

**НАПРУЖЕННЯ У НЕСКІНЧЕННОМУ КРУГОВОМУ ЦИЛІНДРІ З ЧОТИРМА ЦИЛІНДРИЧНИМИ ПОРОЖНИНАМИ**

*Узагальненим методом Фур'є отримано аналітично-числовий розв'язок неосесиметричної крайової задачі теорії пружності для циліндричного тіла з чотирма циліндричними порожнинами. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, оператор якої є фредгольмовим. Досліджено збіжність методу редуції для розв'язання даної системи. Отримано залежності головних компонент тензора напружень від геометричних параметрів.*

**Вступ.** На сьогодні запропоновано різні моделі напружено-деформованого стану пористих і композиційних матеріалів. У монографії [1] розроблено методи мікрOMEХАНІКИ композиційних середовищ з дискретною структурою і тріщинами та деякі їхні застосування до конкретних матеріалів. Розглянуто вплив властивостей компонентів і виду структури неоднорідних середовищ на їхні ефективні (інтегральні) параметри та розподіл внутрішніх полів. Напружено-деформований стан композита моделюється розподілом напружень в околі кількох включень (плоска задача) або одного включення в разі зернистого композита.

Структурну модель зернистого еластомірного композита, що дозволила пов'язати його деформаційну та міцнісну поведінку з розмірами частинок дисперсної фази, тобто врахувати масштабний фактор міцності, запропоновано в статті [2]. На основі теоретичних досліджень напружено-деформованого стану біля двох жорстких сферичних включень у пружній нестисливій матриці встановлено залежності математичного сподівання розривного зусилля від фізико-механічних характеристик сполучного, розмірів часток і відстані між ними. В результаті запропоновано новий імовірнісний критерій появи мікроруйнування у композитній структурі у вигляді відшарувань матриці від частинок. З його використанням проведено модельні дослідження процесів розвитку внутрішнього пошкодження у композитній системі залежно від ступеня наповнення і величини включень. Побудовано відповідні криві розтягу, визначено граничні розривні макронапруження і макродеформації.

У статті [13] наведено дослідження з моделювання структури пористих матеріалів з малою об'ємною часткою вмісту твердої фази. Моделями служать головним чином стрижневі й оболонкові конструкції. Запропоновано класифікацію моделей за ступенем впорядкованості структурних одиниць. Видається, що найбільш адекватною з точки зору морфології і деформаційних властивостей є модель, яка складається з хаотично орієнтованих 14-гранних комірок. Для аналізу цієї моделі запропоновано метод виділення структурного елемента.

У роботі [3] запропоновано алгоритм оцінки властивостей волокнистого композита при розтязі, що базується на процедурі В. З. Власова, встановлено оцінку ефективних властивостей еквівалентного гомогенного матеріалу та виконано порівняння результатів розрахунку ефективного модуля Юнга з результатами інших авторів.

У роботі [12] узагальнено базові підходи, що застосовуються в математичних моделях, і загальні методи розв'язування рівнянь механіки стохастичних композитів. Вони можуть бути зведені до стохастичних рівнянь теорії пружності структурно неоднорідного тіла, до рівнянь теорії ефективних пружних модулів, до рівнянь теорії пружних сумішей або до більш загальних рівнянь четвертого порядку. Розв'язання стохастичних рівнянь теорії пружності для довільної області викликає значні математичні труднощі і може бути реалізоване тільки наближено. Побудова рівнянь теорії ефек-

тивних пружних модулів пов'язана із задачею визначення інтегральних модулів стохастично неоднорідного середовища, яка може бути розв'язана методом збурень, методом моментів або методом умовних моментів. Однак, оскільки рівняння стану не були строго обґрунтовані, ця теорія не може використовуватися для систематичного моделювання композитних структур.

У роботах [11, 14] запропоновано метод визначення напруженого стану скінченного циліндра, що базується на принципі суперпозиції і розвиненні тензора напружень у ряди Фур'є і Бесселя – Діні. Задачу зведено до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

У роботі [15] досліджено трансверсально ізотропний стрижень з циліндричним включенням з осесиметричними власними деформаціями. Отримано аналітичний пружний розв'язок для переміщень, напружень і енергії пружної деформації стрижня.

У статті [4] для прогнозування пружних властивостей композитів розглядається постановка нелінійних зв'язаних крайових задач мікромеханіки композитів, що враховують стадію структурного накопичення мікропошкоджень, коли поля структурних мікропошкоджень є локально ергодичними. З метою опису структурного руйнування і прогнозування пружних властивостей композитів істотно розширюється база визначальних співвідношень: вводиться новий матеріальний носій – тензор пошкоджуваності четвертого рангу. Побудовано нові функціонали зв'язаної стохастичної крайової задачі, які дозволяють, крім прогнозування пружних властивостей, будувати розрахункові поверхні міцності реальних композитів.

У роботах [8, 9] введено локальні осесиметричні моделі напруженого стану пористого і зернистого композиційного матеріалів із порами або зернами в формі витягнутих сфероїдів. У роботі [10] розроблено локальну неосесиметричну математичну модель напружено-деформованого стану пористого матеріалу. У цих моделях напруження в композитах описуються за допомогою узагальненого методу Фур'є. Апарат узагальненого методу Фур'є наведено в роботах [6, 7].

У цій роботі розвинуто локальну істотно неосесиметричну модель напружено-деформованого стану пористого матеріалу односпрямованої волокнистої структури, що ґрунтується на узагальненому методі Фур'є. Пори мають циліндричну форму. Розглядається випадок паралельного розміщення пор у пружному циліндричному зразку, який перебуває під дією кусково-сталого нормального навантаження, прикладеного на його межі. Отримано розподіли напружень в околі чотирьох порожнин.

**Формулювання задачі.** Розглянемо циліндричний зразок пористого матеріалу з чотирма циліндричними порожнинами (рис. 1). Будемо використовувати однаково орієнтовані циліндричні  $(\rho_j, \varphi_j, z_j)$  системи координат, початки яких віднесено до центрів пор  $O_j, j = 0 \div 4$ .

Для визначення напружено-деформованого стану в розглядуваному тілі необхідно розв'язати крайову задачу для рівняння Ляме

$$\Delta \mathbf{U} + \frac{1}{1-2\sigma} \nabla \operatorname{div} \mathbf{U} = 0$$

з граничними умовами

$$\mathbf{F}\mathbf{U} \Big|_{\Gamma_j} = 0, \quad j = 1 \div 4,$$

$$\mathbf{F}\mathbf{U} \Big|_{\Gamma_0} = T \mathbf{e}_\rho = \begin{cases} T, & |z| \leq h, \\ 0, & |z| > h. \end{cases}$$

Тут  $\mathbf{U}$  – вектор переміщень,  $\mathbf{F}\mathbf{U}$  – вектор зусиль на відповідній граничній поверхні, який відповідає переміщенню  $\mathbf{U}$ ;  $\sigma$  – коефіцієнт Пуассона;  $\Gamma_j$  – границя циліндричної порожнини з центром  $O_j$ ;  $\rho_j = R_j$  – рівняння поверхні  $\Gamma_j$ .

**Побудова розв'язку.** Розв'язок задачі у пружному просторі  $\Omega$  шукаємо у вигляді

$$\mathbf{U} = \tilde{\mathbf{U}} + \mathbf{U}_0,$$

$$\tilde{\mathbf{U}} = \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) d\lambda,$$

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{- (3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda,$$

де  $A_{s,m}^{(j)}$  – невідомі коефіцієнти, які визначаємо з граничних умов.

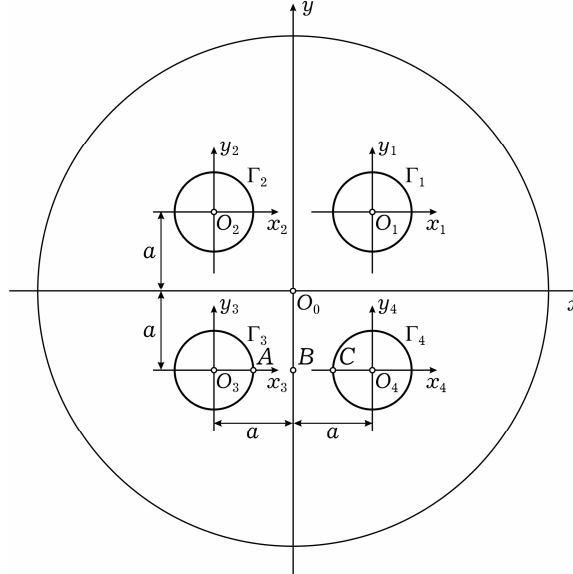


Рис. 1

У наведених вище формулах базисні розв'язки рівняння Ляме для циліндра мають вигляд [6]

$$\mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{D}_s u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad s = 1, 3, \quad (1)$$

$$\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \lambda^{-1} \mathbf{B}_2 u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

де

$$\mathbf{B}_2 = \left( x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \nabla - \chi [\mathbf{e}_z \times [\nabla \times \mathbf{e}_z]], \quad \mathbf{D}_1 = \nabla, \quad \mathbf{D}_3 = i[\nabla \times \mathbf{e}_z],$$

$$u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = e^{i\lambda z + im\varphi} \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda\rho) \\ I_m(\lambda\rho) \end{Bmatrix}.$$

Тут  $I_m(x)$  – модифікована функція Бесселя,  $\tilde{K}_m(x) = (\text{sgn } x)^m K_m(|x|)$ ,  $K_m(x)$  – функція Макдональда;  $\chi = 3 - 4\sigma$ ; символам «+» («-») у вектор-функціях (1), (2) відповідають зовнішні (внутрішні) розв'язки для циліндра.

Запишемо переміщення (1), (2) у поординатній формі:

$$\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \mp u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1 + i u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_0. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = & \mp (D - \chi) [u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} + u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1] + \\ & + i D u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) = \pm u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_{-1} \mp u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(\rho, \varphi, z) \mathbf{e}_1. \quad (5)$$

Тут  $D = \rho \frac{\partial}{\partial \rho}$ ,  $\mathbf{e}_{\pm 1} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}_\rho \mp i\mathbf{e}_\varphi)e^{\mp i\varphi}$ ,  $\mathbf{e}_0 = \mathbf{e}_z$ ,  $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$  – орти циліндричної системи координат.

Вектор напружень на площинці з нормаллю  $\mathbf{n}$  має вигляд

$$\mathbf{F}\mathbf{U} = 2G \left[ \frac{\sigma}{1-2\sigma} \mathbf{n} \operatorname{div} \mathbf{U} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{1}{2} (\mathbf{n} \times \operatorname{rot} \mathbf{U}) \right], \quad (6)$$

$G$  – модуль зсуву. Застосувавши оператор (6) на площинці з нормаллю  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_\rho$  до формул (3)–(5), отримаємо покоординатну форму запису напружень:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\mathbf{U}_{1,\lambda,m}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) &= \frac{2G}{R_j} \{ \mp Du_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp \\ &\quad \mp Du_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 + iDu_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \}, \\ \mathbf{F}\mathbf{U}_{2,\lambda,m}^{\pm(3)}(r_j, \varphi_j, z) &= \frac{2G}{R_j} \{ \mp [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R_j^2 + (2\sigma-3)D] \times \\ &\quad \times u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R_j^2 + \\ &\quad + (2\sigma-3)D] u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 + \\ &\quad + i[m^2 + \lambda^2 R_j^2 + (2\sigma-2)D] u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \}, \\ \mathbf{F}\mathbf{U}_{3,\lambda,m}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) &= \frac{G}{R_j} \{ \pm (D+m-1) u_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_{-1} \mp (D-m-1) \times \\ &\quad \times u_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_1 - i m u_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R_j, \varphi_j, z) \mathbf{e}_0 \}. \end{aligned}$$

Теореми додавання пов'язують базисні розв'язки рівняння Ляме в системах координат, суміщених з центрами циліндрів. Для розв'язків (3)–(5) справджуються такі теореми додавання [6]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) &= \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{1,\lambda,m}^{(33)\ell} \mathbf{U}_{t,\lambda,\ell}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2), \\ \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2) &= \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{\lambda,m}^{+(33)\ell} \mathbf{U}_{t,\lambda,\ell}^{+(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1), \\ \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_1, \varphi_1, z_1) &= \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{(12)} f_{\lambda,m}^{-(33)\ell} \mathbf{U}_{t,\lambda,\ell}^{-(3)}(\rho_2, \varphi_2, z_2), \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{s,t}^{(\alpha j)} &= \delta_{st} + \delta_{t1} \delta_{s2} \rho_{\alpha j} \frac{\partial}{\partial \rho_{\alpha j}}, \\ f_{1,\lambda,m}^{(33)\ell} &= (-1)^\ell u_{\lambda,m-\ell}^{+(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}), \quad f_{\lambda,m}^{\pm(33)\ell} = u_{\lambda,m-\ell}^{\pm(3)}(\rho_{12}, \varphi_{12}, z_{12}). \end{aligned}$$

**Розв'язувальна система рівнянь.** Використовуючи теореми додавання, подамо вектор переміщення  $\tilde{\mathbf{U}}$  у системі координат із початком у точці  $O_0$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \sum_{j=1}^4 \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(j)}(\lambda) \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \tilde{D}_{s,t}^{0j} u_{\lambda,m-\ell}^{-(3)}(\rho_{0j}, \varphi_{0j}, z_{0j}) \mathbf{U}_{t,\lambda,\ell}^{+(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda + \\ &\quad + \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_0, \varphi_0, z_0) d\lambda \end{aligned}$$

та з початком у точці  $O_\alpha$ ,  $\alpha = 1 \div 4$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{U} = & \sum_{s=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) + \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \times \right. \\ & \times \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{t,\ell}^{(0)}(\lambda) \tilde{D}_{s,t}^{(0\alpha)} u_{\lambda,\ell-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{U}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(\rho_\alpha, z_\alpha, \varphi_\alpha) \times \\ & \left. \times \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{t,\ell}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,\ell-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \right\} d\lambda. \end{aligned}$$

Задовольнивши граничні умови, задачу зводимо до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь стосовно невідомих коефіцієнтів  $A_{s,m}^{(j)}(\lambda)$ :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(0)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_0) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_0) \times \right. \\ & \quad \left. \times \sum_{\alpha=1}^N \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{t,\ell}^{(\alpha)}(\lambda) \tilde{D}_{s,t}^{(0\alpha)} u_{\lambda,\ell-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) \right\} = \\ & = \frac{T \sin(\lambda h/2)}{\pi \lambda} \delta_{m0}(1, 1, 0), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^3 \left\{ A_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{+(3)}(R_\alpha) + \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha) \times \right. \\ & \quad \times \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{t,\ell}^{(0)}(\lambda) \tilde{D}_{s,t}^{(0\alpha)} u_{\lambda,\ell-m}^{-(3)}(\rho_{0\alpha}, 0, \varphi_{0\alpha}) + \sum_{j \neq \alpha} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{-(3)}(R_\alpha) \times \\ & \quad \left. \times \sum_{t=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} A_{t,\ell}^{(j)}(\lambda) (-1)^m \tilde{D}_{s,t}^{(j\alpha)} u_{\lambda,\ell-m}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, 0, \varphi_{j\alpha}) \right\} = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{s,\lambda,m}^{\pm(3)}(R) &= (G_{s,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R), G_{s,\lambda,m}^{\pm(1)}(R), G_{s,\lambda,m}^{\pm(0)}(R)), \\ G_{1,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) &= \mp \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{1,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) = \pm \frac{2G}{R} D \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \\ G_{1,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) &= \frac{2G}{R} i D \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \\ G_{2,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) &= \mp \frac{2G}{R} [(m-1)(m-1+2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \\ G_{2,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) &= \mp \frac{2G}{R} [(m+1)(m+1-2\sigma) + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-3)D] \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \\ G_{2,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) &= \frac{2G}{R} i [m^2 + \lambda^2 R^2 + (2\sigma-2)D] \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \\ G_{3,\lambda,m}^{\pm(1)}(R) &= \mp \frac{G}{R} (D-m-1) \tilde{u}_{\lambda,m+1}^{\pm(3)}(R), \quad G_{3,\lambda,m}^{\pm(0)}(R) = -\frac{G}{R} i m \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R), \\ G_{3,\lambda,m}^{\pm(-1)}(R) &= \pm \frac{G}{R} (D+m-1) \tilde{u}_{\lambda,m-1}^{\pm(3)}(R), \quad \tilde{u}_{\lambda,m}^{\pm(3)}(R) = \begin{Bmatrix} \tilde{K}_m(\lambda R) \\ I_m(\lambda R) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** При кожному  $\lambda \neq 0$  та  $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha} \quad \forall j \neq \alpha = 1 \div 4$ ,  $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$ ,  $\alpha = 1 \div 4$ , оператор системи (7), (8) є фредгольмовим у гільбертовому просторі  $\ell_2$ .

Д о в е д е н н я. Шляхом перепозначення невідомих функцій:

$$A_{s,m}^{(j)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)}{K_m(|\lambda|R_j)}, \quad j = 1 \div 4, \quad A_{s,m}^{(0)}(\lambda) = \frac{\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda)}{I_m(\lambda R_0)}$$

і розв'язання системи відносно  $\tilde{A}_{s,m}^{(j)}(\lambda)$  систему (7), (8) можна подати у вигляді

$$\tilde{A}_{s,m}^{(\alpha)}(\lambda) + \sum_{j \neq \alpha} \sum_{p=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,\ell} \tilde{A}_{p,\ell}^{(j)}(\lambda) + \sum_{p=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_{2,\alpha,s,m}^{p,\ell} \tilde{A}_{p,\ell}^{(0)}(\lambda) = 0, \quad (9)$$

$$\tilde{A}_{s,m}^{(0)}(\lambda) + \sum_{j=1}^4 \sum_{p=1}^3 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_{3,s,m}^{j,p,\ell} \tilde{A}_{p,\ell}^{(j)}(\lambda) = F_{s,m}(\lambda). \quad (10)$$

Через громіздкість явну форму запису матричних коефіцієнтів пропустимо. Зауважимо, що модулі матричних коефіцієнтів  $|T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,\ell}|$ ,  $|T_{2,\alpha,s,m}^{p,\ell}|$ ,  $|T_{3,s,m}^{j,p,\ell}|$  оцінюються зверху скінченними лінійними комбінаціями виразів відповідно такого вигляду:

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{K_\ell(|\lambda|R_j)} K_{m-\ell}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|, \quad (11)$$

$$\left| \frac{I_m(\lambda R_\alpha)}{I_\ell(\lambda R_0)} I_{m-\ell}(\lambda \rho_{0\alpha}) \right|, \quad (12)$$

$$\left| \frac{K_m(|\lambda|R_0)}{K_\ell(|\lambda|R_j)} I_{m-\ell}(\lambda \rho_{j0}) \right|. \quad (13)$$

При цьому використано оцінки визначників розв'язних систем першої крайової задачі теорії пружності для внутрішності та зовнішності циліндра, одержані в роботі [5].

Для доведення теореми достатньо показати виконання таких умов для матричних коефіцієнтів (9), (10):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |T_{1,\alpha,s,m}^{j,p,\ell}|^2 < \infty,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |T_{2,\alpha,s,m}^{p,\ell}|^2 < \infty,$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |T_{3,s,m}^{j,p,\ell}|^2 < \infty.$$

Розглянемо теорему додавання гармонічних функцій:

$$u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, \varphi_j, z_j) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (-1)^\ell u_{\lambda,m-\ell}^{+(3)}(\rho_{j\alpha}, \varphi_{j\alpha}, z_{j\alpha}) u_{\lambda,\ell}^{-(3)}(\rho_\alpha, \varphi_\alpha, z_\alpha).$$

Це розвинення можна інтерпретувати як зображення функції  $u_{\lambda,m}^{+(3)}(\rho_j, z_j, \varphi_j)$  у вигляді ряду Фур'є за змінною  $\varphi_\alpha \in [0, 2\pi]$ . Тоді для цього ряду справджується рівність Парсеваля

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |K_{m-\ell}(|\lambda|\rho_{j\alpha})|^2 |I_{\ell}(\lambda\rho_{\alpha})|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K_m(|\lambda|\rho_j)|^2 d\varphi_{\alpha}. \quad (14)$$

З огляду на оцінки (11)–(13), для доведення теореми достатньо довести збіжність рядів

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_{\alpha})}{K_{\ell}(|\lambda|R_j)} K_{m-\ell}(|\lambda|\rho_{j\alpha}) \right|^2, \quad (15)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left| \frac{I_m(\lambda R_{\alpha})}{I_{\ell}(\lambda R_0)} I_{m-\ell}(\lambda\rho_{0\alpha}) \right|^2, \quad (16)$$

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \left| \frac{K_m(|\lambda|R_0)}{K_{\ell}(|\lambda|R_j)} I_{m-\ell}(\lambda\rho_{j0}) \right|^2. \quad (17)$$

У роботі [5] доведено оцінку

$$I_m(z)K_m(z) > \frac{c}{m^2 + 1} (1 + 2z)^{-1}, \quad m \geq 0, \quad z > 0,$$

де  $c > 0$  – деяка стала. Тоді ряд (15) можна мажорувати рядом

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |I_{\ell}(\lambda R_{\alpha}) I_m(\lambda R_j) K_{m-\ell}(|\lambda|\rho_{j\alpha})|^2.$$

Підставимо в тотожність (14)  $\rho_{\alpha} = R_{\alpha}$ , після чого помножимо обидві її частини на  $|I_m(\lambda R_j)|^2$  та підсумуємо за  $m$  від  $-\infty$  до  $\infty$ . В результаті отримаємо

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |I_m(\lambda R_j)|^2 |I_{\ell}(\lambda R_{\alpha})|^2 |K_{m-\ell}(|\lambda|\rho_{j\alpha})|^2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |I_m(\lambda R_j)|^2 |K_m(|\lambda|\rho_j)|^2 \Big|_{\rho_{\alpha}=R_{\alpha}} d\varphi_{\alpha}. \end{aligned} \quad (18)$$

З асимптотичних формул при  $m \rightarrow \infty$

$$I_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \frac{1}{m!} [1 + O(m^{-1})], \quad (19)$$

$$K_m(z) = \frac{2^{m-1}(m-1)!}{z^m} [1 + O(m^{-1})] \quad (20)$$

випливає, що ряд у лівій частині (18) збігається за умови  $\rho_j > R_j$ . Визначимо мінімальне значення  $\rho_j^{\min}$  для довільних значень кута  $\varphi_{\alpha}$ . Зі співвідношення між циліндричними координатами в системах із початками  $O_j$  і  $O_{\alpha}$  отримуємо, що при  $\rho_{\alpha} = R_{\alpha}$

$$\rho_j = \sqrt{\rho_{j\alpha}^2 + R_{\alpha}^2 + 2\rho_{j\alpha}R_{\alpha} \cos(\varphi_{\alpha} - \varphi_{j\alpha})}$$

і мінімальне значення  $\rho_j$  досягається при умові  $\varphi_{\alpha} - \varphi_{j\alpha} = \pi$  та дорівнює  $\rho_j^{\min} = \rho_{j\alpha} - R_{\alpha}$  ( $\rho_{j\alpha} > R_{\alpha}$  – природна геометрична умова в постановці задачі).

Таким чином, умова збіжності ряду буде задовольнятися, якщо  $\rho_j^{\min} > R_j$ , а це означає, що  $R_j + R_\alpha < \rho_{j\alpha}$ .

Аналогічно можемо записати рівність

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |K_m(|\lambda|R_0)|^2 |I_\ell(\lambda R_\alpha)|^2 |I_{m-\ell}(\lambda \rho_{0\alpha})|^2 = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} |K_m(|\lambda|R_0)|^2 |I_m(\lambda \rho_0)|^2 \Big|_{\rho_\alpha=R_\alpha} d\varphi_\alpha. \end{aligned} \quad (21)$$

З огляду на асимптотики (19), (20) ряд у формулі (21) є збіжним за умови  $\rho_0 < R_0$ . На поверхні  $\rho_\alpha = R_\alpha$  виконується співвідношення  $\rho_0^{\max} = \rho_{0\alpha} + R_\alpha$ . Тому умовою збіжності ряду (21) є  $\rho_0^{\max} < R_0$  або  $\rho_{0\alpha} + R_\alpha < R_0$ .

Збіжність ряду (17) при умові  $\rho_{0j} + R_j < R_0$  впливає зі збіжності ряду (21).  $\blacklozenge$

**Числовий приклад та обговорення.** Систему (7), (8) розв'язували чисельно методом редукції за параметром  $-m_{\max} \leq m \leq m_{\max}$  при фіксованих значеннях  $\lambda$ , які є вузлами квадратурної формули Лагерра. Коефіцієнт Пуассона матеріалу циліндричного зразка дорівнює  $\sigma = 0.38$ ,  $R_j = R$ ,  $j = 1 \div 4$ ,  $R_0 = 10R$ . За розв'язками системи (7), (8) знаходили головні компоненти тензора напружень у точках лінії, що з'єднує центри суміжних (3-ї та 4-ї) порожнин у площині  $z = 0$ .

На рис. 2 наведено графіки напружень  $\sigma_x/T$  та  $\sigma_y/T$  на лінії, що з'єднує центри 3-ї та 4-ї порожнин, для значень відношення  $h/R_0 = 1$  і  $h/R_0 = 0.5$  при  $a/R = 2$ . Характерною є концентрація напружень  $\sigma_x/T$  і  $\sigma_y/T$  відповідно у точках B і A, C (рис. 1).

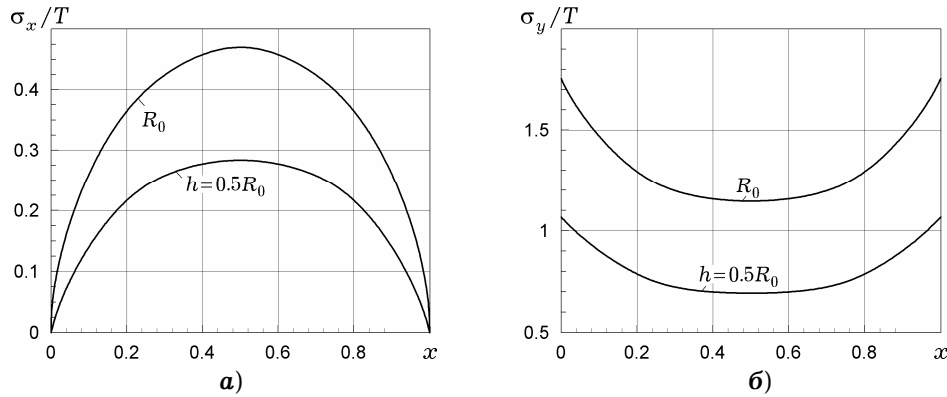


Рис. 2

На рис. 3 наведено графіки напружень  $\sigma_x/T$  і  $\sigma_y/T$  на лінії, що з'єднує центри 3-ї та 4-ї порожнин, для значень відносної відстані між порожнинами  $a/R_j = 1.2, 1.5, 2.0$ . З аналізу графіків можемо зробити висновок, що при зближенні порожнин концентрація напружень  $\sigma_x/T$  зменшується, а напруження  $\sigma_y/T$  – навпаки, зростають, при цьому форма кривих зберігається.

На рис. 4a наведено графіки напружень  $\sigma_z/T$  для значень відносного параметра товщини  $h/R_0 = 0.5, 1.0$ . Характерним є той факт, що напружен-



ня  $\sigma_z/T$  є від'ємними, на відміну від напружень  $\sigma_x/T$  і  $\sigma_y/T$ , додатних на лінії, що з'єднує центри порожнин. На рис. 4б наведено графіки напружень  $\sigma_z/T$  для значень відносної відстані між порожнинами  $a/R_j = 1.2, 1.5, 2.0$ . При зближенні порожнин напруження  $\sigma_z/T$  за абсолютною величиною зменшуються.

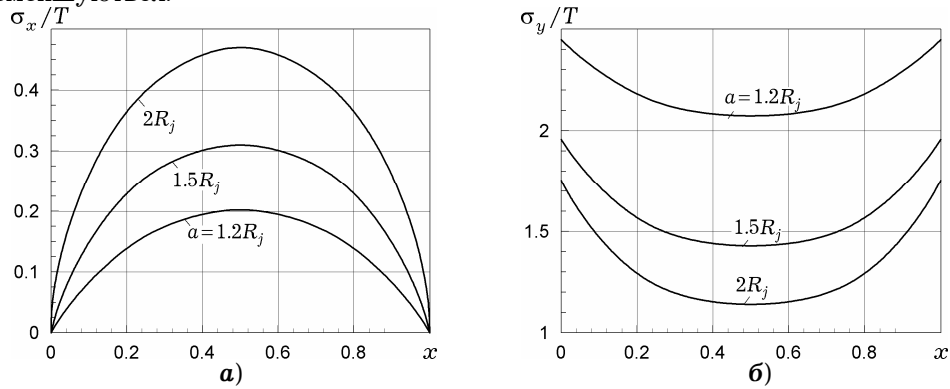


Рис. 3

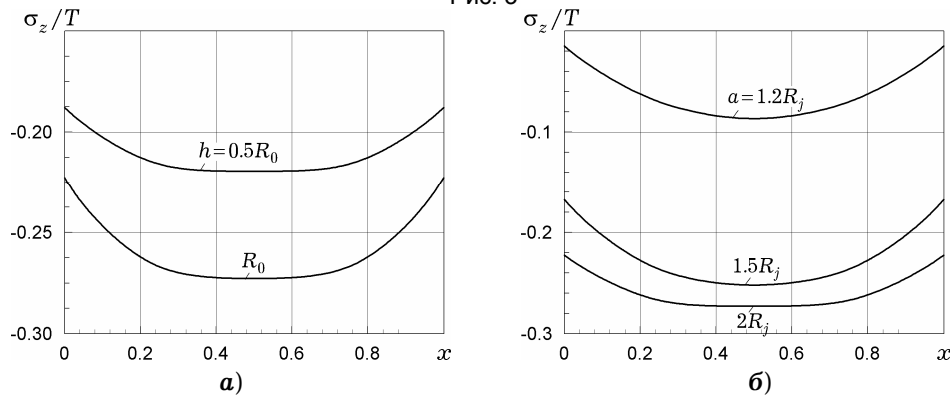


Рис. 4

Результати обчислень, наведені в табл. 1, свідчать про те, що граничні умови на поверхні порожнин виконуються з високою точністю. Чисельний аналіз засвідчує, що точність виконання граничних умов можна підвищувати, збільшуючи кількість утримуваних доданків  $m_{\max}$  у нескінченних сумах за методом редукції.

Таблиця 1. Перевірка граничних умов.

$\varphi$	0	$\pi/2$	$\pi$	$3\pi/2$
$\sigma_\rho$	$-5.2303 \cdot 10^{-7}$	$-5.22332 \cdot 10^{-7}$	$1.65745 \cdot 10^{-7}$	$1.65171 \cdot 10^{-7}$

Збіжність методу редукції перевірено в середній точці на осі, що з'єднує центри 3-ї та 4-ї порожнин, при значенні параметра  $a/R = 2.0$ . З даних, наведених у табл. 2, можна зробити висновок, що метод редукції для системи (7), (8) збігається досить швидко.

Таблиця 2. Збіжність методу редукції.

$m_{\max}$	3	5	10	20
$\sigma_x$	0.278206	0.283708	0.283728	0.283728
$\sigma_y$	0.694919	0.693852	0.693843	0.693843
$\sigma_z$	-0.220889	-0.219252	-0.219248	-0.219248

Таблиця 3. Порівняння результатів обчислень для 1-ї, 2-х і 4-х порожнин.

Кількість порожнин	1	2	4
$\sigma_x/T$	0.35721	0.293982	0.283728
$\sigma_y/T$	0.601521	0.728503	0.693843
$\sigma_z/T$	-0.212649	-0.202628	-0.219248

У табл. 3 наведено порівняння значень напружень в одній і тій же точці зразка для різної кількості порожнин, що оточують цю точку. З аналізу даних у табл. 3 можна зробити висновок, що напруження  $\sigma_z/T$  у поперечному до площині дії навантаження напрямку (уздовж осі зразка) практично не залежить від кількості наявних порожнин у зразку.

1. *Ванин Г. А.* Микромеханика композиционных материалов. – Киев: Наук. думка. – 1985. – 304 с.
2. *Гаршин О. К., Комар Л. А.* Прогнозирование прочности эластомерных зернистых композитов в зависимости от размеров частиц наполнителя // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2003. – **9**, № 3. – С. 278–286.
3. *Гордеев А. В.* Моделирование свойств композиционного материала, армированного короткими волокнами // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2010. – **16**, № 1. – С. 106–116.
4. *Макарова Е. Ю., Соколжин Ю. В.* Нелинейные многоуровневые модели механики деформирования и разрушения композитов // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2013. – **19**, № 3. – С. 395–405.
5. *Николаев А. Г.* Обоснование метода Фурье в основных краевых задачах теории упругости для некоторых пространственных канонических областей // Доп. НАН України. – 1998. – № 2. – С. 78–83.
6. *Николаев А. Г.* Теоремы сложения решений уравнения Ламе. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1993. – 109 с. – Деп. в ГНТБ України 21.06.93, № 1178–Ук 93.
7. *Николаев А. Г., Проценко В. С.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «Харьк. авиац. ин-т», 2011. – 344 с.
8. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Локальная математическая модель зернистого композиционного материала // Вісн. Харк. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2010. – **922**. – С. 4–19.
9. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Математическая модель напряженно-деформированного состояния пористого материала // Вопросы проектирования и производства конструкций летательных аппаратов. – 2009. – Вып. 2 (58). – С. 48–58.
10. *Николаев А. Г., Танчик Е. А.* Развитие локальной модели напряженного состояния пористого материала // Авиаци.-косм. техника и технология. – 2013. – № 1 (98). – С. 14–18.
11. *Токовий Ю. В.* Осесиметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
12. *Хорошун Л. П.* Математические модели и методы механики стохастических композитных материалов // Прикл. механика. – 2000. – **36**, № 10. – С. 30–62.  
Te same: *Khoroshun L. P.* Mathematical models and methods of the mechanics of stochastic composites // Int. Appl. Mech. – 2000. – **36**, No 10. – P. 1284–1316.
13. *Черноус Д. А., Петроковец Е. М., Конек Д. А., Шилько С. В.* Методы расчета механических характеристик пороматериалов малой плотности (обзор) // Механика композиц. материалов и конструкций. – 2001. – **7**, № 4. – С. 533–545.
14. *Meleshko V. V., Tokovyy Yu. V.* Equilibrium of an elastic finite cylinder under axisymmetric discontinuous normal loadings // J. Eng. Math. – 2013. – **78**. – P. 143–166.
15. *Zhong Z., Sun Q. P.* Analysis of a transversely isotropic rod containing a single cylindrical inclusion with axisymmetric eigenstrains // Int. J. Solids Struct. – 2002. – **39**, No. 23. – P. 5753–5765.

## НАПРЯЖЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОМ КРУГОВОМ ЦИЛИНДРЕ С ЧЕТЫРЬМЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ПОЛОСТЯМИ

Обобщенным методом Фурье получено аналитически-численное решение неосесимметричной краевой задачи теории упругости для цилиндрического тела с четырьмя цилиндрическими полостями. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, оператор которой является фредгольмовым. Исследована сходимость метода редукции для решения данной системы. Получены зависимости главных компонент тензора напряжений от геометрических параметров.

## STRESSES IN AN INFINITE CIRCULAR CYLINDER WITH FOUR CYLINDRICAL CAVITIES

*An analytical and numerical solution of the nonaxisymmetric boundary value problem of elasticity theory for a cylindrical body with four cylindrical cavities is obtained by generalized Fourier method. The problem is reduced to an infinite system of linear algebraic equations whose operator is a Fredholm operator. The convergence of reduction method for solving this system is investigated. The dependences of the principal components of the stress tensor on geometric parameters are obtained.*

Нац. аерокосм. ун-т  
ім. М. С. Жуковського «ХАІ», Харків

Одержано  
30.12.13