УДК 517.958:532.72

О. Ю. Чернуха[1], В. Є. Гончарук[1,2], А. Є. Давидок[1]

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТЕРМОДИФУЗІЇ РОЗПАДНОЇ РЕЧОВИНИ У СТОХАСТИЧНО НЕОДНОРІДНІЙ ШАРУВАТІЙ СМУЗІ

Досліджуються процеси термодифузії з урахуванням розпаду речовини у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі. Постановку контактно-крайової задачі виконано на основі теорії бінарних систем з урахуванням ідеальних умов контакту для температури і неідеальних умов – для концентрації. Отримано систему рівнянь термодифузії розпадних частинок для всього тіла. Сформульовано систему інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентну вихідній контактно-крайовій задачі, розв'язок якої побудований методом послідовних наближень. Випадкові поля температури і концентрації розпадних частинок знайдено у вигляді рядів Неймана. Встановлено умови абсолютної і рівномірної збіжності рядів. Усереднення випадкових полів проведено за ансамблем конфігурацій фаз із рівномірною функцією розподілу.

Кількісні дослідження процесів тепломасоперенесення і визначення нестаціонарних полів температури, вологості, тиску тощо дають можливість знаходити оптимальні конструктивні та експлуатаційні розв'язання для складних інженерних конструкцій, оскільки теплотехнічні та міцнісні характеристики захисних частин будівель визначаються переважно нестаціонарними взаємозв'язаними процесами тепло- і вологоперенесення, а інтенсифікація чи зниження в матеріалі фізико-хімічних і фазових перетворень змінює структуру приграничного шару [7, 12].

У загальному випадку в результаті нерівномірного нагріву середовища (тіла) під впливом ґрадієнта температури відбувається перенесення його компонент – термодифузія (у рідинах – ефект Соре (*Soret*)) [11, 12]. Якщо між окремими частинами середовища підтримується постійна різниця температур, то внаслідок дифузії в області тіла виникають ґрадієнти концентрації. У стаціонарному стані ґрадієнт концентрації зрівноважує різницю температур. Таке явище, зокрема, є основою одного з методів відокремлення ізотопів [1], а також термодифузійного відокремлення нафтових фракцій або отримання чистих речовин і створення композицій з попередньо заданими властивостями у фармакології [6]. Дифузія у сумішах може бути зумовлена не тільки ґрадієнтом концентрації, але й ґрадієнтом температури [4, 13]. Також має місце і зворотній ефект, тобто перенос тепла внаслідок ґрадієнта концентрації (ефект Дюфура (*Dufour*)).

У математичному моделюванні процесів тепломасоперенесення використовують як мікро-, так і макропідходи [8, 10]. Так, у першому випадку розглядають поведінку окремих частинок і враховують локальну будову середовища.

У цій роботі розглядаємо середовище, утворене з двох компонент, одна з яких є домінуючою і утворює матрицю. Математичний опис процесів тепломасоперенесення у гетерогенних середовищах будують на основі феноменологічних теорій або теорій бінарних систем [2]. Дослідимо зв'язані теплові та дифузійні процеси з урахуванням розпаду мігруючої речовини типу хімічних реакцій або радіоактивного розпаду у двофазній шаруватій смузі на основі математичної моделі, побудованої за континуально-термодинамічним підходом [9].

1. Постановка задачі. Нехай у смузі товщини z_0, що складається з випадково розміщених підшарів двох типів – матриці і включень, відбуваються взаємозв'язані процеси теплопровідності і дифузії домішкової речовини, які супроводжуються розпадом мігруючих частинок. Приймемо, що фази в області тіла розташовані за рівномірним розподілом. При цьому об'ємна частка v_0 матриці є набагато більшою від об'ємної частки v_1 включення.

При нехтуванні конвективною складовою концентрація домішкової речовини $c^{(j)}(z,t)$ і температурне поле $T^{(j)}(z,t)$, $j = 0,1$, в області Ω_0 матриці визначаємо із системи рівнянь [9]

$$\frac{\partial c^{(0)}(z,t)}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 c^{(0)}(z,t)}{\partial z^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T^{(0)}(z,t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(0)}(z,t),$$

$$z \in \Omega_0, \quad t \in [0,\tau], \qquad (1')$$

$$\frac{\partial T^{(0)}(z,t)}{\partial t} = \text{æ}_c^{(0)} \frac{\partial^2 c^{(0)}(z,t)}{\partial z^2} + \text{æ}_0 \frac{\partial^2 T^{(0)}(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_0, \quad t \in [0,\tau], \qquad (1'')$$

а в області включень Ω_1 – з аналогічних рівнянь з іншими коефіцієнтами:

$$\frac{\partial c^{(1)}(z,t)}{\partial t} = D_1 \frac{\partial^2 c^{(1)}(z,t)}{\partial z^2} + D_T^{(1)} \frac{\partial^2 T^{(1)}(z,t)}{\partial z^2} - \lambda c^{(1)}(z,t),$$

$$z \in \Omega_1, \quad t \in [0,\tau], \qquad (2')$$

$$\frac{\partial T^{(1)}(z,t)}{\partial t} = \text{æ}_c^{(1)} \frac{\partial^2 c^{(1)}(z,t)}{\partial z^2} + \text{æ}_1 \frac{\partial^2 T^{(1)}(z,t)}{\partial z^2}, \quad z \in \Omega_1, \quad t \in [0,\tau]. \qquad (2'')$$

Тут D_0, D_1 і æ_0, æ_1 – коефіцієнти дифузії і температуропровідності в областях Ω_0 та Ω_1; $D_T^{(0)}$, $D_T^{(1)}$ і $\text{æ}_c^{(0)}$, $\text{æ}_c^{(1)}$ – коефіцієнти взаємозв'язку полів температури і концентрації; λ – коефіцієнт інтенсивності розпаду домішкової речовини.

Приймаємо, що на границях тіла підтримуються постійні значення концентрації домішкової речовини та температури:

$$c(z,t)\big|_{z=0} = c_* \equiv \text{const}, \qquad c(z,t)\big|_{z=z_0} = 0,$$

$$T(z,t)\big|_{z=0} = T_* \equiv \text{const}, \qquad T(z,t)\big|_{z=z_0} = T^* \equiv \text{const}. \qquad (3)$$

За початкові приймаємо такі умови:

$$c(z,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad T(z,t)\big|_{t=0} = T^*. \qquad (4)$$

На границях поділу областей $z = z_{i1}$ (межа матриця-включення) і $z = z_{i2}$ (межа включення-матриця) виконуються умови рівності хімічних потенціалів $\mu^{(j)}(z,t)$ та температурного поля [5]:

$$\mu^{(0)}(z,t)\big|_{z=z_{i1}-0} = \mu^{(1)}(z,t)\big|_{z=z_{i1}+0},$$

$$\mu^{(1)}(z,t)\big|_{z=z_{i2}-0} = \mu^{(0)}(z,t)\big|_{z=z_{i2}+0}; \qquad (5)$$

$$T^{(0)}(z,t)\big|_{z=z_{i1}-0} = T^{(1)}(z,t)\big|_{z=z_{i1}+0},$$

$$T^{(1)}(z,t)\big|_{z=z_{i2}-0} = T^{(0)}(z,t)\big|_{z=z_{i2}+0}. \qquad (6)$$

Вважаємо, що справджуються лінійні рівняння стану, зокрема для хімічних потенціалів $\mu^{(j)}$ [9]

$$\mu^{(j)} - \mu_0^{(j)} = d_T^{(j)} \delta T^{(j)} + d^{(j)} c^{(j)}, \qquad j = 0,1,$$

де $\mu_0^{(j)}$ – хімічні потенціали для чистої речовини (у вихідній конфігурації); $d_T^{(j)} = T_0^{(j)} \left(\partial \mu^{(j)} / \partial T^{(j)} \right)_{(0)}$, $d^{(j)} = \left(\partial \mu^{(j)} / \partial c^{(j)} \right)_{(0)}$ – матеріальні характеристики системи, $\delta T^{(j)} = T^{(j)} - T_0^{(j)}$. Тоді умови контакту (5) для концентрацій набудуть вигляду

$$d_T^{(0)}T^{(0)}\big|_{z_{i1}} + d^{(0)}c^{(0)}\big|_{z_{i1}} = d_T^{(1)}T^{(1)}\big|_{z_{i1}} + d^{(1)}c^{(1)}\big|_{z_{i1}},$$

$$d_T^{(1)}T^{(1)}\big|_{z_{i2}} + d^{(1)}c^{(1)}\big|_{z_{i2}} = d_T^{(0)}T^{(0)}\big|_{z_{i2}} + d^{(0)}c^{(0)}\big|_{z_{i2}}.$$

Враховуючи (6), отримаємо

$$d^{(0)}c^{(0)}\big|_{z_{i1}} = d^{(1)}c^{(1)}\big|_{z_{i1}} + (d_T^{(1)} - d_T^{(0)})T^{(1)}\big|_{z_{i1}},$$

$$d^{(1)}c^{(1)}\big|_{z_{i2}} = d^{(0)}c^{(0)}\big|_{z_{i2}} + (d_T^{(0)} - d_T^{(1)})T^{(0)}\big|_{z_{i2}}. \tag{7}$$

На границях контакту фаз також виконуються умови рівності відповідних дифузійних і теплових потоків, які, враховуючи структуру рівнянь (1) і (2), запишемо у формі

$$\rho_0\left(D_0\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} + D_T^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i1}} = \rho_1\left(D_1\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z} + D_T^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i1}},$$

$$\rho_1\left(D_1\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z} + D_T^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i2}} = \rho_0\left(D_0\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} + D_T^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i2}},$$

$$\rho_0 C_V^{(0)}\left(æ_c^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} + æ_0\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i1}} = \rho_1 C_V^{(1)}\left(æ_c^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z} + æ_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i1}},$$

$$\rho_1 C_V^{(1)}\left(æ_c^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z} + æ_1\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i2}} = \rho_0 C_V^{(0)}\left(æ_c^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z} + æ_0\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\right)\bigg|_{z_{i2}},$$

де ρ_j – густина j-ї фази, $C_V^{(j)}$ – питома теплоємність при постійному об'ємі j-ї фази, $j = 0, 1$. Ці умови контакту для потоків тепла і маси подамо у вигляді

$$\aleph_{c1}^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}} = \aleph_{c1}^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}} + \aleph_{T1}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}},$$

$$\aleph_{c2}^{(1)}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}} = \aleph_{c2}^{(0)}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}} + \aleph_{T2}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}},$$

$$\aleph_{T1}^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}} = \aleph_{T1}^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}} + \aleph_{c1}\frac{\partial c^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i1}},$$

$$\aleph_{T2}^{(1)}\frac{\partial T^{(1)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}} = \aleph_{T2}^{(0)}\frac{\partial T^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}} + \aleph_{c2}\frac{\partial c^{(0)}}{\partial z}\bigg|_{z_{i2}}.$$

Тут

$$\aleph_{c1}^{(0)} = \frac{D_0}{D_T^{(0)}} - \frac{æ_c^{(0)}}{æ_0}, \quad \aleph_{c1}^{(1)} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_1}{D_T^{(0)}} - \frac{C_V^{(1)}æ_c^{(1)}}{C_V^{(0)}æ_0}\right), \quad \aleph_{T1} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_T^{(1)}}{D_T^{(0)}} - \frac{C_V^{(1)}æ_1}{C_V^{(0)}æ_0}\right),$$

$$\aleph_{c2}^{(1)} = \frac{D_1}{D_T^{(1)}} - \frac{æ_c^{(1)}}{æ_1}, \quad \aleph_{c2}^{(0)} = \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_0}{D_T^{(1)}} - \frac{C_V^{(0)}æ_c^{(0)}}{C_V^{(1)}æ_1}\right), \quad \aleph_{T2} = \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_T^{(0)}}{D_T^{(1)}} - \frac{C_V^{(0)}æ_0}{C_V^{(1)}æ_1}\right),$$

$$\aleph_{T1}^{(0)} = \frac{D_T^{(0)}}{D_0} - \frac{æ_0}{æ_c^{(0)}}, \quad \aleph_{T1}^{(1)} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_T^{(1)}}{D_0} - \frac{C_V^{(1)}æ_1}{C_V^{(0)}æ_c^{(0)}}\right), \quad \aleph_{c1} = \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(\frac{D_1}{D_0} - \frac{C_V^{(1)}æ_c^{(1)}}{C_V^{(0)}æ_c^{(0)}}\right),$$

$$\aleph_{T2}^{(1)} = \frac{D_T^{(1)}}{D_1} - \frac{æ_1}{æ_c^{(1)}}, \quad \aleph_{T2}^{(0)} = \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_T^{(0)}}{D_1} - \frac{C_V^{(0)}æ_0}{C_V^{(1)}æ_c^{(1)}}\right), \quad \aleph_{c2} = \frac{\rho_0}{\rho_1}\left(\frac{D_0}{D_1} - \frac{C_V^{(0)}æ_c^{(0)}}{C_V^{(1)}æ_c^{(1)}}\right).$$

2. Система інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентна крайовій задачі. Введемо в розгляд поля концентрації $c(z,t)$ і температури $T(z,t)$ для цілого тіла.

Враховуючи стрибки функції концентрації і похідних від концентрації та температури на межах контакту $z = z_{i1}$ і $z = z_{i2}$, а також рівність температур на цих же поверхнях, маємо [3]

$$\frac{\partial^2 c}{\partial z^2} = \left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} + \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_1) + \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_2) + \right.$$

$$\left. + [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_1) + [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_2)\right),$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} + \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_1) + \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_2)\right).$$

Тут $\{\ldots\}$ – області неперервності функції, $[\ldots]_{z_i}$ – стрибок функції в точці z_i, n_1 – кількість включень.

Тоді рівняння тепломасоперенесення в цілому тілі набудуть вигляду

$$L_1(z,t)[c(z,t);T(z,t)] \equiv \frac{\partial c}{\partial t} - \sum_{j=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{n_j} D_j \eta_{\ell j}(z)\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} + \lambda c -$$

$$- \sum_{j=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{n_j} \bar{D}_T^{(j)} \eta_{\ell j}(z)\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \right.$$

$$- \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) -$$

$$\left. - [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_{i1}) - [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_{i2})\right) = 0\,, \qquad (8')$$

$$L_2(z,t)[c(z,t);T(z,t)] \equiv \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{j=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{n_j} æ_c^{(j)} \eta_{\ell j}(z)\left\{\frac{\partial^2 c}{\partial z^2}\right\} -$$

$$- \sum_{j=0}^{1}\sum_{\ell=1}^{n_j} æ_j \eta_{\ell j}(z)\left\{\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right\} - \sum_{i=1}^{n_1}\left(\left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \right.$$

$$- \left[\frac{\partial c}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i1}} \delta(z - z_{i1}) - \left[\frac{\partial T}{\partial z}\right]_{z_{i2}} \delta(z - z_{i2}) -$$

$$\left. - [c]_{z_{i1}} \delta'(z - z_{i1}) - [c]_{z_{i2}} \delta'(z - z_{i2})\right) = 0\,, \qquad (8'')$$

де $\eta_{\ell j}(z) = \begin{cases} 1, & z \in \Omega_{\ell j}, \\ 0, & z \notin \Omega_{\ell j}, \end{cases}$ – випадкова «функція структури» [9], $\Omega_{\ell j}$ – ℓ-й шар j-ї фази, $\bigcup_{\ell=1}^{n_j} \Omega_{\ell j} = \Omega_j$; n_j – кількість шарів j-ї фази.

У системі рівнянь (8) додамо і віднімемо детерміновані оператори з коефіцієнтами, що є фізичними характеристиками фази $j = 0$:

$$L_1^{(0)}(z,t) = \frac{\partial_c}{\partial t} - D_0 \frac{\partial_c^2}{\partial z^2} - D_T^{(0)} \frac{\partial_T^2}{\partial z^2} + \lambda\,,$$

$$L_2^{(0)}(z,t) = \frac{\partial_T}{\partial t} - æ_c^{(0)} \frac{\partial_c^2}{\partial z^2} - æ_0 \frac{\partial_T^2}{\partial z^2}\,.$$

Тут індекс при похідній вказує, на яку функцію діє оператор.

Тоді, позначаючи

$$L_s^{(j)}(z,t) \equiv L_s^{(j)}(z) = L_j^{(0)}(z,t) - L_j(z,t), \qquad j = 1,2\,,$$

отримаємо таку систему взаємозв'язаних диференціальних рівнянь:

$$L_1^{(0)}(z,t)[c(z,t);T(z,t)] = L_s^{(1)}(z)[c(z,t);T(z,t)]\,,$$

$$L_2^{(0)}(z,t)[c(z,t);T(z,t)] = L_s^{(2)}(z)[c(z,t);T(z,t)]\,. \tag{9}$$

Праву частину системи (9) розглядаємо як джерело, тобто неоднорідність середовища трактуємо як внутрішні джерела. Тоді крайову задачу (9), (3), (4) зводимо до еквівалентної системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$c(z,t) = c_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G_1(z,z',t,t') L_s^{(1)}\left[c(z',t');T(z',t')\right] dz'\,dt'\,,$$

$$T(z,t) = T_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} G_2(z,z',t,t') L_s^{(2)}[c(z',t');T(z',t')]\, dz'\,dt'\,, \tag{10}$$

де $c_0(z,t)$, $T_0(z,t)$ – розв'язки однорідної задачі; $G_1(z,z',t,t')$, $G_2(z,z',t,t')$ – функції Ґріна задачі (9), (3), (4).

У розглядуваному випадку однорідна крайова задача має вигляд

$$\frac{\partial c_0}{\partial t} = D_0 \frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} + D_T^{(0)} \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} - \lambda c_0\,, \qquad \frac{\partial T_0}{\partial t} = æ_c^{(0)} \frac{\partial^2 c_0}{\partial z^2} + æ_0 \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2}\,, \tag{11}$$

$$c_0(z,t)\big|_{z=0} = c_*, \quad c_0(z,t)\big|_{z=z_0} = 0, \quad T_0(z,t)\big|_{z=0} = T_*, \quad T(z,t)\big|_{z=z_0} = T^*,$$

$$c_0(z,t)\big|_{t=0} = 0, \qquad T_0(z,t)\big|_{t=0} = T^*. \tag{12}$$

Розв'язок задачі термодифузії (11), (12) подамо як [9]

$$c_0(z,t) = c_*\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) - \frac{c_*\lambda æ_c^{(0)}}{D_0 æ_0 - D_T^{(0)} æ_c^{(0)}}\left[1 - \frac{z}{z_0} - \frac{\operatorname{sh}\eta(z_0 - z)}{\operatorname{sh}\eta z_0}\right] -$$
$$- \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n z}{y_n(s_1 - s_2)}\left\{\left[c_* s_1 + P_1 + \frac{P_2}{s_1}\right]e^{s_1 t} - \right.$$
$$\left. - \left[c_* s_2 + P_1 + \frac{P_2}{s_2}\right]e^{s_2 t}\right\},$$

$$T_0(z,t) = T^* + (T_* - T^*)\left(1 - \frac{z}{z_0}\right) + \frac{c_*\lambda æ_c^{(0)}}{D_0 æ_0 - D_T^{(0)} æ_c^{(0)}}\left[1 - \frac{z}{z_0} - \right.$$
$$\left. - \frac{\operatorname{sh}\eta(z_0 - z)}{\operatorname{sh}\eta z_0}\right] - \frac{2}{z_0}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin y_n z}{y_n(s_1 - s_2)}\left\{\left[(T_* - T^*)s_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + P_1' - \frac{P_2'}{s_1}\right]e^{s_1 t} - \left[(T_* - T^*)s_2 + P_1' - \frac{P_2'}{s_2}\right]e^{s_2 t}\right\}, \tag{13}$$

де

$$P_1 = \lambda c_* + [æ_0 c_* - D_T^{(0)}(T_* - T^*)]y_n^2\,,$$
$$P_1' = \lambda(T_* - T^*) + [D_0(T_* - T^*) - æ_c^{(0)} c_*]y_n^2\,,$$
$$P_2 = c_*\lambda æ_0 y_n^2, \qquad P_2' = c_*\lambda æ_c^{(0)} y_n^2, \qquad y_n = n\pi/z_0\,,$$
$$\eta = \frac{\sqrt{\lambda æ_0}}{\sqrt{D_0 æ_0 - D_T^{(0)} æ_c^{(0)}}}\,,$$

s_1, s_2 – розв'язки квадратного рівняння $s^2 + \zeta_1 s + \zeta_2 = 0$, $\zeta_1 = (D_0 + æ_0)y_n^2 + \lambda$,

$\zeta_2 = [D_0 æ_0 - D_T^{(0)} æ_c^{(0)}] y_n^4 + \lambda æ_0 y_n^2$). Для того щоб ряди в (13) були збіжними, s_1 і s_2 повинні бути від'ємними, тобто

$$s_{1,2} = \frac{1}{2}\{-\lambda - (D_0 + æ_0) y_n^2 \pm$$

$$\pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda(D_0 - æ_0) y_n^2 + [(D_0 - æ_0)^2 + 4 D_T^{(0)} æ_c^{(0)}] y_n^4}\} < 0 .$$

Звідси випливає умова на обмеження коефіцієнтів

$$D_0 æ_0 > D_T^{(0)} æ_c^{(0)} . \tag{14}$$

Функції Ґріна для крайової задачі

$$\frac{\partial G_1}{\partial t} - D_0 \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2} - D_T^{(0)} \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2} + \lambda G_1 = \delta(t - t')\delta(z - z') ,$$

$$\frac{\partial G_2}{\partial t} - æ_c^{(0)} \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2} - æ_0 \frac{\partial^2 G_2}{\partial z^2} = \delta(t - t')\delta(z - z')$$

з нульовими крайовими умовами

$$G_1\big|_{t=0} = G_2\big|_{t=0} = 0 ,$$

$$G_1\big|_{z=0} = G_2\big|_{z=0} = G_1\big|_{z=z_0} = G_2\big|_{z=z_0} = 0$$

подамо так [9]:

$$G_1(z, z', t, t') = \theta(t - t') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\sin y_n z'}{s_1 - s_2} \sin y_n z \{[s_1 + A_1] e^{s_1(t-t')} -$$

$$- [s_2 + A_1] e^{s_2(t-t')}\} ,$$

$$G_2(z, z', t, t') = \theta(t - t') \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{\sin y_n z'}{s_1 - s_2} \sin y_n z \{[s_1 + A_2] e^{s_1(t-t')} -$$

$$- [s_2 + A_2] e^{s_2(t-t')}\} , \tag{15}$$

де $A_1 = [æ_0 - D_T^{(0)}] y_n^2$, $A_2 = \lambda + [D_0 - æ_c^{(0)}] y_n^2$.

Систему рівнянь (10) запишемо в матричній формі:

$$\mathbf{F}(z, t) = \mathbf{F}_0(z, t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z, z', t, t') \mathbf{L}_s(z') \mathbf{F}(z', t')\, dz'\, dt' , \tag{16}$$

де

$$\mathbf{F}(z, t) = \begin{pmatrix} c(z, t) \\ T(z, t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}_0(z, t) = \begin{pmatrix} c_0(z, t) \\ T_0(z, t) \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{L}_s(z) = \begin{pmatrix} L_1^c(z) & L_1^T(z) \\ L_2^c(z) & L_2^T(z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}(z, z', t, t') = \begin{pmatrix} G_1(z, z', t, t') & 0 \\ 0 & G_2(z, z', t, t') \end{pmatrix}.$$

Тут

$$L_i^c(z) = \sum_{\ell=1}^{n_1} a_i \eta_{\ell 1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{\ell 1}} \delta(z - z_{\ell 1}) + \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{\ell 2}} \delta(z - z_{\ell 2}) + \right.$$

$$\left. + [\ ]_{z_{\ell 1}} \delta'(z - z_{\ell 1}) + [\ ]_{z_{\ell 2}} \delta'(z - z_{\ell 2}) \right),$$

$$L_i^T(z) = \sum_{\ell=1}^{n_1} b_i \eta_{\ell 1}(z) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \sum_{i=1}^{n_1} \left(\left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{\ell 1}} \delta(z - z_{\ell 1}) + \left[\frac{\partial}{\partial z}\right]_{z_{\ell 2}} \delta(z - z_{\ell 2}) \right), \ i = 1, 2 ,$$

$$a_1 = D_1 - D_0 , \qquad a_2 = æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)} ,$$

$$b_1 = D_T^{(1)} - D_T^{(0)} , \qquad b_2 = æ_1 - æ_0 .$$

Розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь (10) або (16) шукаємо методом послідовних наближень. За нульове наближення $\mathbf{F}^0(z,t)$ вибираємо вектор розв'язків однорідної крайової задачі $\mathbf{F}^0(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t)$. Тоді отримаємо такі рекурентні формули для послідовних наближень:

$$\mathbf{F}^1(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^0(z',t')\,dz'\,dt',$$

$$\mathbf{F}^2(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^1(z',t')\,dz'\,dt',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\mathbf{F}^n(z,t) = \mathbf{F}_0(z,t) + \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}^{n-1}(z',t')\,dz'\,dt'.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Загальний член побудованої послідовності вектор-функцій $\mathbf{F}^0$, $\mathbf{F}^1, \ldots,$ $\mathbf{F}^n$, ... подамо так:

$$\mathbf{F}^n(z,t) = \mathbf{F}^{n-1}(z,t) + \mathbf{R}_n(z,t),$$

де $\mathbf{R}_n(z,t)$ − різниця між n-м та $(n-1)$-м членами послідовності:

$$\mathbf{R}_n(z,t) = \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z') \int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'')\mathbf{L}_s(z'')\ldots \times$$
$$\times \int_0^{t^{(n)}} \int_0^{z_0} \mathbf{G}\big(z^{(n-1)}, z^{(n)}, t^{(n-1)}, t^{(n)}\big) \times$$
$$\times \mathbf{L}_s(z^{(n)})\mathbf{F}_0(z^{(n)}, t^{(n)})\,dz^{(n)}\,dt^{(n)}\ldots dz'\,dt'.$$

Побудованій послідовності поставимо у відповідність такий ряд:

$$\mathbf{F}(z,t) \equiv \mathbf{F}_0(z,t) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(z,t). \qquad (17)$$

Твердження 1. *Якщо коефіцієнти системи рівнянь* (1), (2) *є обмеженими і справджується нерівність* (14), *то виконуються такі умови*:

$$|\mathbf{G}(z,z',t,t')| \le K_1, \qquad \forall z,z' \in [0,z_0], \quad \forall t \in [0,\tau], \quad \forall t' \in [0,t],$$

$$|\mathbf{L}_s(z)\mathbf{G}(z,z',t,t')| \le K_2, \qquad \forall z,z' \in [0,z_0], \quad \forall t \in [0,\tau], \quad \forall t' \in [0,t],$$

$$|\mathbf{L}_s(z)\mathbf{F}_0(z,t)| \le K_3, \qquad \forall z \in [0,z_0], \quad \forall t \in [0,\tau], \qquad (18)$$

де

$$K_1 = \max_i \sup_{\substack{z,z' \in [0,z_0] \\ t,t' \in [0,\tau]}} \{G_i(z,z',t,t')\},$$

$$K_3 = \max_i \sup_{\substack{z \in [0,z_0] \\ t \in [0,\tau]}} \{L_i^c(z)c_0(z,t) + L_i^T(z)T_0(z,t)\},$$

$$K_2 = \max_i \sup_{\substack{z,z' \in [0,z_0] \\ t,t' \in [0,\tau]}} \{L_i^c(z)G_1(z,z',t,t') + L_i^T(z)G_2(z,z',t,t')\}, \qquad i = 1,2.$$

Теорема 1. *При виконанні умов твердження 1 ряд* (17) *є абсолютно і рівномірно збіжним.*

Д о в е д е н н я. З урахуванням співвідношень (18) для загального члена ряду (17) одержимо оцінку

$$|\mathbf{R}_n| \le K_1 K_2^{n-1} K_3 \frac{(z_0 t)^n}{n!}. \qquad (19)$$

Оскільки мажорантний ряд з додатним загальним членом $K_1 K_2^{n-1} K_3 \dfrac{(z_0 t)^n}{n!}$ збігається при $n \to \infty$ для довільних значень K_1, K_2, K_3, z_0, t, то послідовність $\{\mathbf{F}^{(n)}(z,t)\}$ часткових сум ряду (17) за ознакою Вейєрштрасса є абсолютно і рівномірно збіжною при $n \to \infty$, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}^{(n)}(z,t) = \mathbf{F}(z,t).$$

Теорему 1 доведено. ♦

Теорема 2. *Вектор-функція* $\mathbf{F}(z,t) \equiv \mathbf{F}_0(z,t) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{R}_n(z,t)$ *є розв'язком матричного рівняння* (16).

Д о в е д е н н я. Помноживши зліва обидві частини співвідношення (17) на $\mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s$ і проінтегрувавши почленно по всій області $[0,z_0] \cup \cup [0,t]$, одержимо

$$\int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{C}(z',t')\,dz'\,dt' = \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z') \times$$

$$\times \Bigg[\mathbf{F}_0(z',t') + \int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'')\mathbf{L}_s(z'') \times$$

$$\times \mathbf{F}_0(z'',t'')\,dz''\,dt'' + \ldots\Bigg] dz'\,dt' =$$

$$= \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z')\mathbf{F}_0(z',t')\,dz'\,dt' +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z,z',t,t')\mathbf{L}_s(z') \Bigg[\int_0^{t'} \int_0^{z_0} \mathbf{G}(z',z'',t',t'')\mathbf{L}_s(z'') \times$$

$$\times \mathbf{F}_0(z'',t'')\,dz''\,dt'' \Bigg] dz'\,dt' + \ldots = \mathbf{F}(z,t) - \mathbf{F}_0(z,t).$$

Таким чином, показали, що функція $\mathbf{F}(z,t)$ вигляду (17) задовольняє систему інтегро-диференціальних рівнянь (16). Теорему 2 доведено. ♦

Знайдемо оцінку для залишкових членів ряду (17)

$$\mathbf{S}_n(z,t) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbf{R}_n(z,t).$$

Оскільки виконується нерівність (19), то, підсумувавши праву й ліву частини співвідношення, отримаємо

$$|S_n(z,t)| \le \frac{K_1 K_3}{K_2} \exp\{K_2 z_0 \tau\}\left[1 - \frac{1}{n!}\Gamma(n+1, K_2 z_0 \tau)\right],$$

де $\Gamma(n+1, K_2 z_0 \tau) = \int\limits_{K_2 z_0 \tau}^{\infty} x^n \exp\{-x\}\,dx$ − додаткова неповна гама-функція.

3. Усереднення за ансамблем конфігурацій фаз. Для визначення усереднених полів концентрації і температури обмежимося двома першими членами рядів Неймана:

$$c(z,t) \approx c_0 + \int_0^t \int_0^{z_0} G_1(z,z',t,t') \sum_{\ell=1}^{n_1} \eta_{\ell 1}(z') \left\{ (D_1 - D_0) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \right.$$

$$\left. + (D_T^{(1)} - D_T^{(0)}) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' \, dt', \qquad (20')$$

$$T(z,t) \approx T_0 + \int_0^t \int_0^{z_0} G_2(z,z',t,t') \sum_{\ell=1}^{n_1} \eta_{\ell 1}(z') \left\{ (æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \right.$$

$$\left. + (æ_1 - æ_0) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' \, dt'. \qquad (20'')$$

Інші доданки при дії операторів L_i^c, L_i^T дорівнюють нулеві, оскільки функції $c_0(z,t)$, $T_0(z,t)$ та їхні похідні не мають стрибків в області тіла.

Усереднимо вирази (20) за ансамблем конфігурацій фаз з рівномірною функцією розподілу. Тут випадковою функцією є тільки $\eta_{\ell 1}(z')$. Враховуючи властивості цієї функції [9], маємо

$$\langle c(z,t) \rangle_{\text{conf}} \approx c_0 + \int_0^t \left[\frac{v_1}{h} \int_0^h z' G_1(z,z',t,t') \left\{ (D_1 - D_0) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + (D_T^{(1)} - D_T^{(0)}) \times \right.\right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' + v_1 \int_h^{z_0} G_1(z,z',t,t') \left\{ (D_1 - D_0) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \right.$$

$$\left.\left. + (D_T^{(1)} - D_T^{(0)}) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' \right] dt', \qquad (21')$$

$$\langle T(z,t) \rangle_{\text{conf}} \approx T_0 + \int_0^t \left[\frac{v_1}{h} \int_0^h z' G_2(z,z',t,t') \left\{ (æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + (æ_1 - æ_2) \times \right.\right.$$

$$\left. \times \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' + v_1 \int_h^{z_0} G_2(z,z',t,t') \left\{ (æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + \right.$$

$$\left.\left. + (æ_1 - æ_0) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} \right\} dz' \right] dt', \qquad (21'')$$

де h – характерна (середня) товщина включень.

Остаточні вирази для зв'язаних полів концентрації домішкової речовини та температури, усереднених за ансамблем конфігурацій фаз, отримаємо, підставляючи у формули (21) вирази (15) для функцій Ґріна та розв'язки (13) однорідної крайової задачі. Враховуючи, що

$$(D_1 - D_0) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + (D_T^{(1)} - D_T^{(0)}) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} = c_* \eta^4 D_k \frac{\operatorname{sh} \eta (z_0 - z)}{\operatorname{sh} \eta z_0} +$$

$$+ \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{\sin y_n z}{s_1 - s_2} \{ Q_1 e^{s_1 t} - Q_2 e^{s_2 t} \},$$

$$(æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}) \frac{\partial^2 c_0}{\partial z'^2} + (æ_1 - æ_0) \frac{\partial^2 T_0}{\partial z'^2} = c_* \eta^4 \left\{ æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)} \frac{æ_1}{æ_0} \right\} \frac{\operatorname{sh} \eta (z_0 - z)}{\operatorname{sh} \eta z_0} +$$

$$+ \frac{2}{z_0} \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{\sin y_n z}{s_1 - s_2} \{ \bar{Q}_1 e^{s_1 t} - \bar{Q}_2 e^{s_2 t} \},$$

де

$$D_k = D_1 - D_0 - \frac{æ_c^{(0)}}{æ_0} (D_T^{(1)} - D_T^{(0)}),$$

$$Q_1 = (D_1 - D_0)\left[c_* s_1 + P_1 + \frac{P_2}{s_1}\right] + \left(D_T^{(1)} - D_T^{(0)}\right)\left[(T_* - T^*)s_1 + P_1' - \frac{P_2'}{s_1}\right],$$

$$Q_2 = (D_1 - D_0)\left[c_* s_2 + P_1 + \frac{P_2}{s_2}\right] + \left(D_T^{(1)} - D_T^{(0)}\right)\left[(T_* - T^*)s_2 + P_1' - \frac{P_2'}{s_2}\right],$$

$$\bar{Q}_1 = \left(æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}\right)\left[c_* s_1 + P_1 + \frac{P_2}{s_1}\right] + (æ_1 - æ_0)\left[(T_* - T^*)s_1 + P_1' - \frac{P_2'}{s_1}\right],$$

$$\bar{Q}_2 = \left(æ_c^{(1)} - æ_c^{(0)}\right)\left[c_* s_2 + P_1 + \frac{P_2}{s_2}\right] + (æ_1 - æ_0)\left[(T_* - T^*)s_2 + P_1' - \frac{P_2'}{s_2}\right],$$

отримаємо усереднені за ансамблем реалізації структури тіла поля концентрації та температури:

$$\begin{aligned}
\langle c(z,t)\rangle_{\text{conf}} = c_0(z,t) - \frac{2v_1}{hz_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{s_{1n} - s_{2n}}\Bigg\{\frac{c_*\eta^4 D_k}{\operatorname{sh}\eta z_0}\left[\frac{A_n^1}{h(\eta^2 + y_n^2)} + hA_n^2\right]\times \\
\times\left(\left(1 + \frac{A_1}{s_{1n}}\right)\left[e^{s_{1n}t} - 1\right] - \left(1 + \frac{A_1}{s_{2n}}\right)\left[e^{s_{2n}t} - 1\right]\right) + \\
+ \frac{y_n B_n^1 + hB_n^2}{z_0(s_{1n} - s_{2n})}\Bigg[Q_1(s_{1n} + A_1)te^{s_{1n}t} + Q_2(s_{2n} + A_1)te^{s_{2n}t} - \\
- \frac{e^{s_{1n}t} - e^{s_{2n}t}}{s_{1n} - s_{2n}}\left\{Q_1(s_{2n} + A_1) + Q_2(s_{1n} + A_1)\right\}\Bigg] + \\
+ \frac{1}{z_0}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{y_k(R_{kn}^1 + hR_{kn}^2)}{s_{1k} - s_{2k}}\Bigg[Q_1\frac{s_{1n} + A_1}{s_{1k} - s_{1n}}\left(e^{s_{1k}t} - e^{s_{1n}t}\right) - \\
- Q_2\frac{s_{1n} + A_1}{s_{2k} - s_{1n}}\left(e^{s_{2k}t} - e^{s_{1n}t}\right) - \\
- Q_1\frac{s_{2n} + A_1}{s_{1k} - s_{2n}}\left(e^{s_{1k}t} - e^{s_{2n}t}\right) + Q_2\frac{s_{2n} + A_1}{s_{2k} - s_{2n}}\left(e^{s_{2k}t} - e^{s_{2n}t}\right)\Bigg]\Bigg\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T(z,t)\rangle_{\text{conf}} = T_0(z,t) - \frac{2v_1}{hz_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin y_n z}{s_{1n} - s_{2n}}\Bigg\{\frac{c_*\eta^4\bar{æ}}{\operatorname{sh}\eta z_0}\left[\frac{A_n^1}{h(\eta^2 + y_n^2)} + hA_n^2\right]\times \\
\times\left(\left(1 + \frac{A_2}{s_{1n}}\right)\left[e^{s_{1n}t} - 1\right] - \left(1 + \frac{A_2}{s_{2n}}\right)\left[e^{s_{2n}t} - 1\right]\right) + \\
+ \frac{y_n B_n^1 + hB_n^2}{z_0(s_{1n} - s_{2n})}\Bigg[\bar{Q}_1(s_{1n} + A_2)te^{s_{1n}t} + \bar{Q}_2(s_{2n} + A_2)te^{s_{2n}t} - \\
- \frac{e^{s_{1n}t} - e^{s_{2n}t}}{s_{1n} - s_{2n}}\left\{\bar{Q}_1(s_{2n} + A_2) + \bar{Q}_2(s_{1n} + A_2)\right\}\Bigg] + \\
+ \frac{1}{z_0}\sum_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{\infty}\frac{y_k(R_{kn}^1 + hR_{kn}^2)}{s_{1k} - s_{2k}}\Bigg[\bar{Q}_1\frac{s_{1n} + A_2}{s_{1k} - s_{1n}}\left(e^{s_{1k}t} - e^{s_{1n}t}\right) - \\
- \bar{Q}_2\frac{s_{1n} + A_2}{s_{2k} - s_{1n}}\left(e^{s_{2k}t} - e^{s_{1n}t}\right) - \\
- \bar{Q}_1\frac{s_{2n} + A_2}{s_{1k} - s_{2n}}\left(e^{s_{1k}t} - e^{s_{2n}t}\right) + \bar{Q}_2\frac{s_{2n} + A_2}{s_{2k} - s_{2n}}\left(e^{s_{2k}t} - e^{s_{2n}t}\right)\Bigg]\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Тут

$$\bar{æ} = æ_c^{(1)} - \frac{æ_c^{(0)}æ_1}{æ_0},$$

$$A_n^1 = \frac{2\eta y_n}{\eta^2 + y_n^2} \operatorname{ch} \eta(z_0 - h) + \sin y_n h \left\{ \frac{\eta^2 - y_n^2}{\eta^2 + y_n^2} \operatorname{sh} \eta z_0 - \right.$$

$$\left. - \eta h \operatorname{ch} \eta(z_0 - h) \right\} - y_n \cos y_n h \left\{ h \operatorname{sh} \eta(z_0 - h) + \right.$$

$$\left. + \frac{2\eta}{\eta^2 + y_n^2} \operatorname{ch} \eta(z_0 - h) \right\},$$

$$A_n^2 = \frac{\eta \sin y_n h}{\eta^2 + y_n^2} \operatorname{ch} \eta(z_0 - h) + \frac{y_n \cos y_n h}{\eta^2 + y_n^2} \operatorname{sh} \eta(z_0 - h),$$

$$B_n^1 = h^2 + \frac{1}{2y_n^2} - \frac{h}{y_n} \sin(2y_n h) - \frac{1}{2y_n^2} \cos(2y_n h),$$

$$B_n^2 = y_n(z_0 - h) + \frac{1}{2} \sin(2y_n h),$$

$$R_{kn}^1 = \frac{1}{(y_k + y_n)^2} - \frac{1}{(y_k - y_n)^2} + \frac{\cos(y_k - y_n)h}{(y_k - y_n)^2} - \frac{\cos(y_k + y_n)h}{(y_k + y_n)^2} +$$

$$+ h \frac{\sin(y_k - y_n)h}{y_k - y_n} - h \frac{\sin(y_k + y_n)h}{y_k + y_n},$$

$$R_{kn}^2 = \frac{\sin(y_k + y_n)h}{y_k + y_n} - \frac{\sin(y_k - y_n)h}{y_k - y_n},$$

$s_{1n,2n} \equiv s_{1,2}$, $s_{1k,2k}$ – вирази $s_{1,2}$, у яких n замінено на k.

Висновки. Таким чином, за допомогою теорії узагальнених функцій контактну задачу термодифузії розпадної речовини у двофазній випадково неоднорідній шаруватій смузі, постановку якої здійснено на основі математичної моделі бінарних систем, зведено до системи рівнянь, що описує процеси в усьому тілі, включаючи стрибки функції концентрації і рівність температур, а також масових і теплових потоків на границях поділу фаз. На основі цієї системи диференціальних рівнянь записано систему інтегро-диференціальних рівнянь, еквівалентну вихідній контактно-крайовій задачі, розв'язок якої побудовано методом послідовних наближень. Випадкові поля температури і концентрації знайдено у вигляді рядів Неймана. Встановлено умови абсолютної і рівномірної їхньої збіжності.

Підкреслимо, що існування розв'язку системи інтегро-диференціальних рівнянь і збіжність відповідних інтегральних рядів доведено для випадку, коли ядра оператора містять як множник випадкову функцію координат. При цьому на густину функції розподілу фаз в області тіла не накладається жодних обмежень, тобто запропоновану схему дослідження такого класу задач термодифузії можна застосовувати при довільній конфігурації фаз.

1. *Белащенко Д. К.* Явления переноса в жидких металлах и полупроводниках. – Москва: Атомиздат, 1970. – 399 с.
2. *Бурак Я. Й., Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю.* Континуально-термодинамічні моделі механіки твердих розчинів. – Київ: Наук. думка, 2006. – 272 с.
3. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. – Москва: Наука, 1976. – 527 с.
4. *Лыков А. В., Михайлов Ю. А.* Теория тепло- и массопереноса. – Москва–Ленинград: Госэнергоиздат, 1963. – 536 с.
5. *Мюнстер А.* Химическая термодинамика. – Москва: Мир, 1974. – 295 с.

   Те саме: *Münster A.* Chemische Thermodynamik. – Berlin: Verlag Chemie, 1969. – ix + 261 S.
6. *Савиных Б. В., Гумеров Ф. М.* Взаимная диффузия жидкостей в электрических полях // Химия и компьют. моделирование. Бутлеров. сообщ. – 2002. – № 10 (спецвыпуск, прил.). – С. 213–220.

7. *Садыков Р. А.* Расчет теплотехнических характеристик ограждающих конструкций с учетом термодиффузии и фильтрации влаги // Материалы Междунар. науч.-техн. конф. «Теорет. основы теплогазоснабжения и вентиляции» (23–25 ноября 2005, Москва). – Москва: Моск. гос. строит. ун-т, 2005. – С. 115–121.
8. *Хорошун Л. П.* Методы теории случайных функций в задачах о макроскопических свойствах микронеоднородных тел // Прикл. механика. – 1978. – **14**, № 2. – С. 3–17.

   Те саме: *Khoroshun L. P.* Methods of theory of random functions in problems of macroscopic properties of microinhomogeneous media // Int. Appl. Mech. – 1978. – **14**, No. 2. – P. 113–124.
9. *Чапля Є. Я., Чернуха О. Ю., Гончарук В. Є., Торський А. Р.* Процеси переносу розпадної речовини в гетерогенних середовищах. – Львів: Євросвіт, 2010. – 261 с.
10. *Łydżba D.* Homogenisation theories applied to porous media mechanics // J. Theor. Appl. Mech. (Poland). – 1998. – **36**, No. 3. – P. 657–679.
11. *Reith D., Müller-Plathe F.* On the nature of thermal diffusion in binary Lennard–Jones liquids // J. Chem. Phys. – 2000. – **112**, No. 5. – P. 2436–2443.
12. *Sørensen M. R., Jacobsen K. W., Jónsson H.* Thermal diffusion processes in metal-tip-surface interactions: contact formation and adatom mobility // Phys. Rev. Lett. – 1996. – **77**, No. 25. – P. 5067–5070.
13. *Zhang L.-Z., Huang S.-M.* Coupled heat and mass transfer in a counter flow hollow fiber membrane module for air humidification // Int. J. Heat Mass Transf. – 2011. – **54**, No. 5-6. – P. 1055–1063.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ТЕРМОДИФФУЗИИ РАСПАДАЮЩЕГОСЯ ВЕЩЕСТВА В СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ СЛОИСТОЙ ПОЛОСЕ

Исследуются процессы термодиффузии с учетом распада вещества в двухфазной случайно неоднородной слоистой полосе. Постановка контактно-краевой задачи выполнена на основе теории бинарных систем с учетом идеальных условий контакта для температуры и неидеальных условий – для концентрации. Получена система уравнений термодиффузии распадающихся частиц для всего тела. Сформулирована система интегро-дифференциальных уравнений, эквивалентная исходной контактно-краевой задаче, решение которой построено методом последовательных приближений. Случайные поля температуры и концентрации распадающихся частиц найдены в виде рядов Неймана. Установлены условия абсолютной и равномерной сходимости рядов. Усреднение случайных полей проведено по ансамблю конфигураций фаз с равномерной функцией распределения.

MATHEMATICAL MODELING THE PROCESSES OF THERMODIFFUSION OF DECAYING SUBSTANCE IN A STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS STRATIFIED STRIP

The thermodiffusion processes with taking into account substance decay are studied in a two-phase randomly inhomogeneous stratified strip. The statement of the contact-boundary value problem is formulated on the basis of the theory of binary systems with regard for the perfect contact conditions for temperature and non-ideal ones for concentration. The system of equations of thermodiffusion of decaying particles is obtained for the whole body. The system of integro-differential equations, which is equivalent to the reference contact-boundary value problem, is formulated. Its solution is constructed by the method of successive approximations. The random fields of temperature and concentration are found in the form of Neumann series. Conditions of absolute and uniform convergence of the series are established. Averaging the random fields is carried out over the ensemble of phase configurations with a uniform distribution function.

[1] Центр мат. моделювання
Ін-ту прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.11.13