

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН ЕЛЕМЕНТІВ БУДІВЕЛЬНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПІД ЧАС ПОЖЕЖІ

Запропоновано орієнтовану на метод скінченних елементів математичну модель кількісного опису процесів деформування конструкцій і їх елементів в умовах пожежі. Для визначення напружено-деформованого стану тіла під дією термосилового навантаження використано підхід Лагранжа. З метою апробації запропонованого підходу розв'язано низку тестових задач. Досліджено збіжність розв'язків. Виконано порівняльний аналіз числових результатів, отриманих за різних модельних припущень, з результатами експериментів і відомими аналітичними розв'язками аналогічних задач.

Становлення сучасних програм дослідження вогнетривкості будівель при пожежах відбувається на основі окремих експериментів, проведених за умов реальних повномасштабних пожеж, та численних тестів у спеціальних печах, у яких температуру оточуючого середовища витримують відповідно до введених типових стандартів [7, 10, 12, 18, 20, 25–28]. Однак можливості дослідження поведінки будівель при повномасштабних пожежах є доволі обмеженими і надзвичайно коштовними, а при експериментах у печах, як правило, розглядають лише деякі параметри окремих елементів конструкцій, часто за нереальних розмірів зразків, навантажень і умов руйнування. Такі експерименти зовсім не відображають поведінки будівлі чи конструкції як цілого навіть при невисоких температурах, оскільки не враховують перерозподілу внутрішніх сил у конструкції, який виникає внаслідок взаємодії різних її складових, і який неможливо передбачити чи простежити в експериментах з ізольованими елементами. Тому фактичні напруження в реальних конструкціях під час пожежі часто виявляються істотно меншими, ніж передбачувані на основі часткових експериментів з елементами конструкцій за стандартних сценаріїв пожежі (у зв'язку зі структурною неперервністю і забезпеченням альтернативних шляхів навантаження для окремих елементів).

У зв'язку зі значними затратами при проведенні повномасштабних експериментів і частковим характером результатів стандартних експериментів з окремими конструктивними елементами виникає практична потреба у розробці математичних моделей кількісного опису та оцінки вогнетривкості конструкцій та їх елементів за різних сценаріїв розгортання пожежі і створенні на цій основі відповідного програмного забезпечення. Наявність надійного програмного забезпечення дає змогу проаналізувати поведінку того чи іншого елемента чи цілої будівлі, отримати оцінку вогнетривкості, запасу ресурсу чи рівня напружень в окремих конструктивних елементах під час пожежі та після неї. З іншого боку, таке програмне забезпечення дає можливість визначити «раціональні» значення геометричних параметрів елементів та їхніх властивостей з метою підвищення їх вогнетривкості. При цьому різко зменшується кількість натурних експериментів, оскільки експериментально перевіряють лише раціональні проекти, отримані в результаті комп'ютерної симуляції.

Упродовж останніх років інтенсифікувались дослідження, присвячені побудові математичних моделей прогнозування вогнетривкості елементів будівельних конструкцій, зокрема бетонних і залізобетонних. Деякі автори вважають, що точна модель для бетону за умов підвищених температур повинна враховувати зв'язність процесів теплопровідності, протікання потоків в'язкої рідини, дифузії пари, капілярних ефектів, а також виділення прихованого тепла зміни фаз води. Відповідно запропоновано ряд складних гідротермомеханічних моделей (див., наприклад, [13, 23] та ін.), у яких пере-

міщення, температуру, тиск газу, капілярний тиск розглядають зв'язаними. Однак внаслідок складності таких моделей числових досліджень на їх основі для елементів конкретних будівельних конструкцій в умовах пожежі, як правило, не виконують. В основі простіших моделей, за якими сьогодні реально можна проводити широкомасштабні обчислювальні експерименти і отримувати достатньо адекватні результати, лежать незв'язані рівняння теплопровідності та співвідношення термомеханіки. При цьому визначені на першому етапі розв'язування комплексної задачі нестационарні розподіли температури в структурних елементах конструкцій є вхідними для задачі другого етапу – аналізу напружено-деформованого стану конструкції. На рівні розробки таких моделей існує широка дискусія щодо необхідності та способів врахування тих чи інших чинників впливу (див. наприклад, [9, 11, 14–17, 19, 21, 22, 24, 29]).

Метою цієї роботи є розробка математичної моделі кількісного опису процесів деформування конструкцій і їх елементів при різних сценаріях розгортання пожежі та відповідного програмного забезпечення, що дає змогу проаналізувати поведінку того чи іншого елемента чи цілої будівлі.

Формулювання задачі та методика її розв'язування. Розглянемо тверде деформівне тіло, яке займає область V з неперервною за Ліпшицем поверхнею S . Тіло перебуває під впливом об'ємних f_i^B та поверхневих f_i^S сил, заданих відповідно в області V та на частині S_f поверхні S , переміщень u_i^S , заданих на частині S_u поверхні S ($S = S_f \cup S_u$, $S_f \cap S_u = \emptyset$), а також під дією теплових чинників, зумовлених пожежею. Ставиться задача про визначення напруженого стану тіла, зумовленого цими впливами.

На першому етапі формулюємо нелінійну нестационарну задачу теплопровідності для тіла. При цьому зміну температури зовнішнього середовища (температуру «псевдовогню») задаємо відповідно до часової температурної кривої, яка практично визначає сценарій пожежі [7, 18].

Температурне поле $T(\mathbf{r}, t)$ у тілі описується рівнянням

$$\text{ср} \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad \mathbf{r} \in V, \quad t \in [0, \tau_*], \quad (1)$$

за початкової

$$T(\mathbf{r}, 0) = T_0(\mathbf{r}) \quad (2)$$

та крайової

$$-\lambda \nabla T \mathbf{n} = \beta(T - T_S), \quad \mathbf{r} \in S, \quad (3)$$

умов. Тут \mathbf{r} – радіус-вектор точки; $c = c(\mathbf{r}, T)$ – питома теплоємність; $\rho = \rho(\mathbf{r}, T)$ – густина; $\lambda = \lambda(\mathbf{r}, T)$ – коефіцієнт теплопровідності; ∇ – оператор Гамільтона, $(\nabla \cdot)$ означає операцію дивергенції; \mathbf{n} – вектор зовнішньої одиничної нормалі до поверхні S тіла V ; $\beta = \beta(\mathbf{r}, T)$ – коефіцієнт тепловіддачі; T_S – температура зовнішнього середовища. Як бачимо, теплофізичні характеристики залежать як від температури, так і від точки, що дає можливість розглядати неоднорідні та кусково-однорідні термочутливі тіла.

Оскільки в умовах пожежі тіло перебуває під впливом високих температур, природно припустити, що теплообмін випромінюванням буде істотно впливати на розподіли температури в тілі. Задаючи узагальнений коефіцієнт теплообміну у вигляді

$$\beta'(T, T_S) = \beta(T) + \mu \chi \nu (T^3 + T^2 T_S + T T_S^2 + T_S^3), \quad (4)$$

можна врахувати передачу тепла між полум'ям і поверхнею тіла через випромінювання у межах крайової умови (3). У рівності (4) μ – показник ви-

ду випромінювання; χ – стала Стефана – Больцмана; T та T_S – абсолютні температури відповідно поверхні тіла й зовнішнього середовища (температура «псевдовогню», яка зростає згідно із введеними стандартами сценаріїв пожежі); $\nu = (1/\nu_f + 1/\nu_S - 1)^{-1}$ (ν_f – випромінювальна здатність полум'я, ν_S – поглинальна здатність поверхні тіла) [9].

Визначені нестационарні температурні поля є вхідними для задачі другого етапу – визначення напружено-деформованого стану тіла з використанням підходу Лагранжа. Оскільки під час інтенсивного термосилового навантаження процес деформування може бути нелінійним, відповідно до методики розв'язування нелінійних задач [8] розглянемо рух тіла у фіксованій декартовій системі координат покровоко. Наближений розв'язок базових рівнянь, що описують рівновагу й умови суцільності тіла, побудуємо для дискретних моментів часу $t_{k+1} = t_k + \Delta t_k$, $k = 0, 1, \dots$.

Розглянемо довільний черговий крок навантаження $[t, t + \Delta t]$ (розв'язки для всіх попередніх дискретних моментів часу до t включно відомі). Відповідно до принципу віртуальних переміщень тіло перебуває у стані рівноваги в момент часу $t + \Delta t$, якщо [8]

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R, \quad (5)$$

де ${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij}$, ${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$ – компоненти тензорів напружень Піоли – Кірхгофа 2-го роду та деформацій Гріна – Лагранжа, що відповідають накладеним на конфігурацію тіла в момент часу $t = t + \Delta t$ віртуальним переміщенням δu_i , які є функціями декартових координат ${}^{t+\Delta t} x_j$ матеріальної точки в момент часу $t = t + \Delta t$ (${}^{t+\Delta t} x_j = {}^0 x_j + {}^{t+\Delta t} u_j$),

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^t V + \int_{t+\Delta t S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^t S; \quad (6)$$

${}^0 V$, ${}^{t+\Delta t} V$ – об'єм тіла відповідно в моменти часу $t = 0$ і $t = t + \Delta t$. При цьому деформації визначаються через переміщення співвідношеннями

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial {}^t u_i}{\partial {}^0 x_j} + \frac{\partial {}^t u_j}{\partial {}^0 x_i} + \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0 x_i} \frac{\partial {}^t u_k}{\partial {}^0 x_j} \right). \quad (7)$$

Зауважимо, що зв'язок між компонентами тензорів Піоли – Кірхгофа ${}^t \sigma_{ij}$ і Коші ${}^t \tau_{nm}$ (коли сили віднесені до одиниці площі деформованого тіла) є таким:

$${}^t \sigma_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} \frac{\partial {}^0 x_i}{\partial {}^t x_m} \frac{\partial {}^0 x_j}{\partial {}^t x_n} \cdot {}^t \tau_{nm}, \quad (8)$$

де ${}^0 \rho$, ${}^t \rho$ – густина тіла у двох конфігураціях (при $t = 0$ і в момент часу t).

Усі базові величини у співвідношенні (5) віднесено до однієї і тієї ж (початкової) конфігурації тіла ${}^0 V$. Це дозволяє подати шукані переміщення, деформації і напруження в момент часу $t = t + \Delta t$ через відомі їх значення ${}^t u_i$, ${}^t \varepsilon_{ij}$, ${}^t \sigma_{ij}$ на початку розглядуваного кроку навантаження і відповідні прирости ${}^0 u_i$, ${}^0 \varepsilon_{ij}$, ${}^0 \sigma_{ij}$ на цьому кроці:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}^t \sigma_{ij} + {}^0 \sigma_{ij}, \quad {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} = {}^t \varepsilon_{ij} + {}^0 \varepsilon_{ij}, \quad {}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + {}^0 u_i. \quad (9)$$

З урахуванням тривіального співвідношення ${}_0\varepsilon_{ij} = {}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij} - {}^t{}_0\varepsilon_{ij}$ та подання ${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$ і ${}^t{}_0\varepsilon_{ij}$ через переміщення отримуємо розклад для компонент

$${}_0\varepsilon_{ij} = {}_0e_{ij} + {}_0\eta_{ij}, \quad (10)$$

де лінійний $({}_0e_{ij})$ та нелінійний $({}_0\eta_{ij})$ доданки мають вигляд

$${}_0e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_0 u_i}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial_0 u_j}{\partial^0 x_i} + \frac{\partial_0^t u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial_0 u_k}{\partial^0 x_j} + \frac{\partial_0^t u_k}{\partial^0 x_j} \frac{\partial_0 u_k}{\partial^0 x_i} \right), \quad (11)$$

$${}_0\eta_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial_0 u_k}{\partial^0 x_i} \frac{\partial_0 u_k}{\partial^0 x_j}. \quad (12)$$

Оскільки варіацію беремо відносно конфігурації, що відповідає моменту часу $t = t + \Delta t$, то $\delta_0^t \varepsilon_{ij} = 0$ і $\delta^{t+\Delta t}{}_0 \varepsilon_{ij} = \delta_0 \varepsilon_{ij}$. Вихідне рівняння принципу віртуальних робіт (5) з урахуванням співвідношень (9) та (10) набуває вигляду:

$$\int_{0V} {}_0\sigma_{ij} \delta_0 \varepsilon_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^t\sigma_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^t\sigma_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V. \quad (13)$$

Лінеаризуємо отримане рівняння (13), у лівій частині якого все ще маємо сильно нелінійні вирази. Врахуємо апроксимації для варіації деформацій $(\delta_0 \varepsilon_{ij} = \delta_0 e_{ij})$ і для співвідношень між напруженнями та деформаціями:

$${}_0\sigma_{ij} = {}_0C_{ijrs} ({}_0e_{rs} - {}_0e_{rs}^T), \quad (14)$$

де ${}_0C_{ijrs} = \frac{\partial_0^t \sigma_{ij}}{\partial_0^t \varepsilon_{rs}}$ (процес побудови матриці ${}_0C_{ijrs}$ у випадку неізотермічної термопружнопластичності детально описано у монографії [1]); ${}_0e_{rs}^T$ – прирости температурних деформацій за крок навантаження. Тоді отримаємо

$$\begin{aligned} \int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}^t\sigma_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0V = \\ = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} {}^t\sigma_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0V + \int_{0V} {}_0C_{ijrs} {}_0e_{rs}^T \delta_0 e_{ij} d^0V. \end{aligned} \quad (15)$$

Запишемо це рівняння у зручному матрично-векторному вигляді:

$$\begin{aligned} \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{e}\}^\top [{}_0\mathbf{C}] \{\delta_0 \mathbf{e}\} d^0V + \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{g}\}^\top [{}^t\mathbf{S}] \{\delta_0 \mathbf{g}\} d^0V = \\ = {}^{t+\Delta t}R - \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{e}\}^\top \{{}^t\mathbf{S}\} d^0V + \\ + \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{e}_T\}^\top [{}_0\mathbf{C}] \{\delta_0 \mathbf{e}\} d^0V. \end{aligned} \quad (16)$$

Тут компоненти тензорів деформацій і напружень зібрано у вектори:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}\} &= (e_{11}, e_{22}, e_{33}, 2e_{12}, 2e_{13}, 2e_{32})^\top, \\ \{\mathbf{g}\} &= (\eta_{11}, \eta_{22}, \eta_{33}, 2\eta_{12}, 2\eta_{13}, 2\eta_{32})^\top, \\ \{{}^t\mathbf{S}\} &= ({}^t\sigma_{11}, {}^t\sigma_{22}, {}^t\sigma_{33}, {}^t\sigma_{12}, {}^t\sigma_{13}, {}^t\sigma_{23})^\top. \end{aligned}$$

Після підстановки кінематичних співвідношень (11) і (12) у (16) отримуємо лінеаризоване наближення для рівняння руху:

$$\begin{aligned}
& \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^\top [{}_0 \mathbf{C}] [{}^t_0 \mathbf{B}_L] \{ {}_0 \mathbf{u} \} d^0 V + \\
& \quad + \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}]^\top [{}^t_0 \mathbf{S}] [{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}] \{ {}_0 \mathbf{u} \} d^0 V = \\
& = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^\top \{ {}^t_0 \mathbf{S} \} d^0 V + \\
& \quad + \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top [{}^t_0 \mathbf{B}_L]^\top [{}_0 \mathbf{C}] \{ {}_0 e^T \} d^0 V, \tag{17}
\end{aligned}$$

де $\{ \delta_0 \mathbf{u} \} = ({}_0 u_1, {}_0 u_2, {}_0 u_3)^\top$ – вектор приростів переміщень на розглядуваному кроці навантаження; $[{}^t_0 \mathbf{B}_L]$ і $[{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}]$ – матриці диференціальних операторів кінематичних співвідношень (11) і (12) відповідно,

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{0V} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top \mathbf{f}^B d^0 V + \int_{0S} \{\delta_0 \mathbf{u}\}^\top \mathbf{f}^S d^0 V. \tag{18}$$

Співвідношення (17) принципу віртуальних робіт використаємо для визначення приростів переміщень на розглядуваному кроці навантаження. Зауважимо, що його структура є універсальною і залишається без змін для усіх часткових випадків, зокрема, для осесиметричної чи плоскої задач, а також задач, отриманих з використанням припущень теорії балок і стрижнів. Як наслідок, при числовій реалізації загальна структура побудови розв'язку буде єдина, змінюватимуться лише блоки, які відповідають за обчислення конкретних матрично-векторних характеристик $[{}^t_0 \mathbf{B}_L]$, $[{}^t_0 \mathbf{B}_{NL}]$, $[{}_0 \mathbf{C}]$, $[{}^t_0 \mathbf{S}]$ тощо. Наприклад, у випадку просторово тривимірної задачі

$$\begin{aligned}
[{}^t_0 \mathbf{B}_L] = & \begin{bmatrix} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} \\ 0 & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} \\ \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} + \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_1} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} \\ \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_1}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_2}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_2} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} + \frac{\partial_0^t u_3}{\partial^0 x_3} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$[{}^t_0\mathbf{B}_{NL}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial_0}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}^T,$$

$$[{}^t_0\mathbf{S}] = \begin{bmatrix} {}^t_0\mathbf{S}_* & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t_0\mathbf{S}_* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t_0\mathbf{S}_* \end{bmatrix}, \quad {}^t_0\mathbf{S}_* = \begin{bmatrix} {}^t_0\sigma_{11} & {}^t_0\sigma_{12} & {}^t_0\sigma_{13} \\ {}^t_0\sigma_{21} & {}^t_0\sigma_{22} & {}^t_0\sigma_{23} \\ {}^t_0\sigma_{31} & {}^t_0\sigma_{32} & {}^t_0\sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для двовимірної балки Ейлера – Бернуллі, отриманої шляхом введення гіпотези плоских перерізів [8], згідно з якою переміщення u_1 , u_2 точок балки визначають поздовжні переміщення v_1 та прогини v_2 точок її осі за такими співвідношеннями:

$$u_1({}^0x_1, {}^0x_2) = v_1({}^0x_1) - {}^0x_2 \frac{d^2 v_2({}^0x_1)}{d^0 x_1^2}, \quad u_2({}^0x_1, {}^0x_2) = v_2({}^0x_1)$$

(x_1 – координата вздовж осі балки), а відповідні матричні характеристики мають набагато простіший вигляд:

$$[{}^t_0\mathbf{B}_L] = \left[\frac{d}{d^0 x_1} \left(1 + \frac{d^t u_1}{d^0 x_1} \right) \frac{d^t u_2}{d^0 x_1} \frac{d}{d^0 x_1} - {}^0x_2 \frac{d^2}{d^0 x_1^2} \right],$$

$$[{}^t_0\mathbf{B}_{NL}] = \begin{bmatrix} \frac{d}{d^0 x_1} & 0 \\ 0 & \frac{d}{d^0 x_1} \end{bmatrix},$$

$$[{}^t_0\mathbf{S}] = \{ {}^t_0\mathbf{S} \} = {}^t_0\sigma_{11}.$$

Спростуються й усі інтеграли в рівнянні (17), оскільки

$$\int_{{}^0V} d^0 V = \int_{{}^0A} d^0 A \int d^0 x_1,$$

де 0A – поперечний переріз балки.

Внаслідок стандартної скінченноелементної дискретизації області 0V і відповідної апроксимації шуканих приростів переміщень вузлів кожного з елементів за допомогою функцій форми [8] ключове співвідношення (17) набуває вигляду

$$([\mathbf{K}_L] + [\mathbf{K}_{NL}])\{\mathbf{q}\} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{P}\} - \{\mathbf{F}\}, \quad (19)$$

де $\{\mathbf{q}\}$ – глобальний вектор вузлових невідомих, які дають змогу визначити прирости переміщень тіла. Матрично-векторні характеристики у співвідношенні (19) отримуємо через підсумовування відповідних характеристик окремих скінченних елементів ${}^0V^e$:

$$[\mathbf{K}_L]^e = \int_{{}^0V^e} [\mathbf{N}]^T [{}^t_0\mathbf{B}_L]^T [{}^0\mathbf{C}] [{}^t_0\mathbf{B}_L] [\mathbf{N}] dv,$$

$$[\mathbf{K}_{NL}]^e = \int_{{}^0V^e} [\mathbf{N}]^T [{}^t_0\mathbf{B}_{NL}]^T [{}^t_0\mathbf{S}] [{}^t_0\mathbf{B}_{NL}] [\mathbf{N}] dv,$$

$$\begin{aligned}
{}^{t+\Delta t}\{\mathbf{P}\}^e &= \int_{0S_G^e} [\mathbf{N}]^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^S ds + \int_{0V^e} [\mathbf{N}]^T {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^B dv, \\
\{\mathbf{F}\}^e &= \int_{0V^e} [\mathbf{N}]^T [{}_0^t\mathbf{B}_L](\{{}_0^t\mathbf{S}\} - [{}_0\mathbf{C}]\{{}_0^t\mathbf{e}\}) dv.
\end{aligned} \tag{20}$$

Тут $[\mathbf{N}]$ – матриця функцій форми [8], які забезпечують сумісність деформацій при переході з одного скінченного елемента на інший.

Ітераційний процес побудови розв'язку нелінійної системи рівнянь (19) за методом Ньютона – Рафсона [8] можна подати у вигляді трьох кроків.

Крок 1. На i -й ітерації (на початку обчислень $i = 1$) маємо початкові наближення для переміщень ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i-1)}$, визначені зі скінченноелементного подання ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i-1)} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}\}^{(i-1)}$ ($\{\mathbf{q}\}^{(0)} = {}^t\mathbf{u}$), і деформацій ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}$.

Крок 2. Відповідно до цих наближень обчислюємо ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ і далі – тангенціальну матрицю стану $[{}_0\mathbf{C}]^{(i-1)}$. Якщо на цьому кроці деформування є пружним, деформації ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i-1)}$ дають змогу безпосередньо отримати напруження ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ і матрицю $[{}_0\mathbf{C}]^{(i-1)}$. У випадку пружнопластичного деформування маємо

$${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)} = {}^t\boldsymbol{\sigma} + \int_t^{t+\Delta t} d\boldsymbol{\sigma}.$$

За отриманим в кінці $(i-1)$ -ї ітерації наближенням напружень ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\sigma}^{(i-1)}$ обчислюємо матрицю $[{}_0\mathbf{C}]^{(i-1)}$.

Крок 3. Формуємо матричне рівняння

$$({}^{t+\Delta t}[\mathbf{K}_L] + {}^{t+\Delta t}[\mathbf{K}_{NL}])\{\mathbf{q}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{P}\} - {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{F}\}^{(i-1)},$$

з якого визначаємо чергове наближення приростів вузлових переміщень $\{\mathbf{q}\}^{(i)}$ на розглядуваному кроці навантаження, далі – наближення для переміщень вузлів ${}^{t+\Delta t}\{\mathbf{q}\}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\{\mathbf{q}\}^{(i-1)} + \{\mathbf{q}\}^{(i)}$, переміщення ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i)}$ та деформації ${}^{t+\Delta t}\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$, після чого переходимо на **крок 1** ітераційного процесу (при $i = i + 1$). Продовжуємо обчислення на **кроках 1–3** на кроці навантаження $[t, t + \Delta t]$ до досягнення збіжності.

Проблеми розв'язування нестационарної нелінійної задачі теплопровідності (1)–(3) детально розглянуто у монографії [1].

Числові результати. З метою апробації запропонованої методики розв'язано декілька тестових задач, для яких відомі експериментальні дані чи аналітичні розв'язки.

Розглянемо залізобетонну колону квадратного перерізу $0.2 \times 0.2 \text{ м}^2$ (див. рис. 1), підсилену вісьмома сталевими прутами діаметра 16 мм. Колона по всій довжині перебуває в умовах теплообміну з трьох сторін (четверта сторона теплоізолювана) із зовнішнім середовищем, температура якого в часі відповідно до сценарію пожежі ISO 834 [18] задається співвідношенням

$$T_S = T_0 + 345 \lg(8t + 1). \tag{21}$$

На рис. 2 суцільними лініями (криві 1–5) наведено зміни температури відповідно у точках A_1, A_3, A_4, A_5, A_6 (див. рис. 1), отримані при залежних від температури теплофізичних характеристиках бетону [11]. На цьому ж рисунку штриховими лініями подано розв'язки, отримані при залежних від температури теплофізичних характеристиках [9], а значками різної форми – результати експериментальних вимірювань [14]. Бачимо добре узгодження результатів.

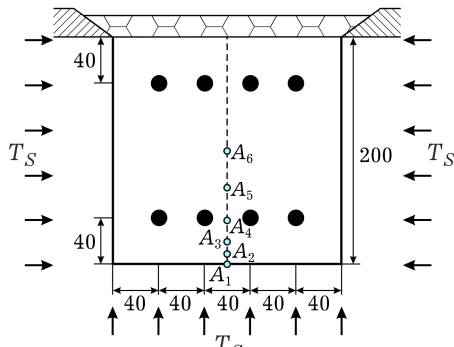


Рис. 1

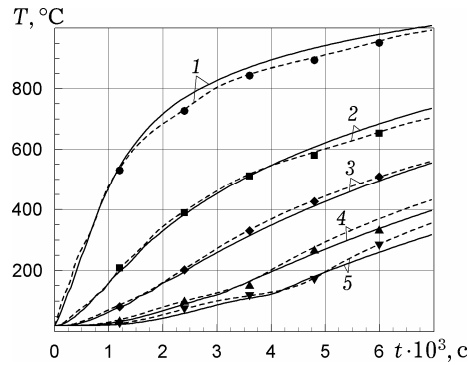


Рис. 2

Зазначимо, що неврахування температурної залежності теплофізичних характеристик та теплообміну випромінюванням призводить до істотного відхилення результатів від фактичних.

Розглянемо задачу про деформування навантаженої П-конструкції зі сталі С30 [2, 3, 5, 6] в умовах пожежі. Розміри конструкції та умови її навантаження зображено на рис. 3. При цьому вважаємо, що із зовнішньої поверхні маємо теплоізоляцію, а через внутрішню поверхню конструкція конвективно обмінюється теплом із зовнішнім середовищем, зміну температури якого задаємо відповідно до типового міжнародного стандарту ISO 834 [18] (див. (21)).

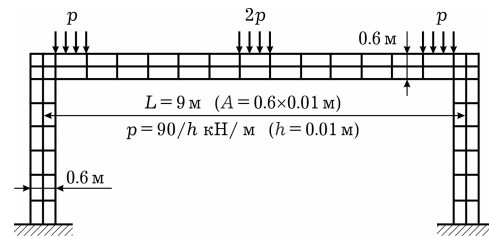


Рис. 3

Визначимо напружено-деформований стан конструкції в межах задачі про плоский напружений стан і на основі моделі балки Ейлера – Бернуллі, використовуючи при цьому аналогічні поділи конструкції на скінченні елементи. Скінченноелементний поділ конструкції на біквадратичні ізопараметричні скінченні елементи [30] подано на рис. 3.

На рис. 4 показано характер деформування навантаженої конструкції у момент часу, коли її нижня поверхня нагрілась до температури 500 °С (крива 1 – недеформована конструкція, крива 2 – деформована конструкція). На рис. 5 наведено розподіли осьового напруження σ_{xx} на верхній і нижній поверхнях поперечини в цей же момент часу (крива 1 відповідає напруженням, обчисленим у рамках задачі про плоский напружений стан, крива 2 – на основі моделі балки). Бачимо достатньо добре узгодження отриманих у межах двох різних моделей результатів. При цьому вздовж поперечини використано лише 13 скінченних елементів (див. рис. 3).

На рис. 4 показано характер деформування навантаженої конструкції у момент часу, коли її нижня поверхня нагрілась до температури 500 °С (крива 1 – недеформована конструкція, крива 2 – деформована конструкція). На рис. 5 наведено розподіли осьового напруження σ_{xx} на верхній і нижній поверхнях поперечини в цей же момент часу (крива 1 відповідає напруженням, обчисленим у рамках задачі про плоский напружений стан, крива 2 – на основі моделі балки). Бачимо достатньо добре узгодження отриманих у межах двох різних моделей результатів. При цьому вздовж поперечини використано лише 13 скінченних елементів (див. рис. 3).

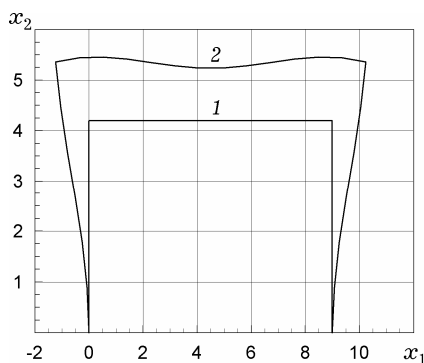


Рис. 4

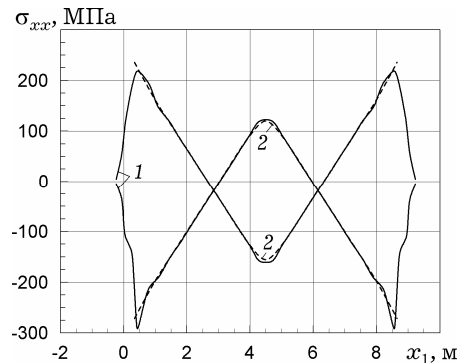


Рис. 5

Зауважимо, що використання тривимірних і двовимірних скінченних елементів для розрахунку тонкостінних конструкцій (у яких один чи два розміри є істотно меншими від третього) можуть приводити до явища «замикання» розв'язків [8], коли не вдається досягти збіжності. Наприклад, у випадку зацемлених на кінцях двотаврових балок, навантажених нормальною силою, скінченноелементний поділ яких зображено на рис. 6, отримати розв'язок за допомогою просторових ізопараметричних елементів не вдалось, тоді як за балочними скінченними елементами отримали швидкозбіжні стійкі розв'язки. Порівняльний аналіз цих розв'язків з аналогічними аналітичними [4] з такими ж розмірами показує їх практичне суміщення (відмінності між аналітичним і чисельним розв'язками не перевищували 1%).

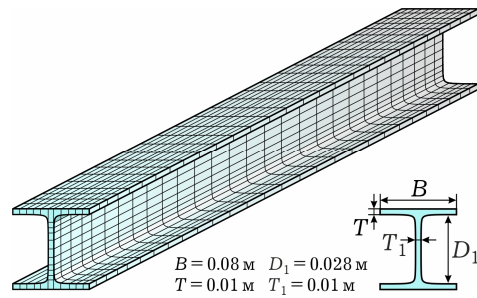


Рис. 6

У випадку розглянутої П-конструкції збіжність розв'язків при двовимірних скінченних елементах є достатньо високою, оскільки ширина стійок і поперечини (див. рис. 3) дорівнює 0.6 м. При розрахунку ж розглядуваної конструкції з тонших складових, наприклад, ширини 0.01 м, стійкої збіжності розв'язків у межах плоскої задачі з використанням двовимірних ізопараметричних скінченних елементів отримати не вдалось.

Аналіз напружено-деформованого стану зацемленої на кінцях нормально навантаженої балки, розміри якої аналогічні до розмірів поперечини розглянутої П-конструкції, показав, що при прогинах балки більших, ніж 0.15 м, необхідно враховувати геометрично нелінійне деформування, що ілюструє рис. 7, на якому наведено залежності максимальних прогинів балки від значення нормально розподіленого навантаження у припущенні геометрично нелінійного (суцільна лінія) і лінійного (штрихова лінія) деформування.

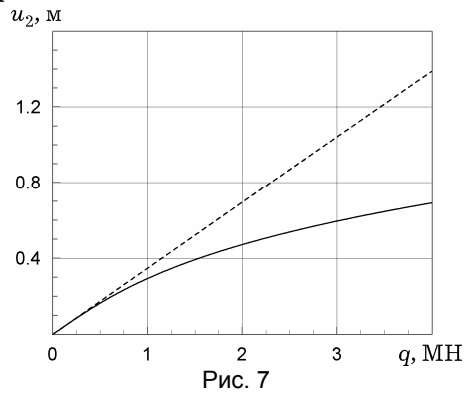


Рис. 7

Для апробації алгоритму розв'язування геометрично нелінійних задач розглянуто «ферму Мізеса» (див. рис. 8) з ${}^0L = 1$ м, ${}^0A = 0.01$ м і модулем Юнга $E = 200$ ГПа, для якої відомий аналітичний розв'язок [8].

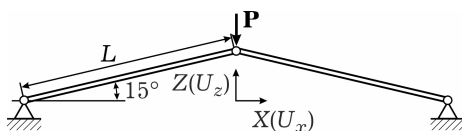


Рис. 8

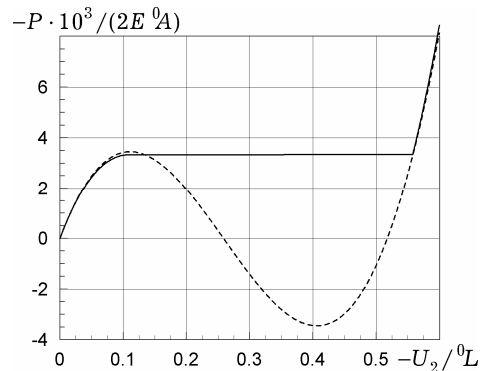


Рис. 9

На рис. 9 суцільною лінією подано залежність діючої сили від відносного переміщення точки її прикладання (аналітичний розв'язок цієї задачі [8])

наведено штриховою лінією). Як бачимо, при значенні переміщення точки прикладання зосередженої сили $U_2/{}^0L = -0.11$ м конструкція починає втрачати стійкість.

Зауважимо, що для отримання відносно точних розв'язків достатньо одного скінченного елемента для одного складового стрижня.

Висновки. Запропоновано загальну методику моделювання термомеханічних процесів в елементах конструкцій в умовах пожежі на основі принципу віртуальних переміщень з використанням методу скінченних елементів. Розроблене програмне забезпечення апробовано на низці тестових задач. Порівняльний аналіз числових результатів, отриманих у рамках різних модельних припущень, з результатами експериментів і відомими аналітичними розв'язками аналогічних задач засвідчив ефективність запропонованої методики та дозволив виявити межі застосовності просторово три- і двовимірних скінченних елементів при визначенні напруженого стану тонкостінних елементів конструкцій. Запропонований підхід у подальшому буде використано для дослідження термомеханічної поведінки багатоповерхових будівельних конструкцій в умовах пожежі.

1. *Гачкевич О. Р., Дробенко Б. Д.* Термомеханіка намагнечуваних електропровідних термочутливих тіл. – Львів: Сполом, 2010. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 4.
2. *Лариков Л. Н., Юрченко Ю. Ф.* Тепловые свойства металлов и сплавов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 440 с.
3. *Махненко В. И.* Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций. – Киев: Наук. думка, 1976. – 320 с.
4. *Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В.* Справочник по сопротивлению материалов. – Киев: Наук. думка, 1988. – 736 с.
5. *Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И. К. Кикоина.* – Москва: Атомиздат, 1976. – 1008 с.
6. *Хисматуллин Е. Р., Королев Е. М., Лившиц В. И., Романова Р. М.* Сосуды и трубопроводы высокого давления: Справочник. – Москва: Машиностроение, 1990. – 384 с.
7. *ASTM E119–14.* Standard test methods for fire tests of building construction and materials. – West Conshohocken, PA: ASTM International, 2014, www.astm.org.
8. *Bathe K.-J.* Finite element procedures. – Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1996. – 1037 p.
9. *Chung K., Park S., Choi S.* Material effect for predicting the fire resistance of concrete-filled square steel tube column under constant axial load // *J. Constr. Steel Res.* – 2008. – **64**, No. 12. – P. 1505–1515.
10. *Dharma R. B., Tan K.-H.* Rotational capacity of steel I-beams under fire conditions. Part I: Experimental study // *Eng. Struct.* – 2007. – **29**, No. 9. – P. 2391–2402.
11. *Di Capua D., Mari A. R.* Nonlinear analysis of reinforced concrete cross-sections exposed to fire // *Fire Safety J.* – 2007. – **42**, No. 2. – P. 139–149.
12. *Ding J., Wang Y. C.* Experimental study of structural fire behaviour of steel beam to concrete filled tubular column assemblies with different types of joints // *Eng. Struct.* – 2007. – **29**, No. 12. – P. 3485–3502.
13. *Gawin D., Majorana C. E., Pesavento F., Schrefler B. A.* A fully coupled multiphase FE model of hygro-thermo-mechanical behavior of concrete at high temperature // In: Proc. 4th World Congress on Computational Mechanics. New trends and applications (29 Jun. – 2 Jul. 1998, Buenos Aires, Argentina). – Barcelona: CIMNE, 1998 (pp. CD-ROM).
14. *Haksever A., Anderberg Y.* Comparison between measured and computed structural response of some reinforced concrete columns in fire // *Fire Safety J.* – 1981/2. – **4**, No. 4. – P. 293–297.
15. *Huang Z., Platten A.* Non-linear finite element analysis of planar reinforced concrete members subjected to fires // *ACI Struct. J.* – 1997. – **94**, No. 3. – P. 272–282.
16. *Huang Z., Platten A., Roberts J.* Non-linear finite element model to predict temperature histories within reinforced concrete in fires // *Build. Environ.* – 1996. – **31**, No. 2. – P. 109–118.

17. Huang Z.-F., Tan K.-H., Fire resistance of compartments within a high-rise steel frame: New sub-frame and isolated member models // J. Constr. Steel Res. – 2006. – **62**, No. 10. – P. 974–986.
18. ISO 834:1975. Fire-resistance tests – Elements of building construction. – [International Organization for Standardization.]
19. Kodur V. K. R., Dwaikat M. A numerical model for predicting the fire resistance of reinforced concrete beams // Cement Concrete Compos. – 2008. – **30**, No. 5. – P. 431–443.
20. Li G.-Q., Guo S.-X., Zhou H.-S. Modeling of membrane action in floor slabs subjected to fire // Eng. Struct. – 2007. – **29**, No. 6. – P. 880–887.
21. Lie T. T., Irwin R. J. Method to calculate the fire resistance of reinforced concrete columns with rectangular cross section // ACI Struct. J. – 1993. – **90**, No. 1. – P. 52–60.
22. Luccioni B. M., Figueroa M. I., Danesi R. F. Thermo-mechanic model for concrete exposed to elevated temperatures // Eng. Struct. – 2003. – **25**, No. 6. – P. 729–742.
23. Mounajed G., Obeid W. A new coupling F.E. model for the simulation of thermal hydro-mechanical behavior of concrete at high temperatures // Mater. Struct. – 2004. – **37**, No. 6. – P. 422–432.
24. Terro M. J. Numerical modeling of the behavior of concrete structures in fire // ACI Struct. J. – 1998. – **95**, No. 2. – P. 183–193.
25. Wald F., Simões da Silva L., Moore D. B., Lennon T., Chladna M., Santiago A., Beneš M., Borges L. Experimental behaviour of a steel structure under natural fire // Fire Safety J. – 2006. – **41**, No. 7. – P. 509–522.
26. Wang W.-Y., Lia G.-Q., Dong Y.-L. Experimental study and spring-component modelling of extended end-plate joints in fire // J. Constr. Steel Res. – 2007. – **63**, No. 8. – P. 1127–1137.
27. Wang Y.-C., Wong P.-M. H., Kodur V. An experimental study of the mechanical properties of fibre reinforced polymer (FRP) and steel reinforcing bars at elevated temperatures // Compos. Struct. – 2007. – **80**, No. 1. – P. 131–140.
28. Wu C.-W., Lin T.-H. Full-scale evaluations on heat resistance of glass panes incorporated with water film or sprinkler in a room fire // Build. Environ. – 2007. – **42**, No. 9. – P. 3277–3284.
29. Yang H., Han L.-H., Wang Y.-C. Effects of heating and loading histories on post-fire cooling behaviour of concrete-filled steel tubular columns // J. Constr. Steel Res. – 2008. – **64**, No. 5. – P. 556–570.
30. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. The finite element method. – Vol. 1. The basis. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. – xvi + 689 p.

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ СТРОИТЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ПОЖАРЕ

Предложена ориентированная на метод конечных элементов математическая модель количественного описания процессов деформирования конструкций и их элементов в условиях пожара. Для определения напряженно-деформированного состояния тела при температурном и силовом нагружении использован подход Лагранжа. С целью апробации предложенного подхода решен ряд тестовых задач. Исследована сходимость решений. Выполнен сравнительный анализ численных результатов, полученных при различных модельных предположениях, с результатами экспериментов и известными аналитическими решениями аналогичных задач.

STRESS-STRAIN STATE OF ELEMENTS OF BUILDING STRUCTURES DURING THE FIRE

A focused on the finite element method mathematical model of quantitative description of the deformation processes of building structures and their elements in fire conditions is proposed. Lagrangian approach is used to determine the stress-strain state of the body under force and thermal loading. A number of test problems are solved with a view to approve the proposed approach. A convergence of numerical solutions of these problems is investigated. A comparative analysis of the numerical results obtained in the various model assumptions, as well as the experimental data and known analytical solutions of similar problems is carried out.

Ин-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.11.13