криволінійному шарі // *Мат. студії*. – 2006. – **26**, № 1. – С. 71–80.
3. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – Москва: Наука, 1978. – 512 с.
4. Кривс В., Савула Я. Ієрархічні моделі та метод декомпозиції області у D -адаптивних моделях теплопровідності // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика*. – 2000. – Вип. 2. – С. 142–150.
5. Малець Р. Моделювання процесів теплопровідності в тонкому тривимірному шарі // *Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика*. – 2009. – Вип. 15. – С. 240–250.
6. Новожилів В. В. Основы нелинейной теории упругости. – Москва–Ленинград: Гостехиздат, 1948. – 211 с.
7. Подстригач Я. С., Швець Р. Н., Павліна В. С. Квазистатическая задача термодиффузии для деформируемых твердых тел // *Прикл. механика*. – 1971. – **7**, № 12. – С. 11–16.
Te same: Podstrigach Ya. S., Shvets R. N., Pavlina V. S. The quasistatic problem of thermal diffusion for deformed solid bodies // *Int. Appl. Mech.* – 1971. – **7**, No. 12. – P. 1300–1304.
8. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988. – 284 с.
9. Nečas J., Hlaváček I. Mathematical theory of elastic and elasto-plastic bodies: An introduction. – Amsterdam: Elsevier, 1981. – 342 p.
10. Nowacki W. Teoria sprężystości. – Warszawa: PWN, 1970. – 769 s.
11. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. The basis. – Vol. 1. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – 689 p.

ВАРИАЦИОННАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК, ПОДАТЛИВЫХ К СДВИГАМ И СЖАТИЮ

На основе вариационной задачи классической термоупругости пространственных тел малой толщины сформулирована соответствующая вариационная задача нестационарной термоупругости оболочек, податливых к сдвигам и сжатию. Уменьшение размерности исходной вариационной задачи достигнуто использованием частичной дискретизации Галеркина и гипотез Тимошенко – Миндлина о линейности изменения смещений и температуры по толщине оболочки. Найдена формулировка задачи в терминах вектора упругих смещений и поворотов нормали, температуры и ее градиента, определенных на срединной поверхности оболочки. Более подробно проанализирован случай квазистатической задачи, для которой установлены условия корректности. Представлены результаты конечноэлементного анализа задачи термоупругости для стальной пластины под действием термосиловых нагрузок.

VARIATIONAL FORMULATION OF NON-STATIONARY PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR THIN SHELLS COMPLIANT TO SHEARS AND COMPRESSION

On the basis of the classical variational problem of thermoelasticity for three dimensional bodies with small thickness the corresponding variational problem of non-stationary thermoelasticity of shells compliant to shears and compression is formulated. The reduction of the dimensionality of the original problem is achieved by using Galerkin semi-discretization and Timoshenko–Mindlin hypotheses on linearity of variation of displacements and temperature along the shell thickness. The problem is formulated in terms of the vector of elastic displacements and rotations of a normal, temperature and its gradient defined on the median surface of the shell. The case of quasi-static problem for which the conditions of correctness are established is analyzed in more detail. The results of the finite element analysis of thermoelasticity problem for steel plate under the action of thermal and force loads are presented.

¹ Львів. нац. ун-т імені Івана Франка, Львів,

² Політехніка Опольська, Опольце, Польща

Одержано

21.11.13