

**ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЛОСКОЇ МАГНІТОЕЛЕКТРОПРУЖНОСТІ ДЛЯ БІМАТЕРІАЛУ З ТРИЩИНАМИ ТА ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ**

*На основі застосування формалізму Stroh і теорії функції комплексної змінної отримано дуальні інтегральні рівняння магнітоелектропружності для біматеріалу. При цьому вперше побудовано інтегральні подання комплексних потенціалів Stroh і явні вирази для всіх ядер лише через параметри і матриці використаного формалізму. Це істотно зменшує кількість обчислень, необхідних для формування визначальних рівнянь методів типу граничних елементів. Також записано вирази для головних частин комплексних потенціалів, що дає можливість розглядати задане на безмежності однорідне магнітоелектромеханічне навантаження. Отримані рівняння разом із розробленими раніше моделями тонких деформівних включень впроваджено в обчислювальну схему граничноелементного методу функцій стрибка. Розрахунок тестових задач засвідчив високу точність та ефективність запропонованого підходу. Отримано розв'язки нових задач для магнітоелектропружності біматеріалу з тонким включенням.*

**Вступ.** Магнітоелектричні композити [2], які з огляду на механічне поєднання п'єзоелектричної і п'єземагнітної компонент дають можливість пов'язати всередині одного матеріалу три різних поля (механічне, електричне та магнітне), все частіше використовуються при розробці та виготовленні приладових і сенсорних систем, мікроелектромеханічних систем та інших мініатюрних високофункціональних інтелектуальних пристроїв.

При вивченні магнітоелектропружних (МЕП) матеріалів найчастіше використовують лінеаризовані співвідношення [2, 16] теорії анізотропних діелектриків [1]. У цьому випадку у математичному плані задача зводиться до лінійних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними, що дає можливість застосовувати до їхнього розв'язування і методи інтегральних рівнянь.

Як правило, побудова інтегральних рівнянь лінійної магнітоелектропружності складається з двох етапів (див., наприклад, [6–8, 13, 16–22]): 1) конструювання теорем взаємності робіт та інтегральних співвідношень типу Сомільяни; 2) отримання фундаментального розв'язку (чи функції Гріна). Якщо перше завдання розв'язується однотипними методами як у двовимірному, так і у тривимірному випадках, то для вирішення другого використовують різноманітні математичні підходи. Зокрема, для плоских задач широкого використання набув формалізм Stroh [8, 16, 18], який дозволяє розв'язок задач магнітоелектропружності подати у компактній матрично-векторній формі запису через п'ять аналітичних функцій комплексного аргументу. Для побудови фундаментальних розв'язків тривимірних задач для біматеріалів формалізм Stroh також є застосовним [11].

У роботах [4, 12, 14, 15] було з'ясовано, що інтегральні рівняння плоских магнітоелектропружності та термо(електро)пружності можна отримати із використанням єдиного підходу, що поєднує формалізм Stroh із методами теорії функції комплексної змінної (ТФКЗ). Перевагою запропонованої методології є отримання у доволі простий спосіб компактних виразів для ядер дуальних інтегральних рівнянь і прозора фізична інтерпретація результатів.

У часткових випадках паралельної до межі поділу матеріалів тріщини методи ТФКЗ і формалізм Stroh використано для побудови відповідних інтегральних рівнянь електропружності [21] і магнітоелектропружності [17]. Проте загального підходу до побудови інтегральних рівнянь для МЕП біматеріалу з довільною геометрією тріщин чи отворів на основі застосування методів ТФКЗ досі не було отримано.

Тому метою цієї роботи є застосування ТФКЗ і формалізму Stroh до побудови інтегральних рівнянь магнітоелектропружності для біматеріалу з отворами, тріщинами та тонкими включеннями довільної геометрії. Це також дає можливість отримати явні вирази для ядер дуальних інтегральних рівнянь, що значно спрощує їхнє впровадження в обчислювальні схеми методів граничних елементів.

**1. Основні співвідношення магнітоелектропружності. Формалізм Stroh.** Розглянемо стаціонарні (квазістаціонарні) фізико-механічні поля, що діють в анізотропному циліндричному тілі з МЕРП матеріалу, з яким пов'язана глобальна система координат  $Ox_1x_2x_3$  (вісь  $Ox_3$  спрямована уздовж твірної циліндра). Вивчатимемо лише двовимірні електричні, магнітні та механічні поля, коли переміщення, електричний та магнітний потенціали точок цього тіла не змінюються за координатою  $x_3$ :  $u_{i,3} \equiv 0$ ,  $E_3 = -\phi_{,3} \equiv 0$ ,  $H_3 = -\psi_{,3} \equiv 0$ , і є функціями лише змінних  $x_1$  та  $x_2$ . Тобто електромагнітні та механічні поля у кожному нормальному до осі  $x_3$  перерізі  $S$  тіла є однаковими, отже, задача зводиться до вивчення цих полів у деякій плоскій області  $S$ . Рівняння рівноваги і теорема Гаусса для електричного й магнітного полів у стаціонарному випадку набудуть вигляду [2, 16]

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad D_{i,i} - q = 0, \quad B_{i,i} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Тут  $\sigma_{ij}$  – компоненти тензора напружень;  $f_i$  – компоненти вектора об'ємних сил;  $D_i$  – електричне зміщення;  $q$  – густина вільних зарядів, яка для діелектрика, зазвичай, дорівнює нулю;  $B_i$  – компоненти вектора магнітної індукції. У формулах приймаємо правило Айнштайна підсумовування за індексом, що повторюється. Кома в нижніх індексах означає операцію диференціювання за координатою, індекс якої стоїть після коми:  $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$ .

Визначальні співвідношення лінійної магнітоелектропружності відповідно до [2, 16] мають такий вигляд:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} - e_{pij} E_p - h_{pij} H_p, \quad D_i = e_{ikm} \varepsilon_{km} + \alpha_{ip} E_p + \beta_{ip} H_p, \quad B_i = h_{ikm} \varepsilon_{km} + \beta_{ip} E_p + \mu_{ip} H_p, \quad (2)$$

де  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  – малі деформації;  $E_i = -\phi_{,i}$ ,  $H_i = -\psi_{,i}$  – компоненти векторів напруженості електричного та магнітного полів відповідно;  $u_i$  – складові вектора переміщень точок тіла;  $\phi$ ,  $\psi$  – електричний і магнітний потенціали;  $C_{ijkl}$  – компоненти тензора пружних сталих (тензора жорсткості; модулі пружності);  $e_{ijk}$ ,  $h_{ijk}$  – п'єзоелектричні та п'єзомагнітні сталі;  $\alpha_{ij}$ ,  $\mu_{ij}$ ,  $\beta_{ij}$  – діелектрична, магнітна та електромагнітна проникності матеріалу.

З використанням узагальнених величин [5, 13, 16]

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i &= u_i, \quad \tilde{u}_4 = \phi, \quad \tilde{u}_5 = \psi, \quad \tilde{f}_i = f_i, \quad \tilde{f}_4 = -q, \quad \tilde{f}_5 = 0, \\ \tilde{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}, \quad \tilde{\sigma}_{4j} = D_j, \quad \tilde{\sigma}_{5j} = B_j, \quad \tilde{C}_{ijkl} = C_{ijkl}, \\ \tilde{C}_{ij4m} &= e_{mij}, \quad \tilde{C}_{4jkm} = e_{jkm}, \quad \tilde{C}_{4j4m} = -\alpha_{jm}, \\ \tilde{C}_{ij5m} &= h_{mij}, \quad \tilde{C}_{5jkm} = h_{jkm}, \quad \tilde{C}_{5j5m} = -\mu_{jm}, \\ \tilde{C}_{4j5m} &= -\beta_{jm}, \quad \tilde{C}_{5j4m} = -\beta_{jm}, \quad i, k = 1, 2, 3, \quad j, m = 1, 2, \end{aligned} \quad (3)$$

визначальні співвідношення (2) запишемо в уніфікованій компактній формі:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}_{ijkl} \tilde{u}_{k,m}, \quad i, k = 1, \dots, 5, \quad j, m = 1, 2.$$

З урахуванням позначень (3) балансові рівняння (1) стаціонарних механіч-

них, електричних і магнітних полів набудуть вигляду

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + \tilde{f}_i \equiv \tilde{C}_{ijkm} \tilde{u}_{k,jm} + \tilde{f}_i = 0, \quad i, k = 1, \dots, 5, \quad j, m = 1, 2. \quad (4)$$

Згідно з формалізмом Stroh загальний однорідний розв'язок рівнянь (4) можна подати як [5, 8, 15, 16, 18, 20]

$$\tilde{\mathbf{u}} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}\mathbf{f}(z_*)], \quad \tilde{\boldsymbol{\phi}} = 2 \operatorname{Re}[\mathbf{B}\mathbf{f}(z_*)], \quad (5)$$

де  $\tilde{\mathbf{u}}$  – розширений вектор переміщень;  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  – розширена функція напружень;  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  – комплексні матриці, компоненти яких залежать лише від МЕР сталих  $\tilde{C}_{ijkm}$ ;  $\mathbf{f}(z_*) = [F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_5(z_5)]^\top$  – вектор комплексних потенціалів Stroh  $F_\alpha(z_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ , які є аналітичними функціями своїх аргументів  $z_\alpha = x_1 + p_\alpha x_2$ ;  $p_\alpha$  – комплексні власні значення задачі формалізму Stroh з додатною уявною частиною. Позначення  $z_*$  використано для опису сукупності комплексних змінних  $z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ .

Функція  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$  дає змогу обчислити значення розширених напружень у довільній точці області [8, 16, 18]:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 \equiv [\tilde{\sigma}_{i1}] = -\tilde{\boldsymbol{\phi}}_{,2}, \quad \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 \equiv [\tilde{\sigma}_{i2}] = \tilde{\boldsymbol{\phi}}_{,1}. \quad (6)$$

Вектори-стовпці  $\mathbf{a}_\alpha$  та  $\mathbf{b}_\alpha$  матриць  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5]$  і  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5]$ , а також сталі  $p_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, 5$ , визначаються із задачі на власні значення формалізму Stroh:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \\ \mathbf{N}_3 & \mathbf{N}_1^\top \end{bmatrix}, \quad \begin{aligned} \mathbf{N}\boldsymbol{\xi} &= p\boldsymbol{\xi}, \\ \mathbf{N}^\top\boldsymbol{\eta} &= p\boldsymbol{\eta}, \end{aligned}$$

де  $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^\top$ ,  $\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}^{-1}$ ,  $\mathbf{N}_3 = \mathbf{R}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{R}^\top - \mathbf{Q}$ ;  $Q_{ik} = \tilde{C}_{i1k1}$ ,  $T_{ik} = \tilde{C}_{i2k2}$ ,  $R_{ik} = \tilde{C}_{i1k2} = \tilde{C}_{k2i1}$ ;  $\boldsymbol{\xi} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]^\top$  і  $\boldsymbol{\eta} = [\mathbf{b}, \mathbf{a}]^\top$  – правий і лівий власні вектори матриці  $\mathbf{N}$ ; символом « $\top$ » позначено операцію транспонування. Вектори  $\boldsymbol{\xi}_\alpha$  та  $\boldsymbol{\eta}_\beta$  для власних значень  $p_\alpha$ ,  $p_\beta$  нормуються умовою

$$\boldsymbol{\xi}_\alpha^\top \boldsymbol{\eta}_\beta = \delta_{\alpha\beta}. \quad (7)$$

Записавши умови ортогональності (7) у формі [18]

$$\mathbf{B}^\top \mathbf{A} + \mathbf{A}^\top \mathbf{B} = \mathbf{I}, \quad \mathbf{B}^\top \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}^\top \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{B}^\top + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{B}}^\top = \mathbf{0}, \quad \mathbf{B}\mathbf{A}^\top + \bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{I}, \quad (8)$$

на основі (5) легко обчислити значення комплексних потенціалів Stroh через дійсні розширені функції переміщень  $\tilde{\mathbf{u}}$  та функції напружень  $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ :

$$\mathbf{f}(z_*) = \mathbf{A}^\top \tilde{\boldsymbol{\phi}} + \mathbf{B}^\top \tilde{\mathbf{u}}. \quad (9)$$

**2. Побудова інтегральних подань комплексних потенціалів для біматеріалу.** Розглянемо плоску задачу магнітоелектропружності для двох МЕР півпросторів  $x_2 > 0$  та  $x_2 < 0$  (при розгляді яких вивчаємо лише нормальні до осі  $x_3$  перерізи (півплощини)  $S_1$  та  $S_2$ , як зображено на рис. 1), поєднаних уздовж площини  $x_2 = 0$  так, що виконуються умови ідеального магнітоелектромеханічного контакту:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{u}}^{(1)}(x_1, x_2)|_{x_2=0} &= \tilde{\mathbf{u}}^{(2)}(x_1, x_2)|_{x_2=0}, \\ \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(1)}(x_1, x_2)|_{x_2=0} &= \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(2)}(x_1, x_2)|_{x_2=0} \quad \forall x_1 \in (-\infty, \infty). \end{aligned} \quad (10)$$

Кожен із півпросторів містить системи тунельних порожнин, яким в областях  $S_1$  та  $S_2$  відповідають отвори, обмежені плоскими контурами  $\Gamma_1 = \cup_j \Gamma_j^{(1)}$  та  $\Gamma_2 = \cup_j \Gamma_j^{(2)}$  відповідно (рис. 1).

Для побудови інтегральних подань комплексних потенціалів Stroh для спряжених півпросторів скористаємося інтегральною формулою Коші [3], що пов'язує контурні значення довільної аналітичної функції  $\phi(\tau)$  на межі  $\partial S$  області  $S$  із її значенням  $\phi(z)$  усередині та зовні цієї області:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} \phi(z) & \forall z \in S, \\ 0 & \forall z \notin S. \end{cases} \quad (11)$$

Тут  $\tau, z \in \mathbb{C}$  – комплексні змінні, що окреслюють розташування відповідно точок витоку та спостереження. При цьому, якщо область  $S$  є необмеженою, то вважається, що при  $z \rightarrow \infty$  функція  $\phi(z)$  прямує до нуля.

Запишемо подання типу (11) для комплексних потенціалів  $\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})$  і  $\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})$ , аналітичних відповідно в областях  $S_1$  та  $S_2$ .

При цьому, зважаючи на те, що задані інтегралами Коші функції прямують до нуля на безмежності, тобто описують лише збурену складову, повний розв'язок подамо як суму цієї збуреної частини та заданої потенціалами  $\mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)})$ ,  $\mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)})$  однорідної складової, що також задовольняє крайові умови (10):

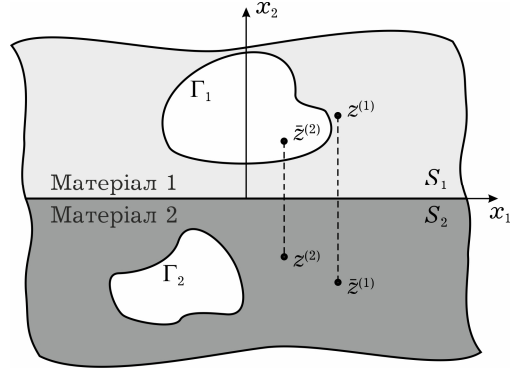


Рис. 1. Схема задачі.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(x_1), \quad \text{Im } z_*^{(1)} > 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - \bar{z}_\beta^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_\beta^{(1)}} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \text{Im } z_\beta^{(1)} > 0, \quad (13)$$

$$\int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - z_\beta^{(1)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - z_\beta^{(1)}} \mathbf{f}^{(2)}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \text{Im } z_\beta^{(1)} > 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \left\langle \frac{dx_1}{x_1 - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(x_1), \quad \text{Im } z_*^{(2)} < 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{d\tau_*^{(1)}}{\tau_*^{(1)} - z_\beta^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(1)}(\tau_*^{(1)}) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - z_\beta^{(2)}} \mathbf{f}^{(1)}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \text{Im } z_\beta^{(2)} < 0, \quad (16)$$

$$\int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{d\tau_*^{(2)}}{\tau_*^{(2)} - \bar{z}_\beta^{(2)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(2)}(\tau_*^{(2)}) - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{x_1 - \bar{z}_\beta^{(2)}} \mathbf{f}^{(2)}(x_1) = \mathbf{0}, \quad \text{Im } z_\beta^{(2)} < 0. \quad (17)$$

Тут  $\langle F(z_*) \rangle = \text{diag}[F_1(z_1), F_2(z_2), \dots, F_5(z_5)]$ ;  $z_\alpha^{(j)} = x_1 + p_\alpha^{(j)} x_2$ ,  $j = 1, 2$ ; верхнім індексом «(1)» чи «(2)» позначено належність до відповідних півпросторів. Додатним напрямом обходу контурів є той, при якому зайнята тілом область залишається зліва.

Отримані інтегральні подання можна істотно спростити, щоб зробити зручними для застосування у схемах методу граничних елементів, якщо у формулах (12)–(17) виключити інтеграли уздовж межі поділу матеріалів, оскільки внаслідок цього у результуючих рівняннях зникнуть невластні інтеграли по необмеженій області. При цьому слід врахувати відповідні крайові умови (10).

З урахуванням зв'язку (9) інтегральні подання (12)–(17) запишемо так:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{A}_1^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(1)})), \quad \text{Im } z_*^{(1)} > 0, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_1^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \bar{\mathbf{B}}_1^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = -\bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}), \quad \text{Im } z_\beta^{(1)} > 0, \quad (19)$$

$$\mathbf{A}_2^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_2^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) = \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)}), \quad \text{Im } z_\beta^{(1)} > 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{A}_2^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_2^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(2)})), \quad \text{Im } z_*^{(2)} < 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\mathbf{A}_1^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = -\mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}), \quad \text{Im } z_\beta^{(2)} < 0, \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_2^\top \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{B}}_2^\top \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) = \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)}), \quad \text{Im } z_\beta^{(2)} < 0. \quad (23)$$

Тут  $\mathbf{I}_1 = \text{diag}[1, 0, 0, 0, 0]$ ,  $\mathbf{I}_2 = \text{diag}[0, 1, 0, 0, 0]$ ,  $\mathbf{I}_3 = \text{diag}[0, 0, 1, 0, 0]$  і т. д.,

$$\mathbf{m}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\Phi}(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \quad \mathbf{p}(z_\beta^{(j)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{\mathbf{u}}(x_1) dx_1}{x_1 - z_\beta^{(j)}}, \quad (24)$$

$$\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\tau_*^{(j)}}{\tau_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)}), \quad \bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) = \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{d\bar{\tau}_*^{(j)}}{\bar{\tau}_*^{(j)} - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \overline{\mathbf{f}^{(j)}(\tau_*^{(j)})}. \quad (25)$$

За допомогою рівнянь (19), (20), (22), (23) виразимо інтеграли (24) по безмежному проміжку через інтеграли (25) уздовж скінчених контурів  $\Gamma_j$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m}(z_\beta^{(1)}) &= -(\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-\top} (\bar{\mathbf{B}}_1^{-\top} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{B}_2^{-\top} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)})), \\ \mathbf{p}(z_\beta^{(1)}) &= -(\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-\top} (\bar{\mathbf{A}}_1^{-\top} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{A}_2^{-\top} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)})), \\ \mathbf{m}(z_\beta^{(2)}) &= -(\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} (\mathbf{B}_1^{-\top} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{B}}_2^{-\top} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)})), \\ \mathbf{p}(z_\beta^{(2)}) &= -(\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} (\mathbf{A}_1^{-\top} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \bar{\mathbf{A}}_2^{-\top} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)})). \end{aligned} \quad (26)$$

Підставивши (26) у формули (18), (21), отримаємо подання комплексних потенціалів Stroh для біматеріалу, що вже не містять невластних інтегралів уздовж безмежних проміжків:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{q}_1(z_*^{(1)}) + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{G}_1^{(1)} \bar{\mathbf{q}}_1(z_\beta^{(1)}) + \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{q}_2(z_\beta^{(1)})), \quad \text{Im } z_*^{(1)} > 0, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} \mathbf{q}_2(z_*^{(2)}) - \\ &- \frac{1}{2\pi i} \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta (\mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{q}_1(z_\beta^{(2)}) + \mathbf{G}_2^{(2)} \bar{\mathbf{q}}_2(z_\beta^{(2)})), \quad \text{Im } z_*^{(2)} < 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Тут

$$\mathbf{G}_1^{(1)} = -[\mathbf{A}_1^\top (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{B}}_1^{-\top} + \mathbf{B}_1^\top (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{A}}_1^{-\top}],$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_2^{(1)} &= -[\mathbf{A}_1^\top (\bar{\mathbf{A}}_1 \bar{\mathbf{B}}_1^{-1} - \mathbf{A}_2 \mathbf{B}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{B}_2^{-\top} + \mathbf{B}_1^\top (\bar{\mathbf{B}}_1 \bar{\mathbf{A}}_1^{-1} - \mathbf{B}_2 \mathbf{A}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{A}_2^{-\top}], \\
\mathbf{G}_1^{(2)} &= -[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{B}_1^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \mathbf{A}_1^{-\top}], \\
\mathbf{G}_2^{(2)} &= -[\mathbf{A}_2^\top (\mathbf{A}_1 \mathbf{B}_1^{-1} - \bar{\mathbf{A}}_2 \bar{\mathbf{B}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{B}}_2^{-\top} + \mathbf{B}_2^\top (\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1^{-1} - \bar{\mathbf{B}}_2 \bar{\mathbf{A}}_2^{-1})^{-\top} \bar{\mathbf{A}}_2^{-\top}]. \quad (29)
\end{aligned}$$

Використовуючи тензори імпедансу [8, 18]  $\mathbf{M} = -i\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}$ ,  $\mathbf{M}^{-1} = i\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$  і враховуючи властивість  $\mathbf{M} + \bar{\mathbf{M}} = -i\mathbf{A}^{-\top}\mathbf{A}^{-1}$  цих матриць [8, 18], вирази (29) перепишемо у простішому вигляді:

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1^{(1)} &= [\bar{\mathbf{A}}_1^{-1}(\bar{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_2)^{-1}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\mathbf{A}_1]^\top, \\
\mathbf{G}_2^{(1)} &= -i[\mathbf{A}_2^{-1}(\bar{\mathbf{M}}_1 + \mathbf{M}_2)^{-1}\mathbf{A}_1^{-\top}]^\top, \\
\mathbf{G}_1^{(2)} &= i[\mathbf{A}_1^{-1}(\mathbf{M}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2)^{-1}\mathbf{A}_2^{-\top}]^\top, \\
\mathbf{G}_2^{(2)} &= [\bar{\mathbf{A}}_2^{-1}(\mathbf{M}_1 + \bar{\mathbf{M}}_2)^{-1}(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2)\mathbf{A}_2]^\top. \quad (30)
\end{aligned}$$

Інтеграл (25) можна записати через крайові значення фізично значущих функцій розширених переміщень  $\tilde{\mathbf{u}}$  та напружень  $\tilde{\mathbf{t}} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j n_j$ . Скажімо, з огляду на (6),

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} = \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s} = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2 n_2 - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1 n_1 = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j n_j = -\tilde{\mathbf{t}}, \quad (31)$$

де  $s$  – дійсна дугова координата контурів  $\Gamma_1$  чи  $\Gamma_2$ ;  $\tilde{\mathbf{t}}$  – розширений вектор напружень;  $n_j$  – компоненти одиничного вектора  $\mathbf{n}$  зовнішньої нормалі. Враховуючи (9), (31) та інтегруючи (25) частинами, отримаємо

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}_j(z_\beta^{(i)}) &= \int_{\Gamma_j} \langle \ln(\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \rangle \mathbf{A}_j^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
&\quad - \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{n_2(s) - p_*^{(j)} n_1(s)}{\tau_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \mathbf{B}_j^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds, \\
\bar{\mathbf{q}}_j(z_\beta^{(i)}) &= \int_{\Gamma_j} \langle \ln(\bar{\tau}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}) \rangle \bar{\mathbf{A}}_j^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
&\quad - \int_{\Gamma_j} \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_*^{(j)} n_1(s)}{\bar{\tau}_*^{(j)}(s) - z_\beta^{(i)}} \right\rangle \bar{\mathbf{B}}_j^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds. \quad (32)
\end{aligned}$$

Тут враховано, що  $d\tau_\alpha = dx_1 + p_\alpha dx_2 = -(n_2(s) - p_\alpha n_1(s))ds$ , де  $ds = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2}$  – дійсний диференціал дуг  $\Gamma_1$  чи  $\Gamma_2$ .

Тепер із урахуванням (32) інтегральні подання (27), (28) для комплексних потенціалів набудуть вигляду

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)}) &= \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \langle \ln(\tau_*^{(1)}(s) - z_*^{(1)}) \rangle \mathbf{A}_1^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds + \\
&\quad + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \sum_{\beta=1}^5 \langle \ln(\bar{\tau}_\beta^{(1)}(s) - z_*^{(1)}) \rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \left\langle \frac{n_2(s) - p_*^{(1)} n_1(s)}{\tau_*^{(1)}(s) - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{B}_1^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_\beta^{(1)} n_1(s)}{\bar{\tau}_\beta^{(1)}(s) - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_1^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\tau_\beta^{(2)}(s) - z_*^{(1)}) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \mathbf{A}_2^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - p_\beta^{(2)} n_1(s)}{\tau_\beta^{(2)}(s) - z_*^{(1)}} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \mathbf{B}_2^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds, \tag{33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)}) & = \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \left\langle \ln(\tau_\beta^{(2)}(s) - z_*^{(2)}) \right\rangle \mathbf{A}_2^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{\tau}_\beta^{(2)}(s) - z_*^{(2)}) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_2^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \left\langle \frac{n_2(s) - p_*^{(2)} n_1(s)}{\tau_*^{(2)}(s) - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{B}_2^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - \bar{p}_\beta^{(2)} n_1(s)}{\bar{\tau}_\beta^{(2)}(s) - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_2^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds - \\
& - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\tau_\beta^{(1)}(s) - z_*^{(2)}) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \mathbf{A}_1^\top \tilde{\mathbf{t}}(s) ds + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(s) - p_\beta^{(1)} n_1(s)}{\tau_\beta^{(1)}(s) - z_*^{(2)}} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \mathbf{B}_1^\top \tilde{\mathbf{u}}(s) ds. \tag{34}
\end{aligned}$$

Співвідношення (33), (34) дозволяють на основі (5) отримати такі інтегральні подання розширених переміщень у біматеріалі із отворами:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) & = \begin{cases} 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}_1 \mathbf{f}^{(1)}(z_*^{(1)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_1, \\ 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}_2 \mathbf{f}^{(2)}(z_*^{(2)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_2, \end{cases} = \\
& = \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \tilde{\mathbf{u}}_\infty(\boldsymbol{\xi}). \tag{35}
\end{aligned}$$

Тут  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , функція впливу безмежно віддаленого навантаження задана співвідношенням

$$\tilde{\mathbf{u}}_\infty(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}_1 \mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_1, \\ 2 \operatorname{Re}[\mathbf{A}_2 \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_2, \end{cases}$$

а ядра відповідно до (33), (34) означені такими виразами:

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1$  :

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) & = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left\langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})) \right\rangle \mathbf{A}_1^\top \right\} + \\
& + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^\top \right\}, \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) & = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{B}_1^\top \right\} + \\
& + \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_1^\top \right\};
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1$  :

$$\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \ln(Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_2^\top \right\},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_2^\top \right\}; \\
\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 : \\
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \langle \ln(Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_1^\top \right\}, \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_1^\top \right\}; \\
\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 : \\
\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \langle \ln(Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{A}_2^\top \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_2^\top \right\}, \\
\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{B}_2^\top \right\} - \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_2^\top \right\}. \tag{36}
\end{aligned}$$

У співвідношеннях (36)  $Z_*^{(i)}(\mathbf{x}) = x_1 + p_*^{(i)} x_2$ .

На основі (5), (6), (33) і (34) можемо також побудувати інтегральне подання для розширеного тензора напружень всередині біматеріалу:

$$\begin{aligned}
\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_j(\boldsymbol{\xi}) &= \begin{cases} 2 \text{Re} [\mathbf{B}_1 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \rangle \mathbf{f}'(z_*^{(1)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_1, \\ 2 \text{Re} [\mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \mathbf{f}'(z_*^{(2)})] & \forall \boldsymbol{\xi} \in S_2, \end{cases} = \\
&= \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}_j^\infty(\boldsymbol{\xi}). \tag{37}
\end{aligned}$$

У (37) ядра означені так:

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1 :$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \left[ \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{A}_1^\top + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^\top \right] \right\}, \\
\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \rangle \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})]^2} \right\rangle \mathbf{B}_1^\top + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})]^2} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(1)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_1^\top \right] \right\};
\end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1 :$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)}}{Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_2^\top \right\}, \\
\mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_1 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(1)} \rangle \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})]^2} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(1)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_2^\top \right\};
\end{aligned}$$



$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 :$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_1^\top \right\}, \\ \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \sum_{\beta=1}^5 \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_\beta^{(1)} n_1(\mathbf{x})}{[Z_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})]^2} \right\rangle \mathbf{G}_1^{(2)} \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{B}_1^\top \right\}; \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2 :$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= -\frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \left[ \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{A}_2^\top - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{\delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)}}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_2^\top \right] \right\}, \\ \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{B}_2 \langle \delta_{2j} - \delta_{1j} p_*^{(2)} \rangle \left[ \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - p_*^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{Z_*^{(2)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{B}_2^\top - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{\beta=1}^5 \left\langle \frac{n_2(\mathbf{x}) - \bar{p}_\beta^{(2)} n_1(\mathbf{x})}{\bar{Z}_\beta^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(2)}(\boldsymbol{\xi})} \right\rangle \mathbf{G}_2^{(2)} \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{B}}_2^\top \right] \right\}. \end{aligned} \quad (38)$$

Явні вирази (38) для ядер вперше записано у цілком завершеному вигляді лише через параметри та матриці формалізму Stroh, що має істотні переваги при побудові обчислювальних процедур методу граничних елементів порівняно зі звичним їх поданням у формі похідних від ядер (36):

$$D_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijmn} \frac{\partial}{\partial \xi_n} U_{mk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}), \quad S_{ijk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \tilde{C}_{ijmn} \frac{\partial}{\partial \xi_n} T_{mk}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}).$$

Завдяки цьому, зокрема, використання виразів (38) практично на порядок скорочує час розрахунку матриці жорсткості системи, оскільки не вимагає постійного визначення добутку розширеного тензора магнітоелектропружних сталей на похідні від ядер для переміщення.

Легко зауважити, що співвідношення (35) є розширеною тотожністю Сомільяни для магнітоелектропружності (5.43) з [16]. Таким чином, згідно з [16] ядра  $\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  і  $\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  відповідають транспонованим фундаментальним розв'язкам для розширених переміщень і вектора напружень у точці  $\mathbf{x}$  від дії прикладеної у точці  $\boldsymbol{\xi}$  зосередженої сили. Згідно з (36) запишемо

$\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1 :$

$$\begin{aligned} [\mathbf{U}^{\text{bm}}]^\top &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{A}_1^\top \right\} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \bar{\mathbf{A}}_1 \sum_{\beta=1}^5 \mathbf{I}_\beta [\mathbf{G}_1^{(1)}]^\top \langle \ln(\bar{Z}_\beta^{(1)}(\mathbf{x}) - Z_*^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{A}_1^\top \right\} = \\ &= \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi})) \rangle \mathbf{A}_1^\top \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_1 \sum_{\beta=1}^5 \langle \ln(Z_*^{(1)}(\mathbf{x}) - \bar{Z}_\beta^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \rangle [\bar{\mathbf{G}}_1^{(1)}]^\top \mathbf{I}_\beta \bar{\mathbf{A}}_1^\top \right\}; \end{aligned}$$

$\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_1 :$

$$[\mathbf{U}^{\text{bm}}]^\top = \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \mathbf{A}_2 \sum_{\beta=1}^5 \left[ \langle \ln(Z_*^{(2)}(\mathbf{x}) - Z_\beta^{(1)}(\boldsymbol{\xi})) \rangle [\mathbf{G}_2^{(1)}]^\top \mathbf{I}_\beta \right] \mathbf{A}_1^\top \right\},$$

що з урахуванням (30) відповідає поданому у [8, 16, 18] фундаментальному розв'язку для МЕР біматеріалу (ядра для  $\mathbf{x} \in S_1 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2$  і  $\mathbf{x} \in S_2 \wedge \boldsymbol{\xi} \in S_2$  мають аналогічну структуру, тому відповідні формули для їх перевірки тут не наводимо). Подібно верифікується правильність запису ядра  $\mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ .

Перевагами запропонованої методики побудови інтегральних подань розширених вектора переміщень і тензора напружень є: **1)** використання єдиного підходу на основі теорії функції комплексної змінної, а не окремо теорем взаємності для побудови рівнянь і ТФКЗ для отримання їхніх ядер; **2)** прозорість і простота отримання інтегральних формул без жодних попередніх припущень про структуру ядер [8, 18]; **3)** побудова у явному вигляді та лише через параметри та матриці формалізму Stroh ядер (38) інтегральних подань напружень, які в подальшому продуктивно використовуються при побудові дуальних інтегральних рівнянь; **4)** зручність використання подань (33), (34) комплексних потенціалів за потреби здійснення диференціювання за комплексними аргументами.

**3. Побудова комплексних потенціалів однорідного розв'язку.** Вважатимемо, що у безмежно віддаленій точці матеріал перебуває під дією однорідного поля напружень. Тоді відповідно до [8, 12, 18] комплексні потенціали для однорідного розв'язку запишемо у формі

$$\mathbf{f}_\infty^{(1)}(z_*^{(1)}) = \langle z_*^{(1)} \rangle (\mathbf{A}_1^\top \mathbf{s}_a^{(1)} + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{s}_b^{(1)}), \quad \mathbf{f}_\infty^{(2)}(z_*^{(2)}) = \langle z_*^{(2)} \rangle (\mathbf{A}_2^\top \mathbf{s}_a^{(2)} + \mathbf{B}_2^\top \mathbf{s}_b^{(2)}), \quad (39)$$

де сталі дійсні вектори  $\mathbf{s}_a^{(1)}$ ,  $\mathbf{s}_b^{(1)}$ ,  $\mathbf{s}_a^{(2)}$  та  $\mathbf{s}_b^{(2)}$  вибираємо таким чином, щоб функції (39) задовольняли крайові умови на безмежності та умови ідеального контакту (10) на межі поділу матеріалів.

Відповідно до (5) і (39) умови (10) ідеального контакту двох матеріалів задовольняються, якщо

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A}_1 (\mathbf{A}_1^\top \mathbf{s}_a^{(1)} + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{s}_b^{(1)})] &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{A}_2 (\mathbf{A}_2^\top \mathbf{s}_a^{(2)} + \mathbf{B}_2^\top \mathbf{s}_b^{(2)})], \\ 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_1 (\mathbf{A}_1^\top \mathbf{s}_a^{(1)} + \mathbf{B}_1^\top \mathbf{s}_b^{(1)})] &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_2 (\mathbf{A}_2^\top \mathbf{s}_a^{(2)} + \mathbf{B}_2^\top \mathbf{s}_b^{(2)})]. \end{aligned} \quad (40)$$

Із використанням умов ортогональності (8) на основі (40) отримаємо, що

$$\mathbf{s}_a^{(1)} = \mathbf{s}_a^{(2)} = \mathbf{s}_a, \quad \mathbf{s}_b^{(1)} = \mathbf{s}_b^{(2)} = \mathbf{s}_b. \quad (41)$$

З огляду на (5), (6), (39) і (41) у безмежно віддалених точках областей  $S_1$  і  $S_2$ :

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(j)\infty} &= -2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{P}_j (\mathbf{A}_j^\top \mathbf{s}_a + \mathbf{B}_j^\top \mathbf{s}_b)] = \\ &= -2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{P}_j \mathbf{A}_j^\top] \mathbf{s}_a - 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j^\top] \mathbf{s}_b, \\ \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(j)\infty} &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j (\mathbf{A}_j^\top \mathbf{s}_a + \mathbf{B}_j^\top \mathbf{s}_b)] = \\ &= 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{A}_j^\top] \mathbf{s}_a + 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{B}_j^\top] \mathbf{s}_b, \quad \not\propto_j. \end{aligned} \quad (42)$$

Згідно з [18]

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{P}_j \mathbf{A}_j^\top] &= [\mathbf{N}_1^{(j)}]^\top, \quad 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{P}_j \mathbf{B}_j^\top] = \mathbf{N}_3^{(j)}, \\ 2 \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{A}_j^\top] &= \mathbf{I}, \quad \operatorname{Re} [\mathbf{B}_j \mathbf{B}_j^\top] = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

тому (42) можна переписати у вигляді

$$\mathbf{s}_a = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(1)\infty} = \tilde{\boldsymbol{\sigma}}_2^{(2)\infty}, \quad \mathbf{N}_3^{(j)} \mathbf{s}_b = -\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_1^{(j)\infty} - [\mathbf{N}_1^{(j)}]^\top \mathbf{s}_a. \quad (43)$$

Відповідно до [18] матриця  $\mathbf{N}_3$  є сингулярною (другий рядок є нульовим), тому при визначенні вектора  $\mathbf{s}_b$ , крім (43), необхідно використовувати певну додаткову умову, зокрема, умову рівності нулеві повороту однієї з областей  $S_1$  чи  $S_2$  як жорсткого цілого.

**4. Побудова інтегральних рівнянь граничноелементного методу функцій стрибка.** При коректному формулюванні крайових умов на контурах  $\Gamma$  задають лише половину із різноіменних компонент вектор-функцій  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  та  $\tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma$ . Для визначення інших (невдомих) функцій слід спря-

мувати точку внутрішності до межі і на основі (35) чи (37) отримати інтегральне рівняння задачі. При цьому запропонований підхід на основі ТФКЗ дає можливість спростити побудову сингулярних інтегральних рівнянь задачі, використовуючи формулу Сохоцького – Племелі [3], яка для гладкої дуги  $\Gamma$  так пов'язує граничне значення інтеграла із його головним значенням:

$$\lim_{z \rightarrow \tau_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2} \phi(\tau_0) + \frac{1}{2\pi i} \text{CPV} \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau) d\tau}{\tau - \tau_0}. \quad (44)$$

Тут вважається, що точка  $z$  прямує до точки  $\tau_0$  межі  $\Gamma$  зсередини області; CPV означає головне значення інтеграла (Cauchy Principal Value).

Отже, згідно з (5), (33), (34), (36) і (44) для гладких замкнутих контурів  $\Gamma$  в магнітоелектропружному біматеріалі отримаємо таке інтегральне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\infty}(\mathbf{y}). \end{aligned} \quad (45)$$

Тут RPV – головне значення невласного інтеграла (Riemann Principal Value).

При розв'язуванні задач для тіл із тріщинами, коли отвори мають вигляд математичних розрізів уздовж певних ліній  $\Gamma_C$ , інтегральні рівняння (45) вироджуються, їхнє безпосереднє використання стає неможливим і їх треба трансформувати у дуальні гіперсингулярні інтегральні рівняння [7, 13]. Для їхньої побудови і в цьому випадку можна скористатися методами ТФКЗ, зокрема, теоремою про голоморфність кусково-аналітичних функцій [3]:

$$\frac{1}{2} \Sigma \phi(\tau_0) = \frac{1}{2\pi i} \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_C} \frac{\Delta \phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau + \int_{\Gamma} \frac{\phi(\tau)}{\tau - \tau_0} d\tau \right] \quad \forall \tau_0 \in \Gamma_C, \quad (46)$$

де  $\Sigma(\bullet) = (\bullet)^+ + (\bullet)^-$ ,  $\Delta(\bullet) = (\bullet)^+ - (\bullet)^-$ ;  $\Gamma_C$  – система розімкнутих дуг на комплексній площині; знаками «+» та «-» позначено величини, що стосуються поверхонь  $\Gamma_C^+$  і  $\Gamma_C^-$ , утворених розрізами  $\Gamma_C$ .

На основі (5), (33), (34), (36), (38) і (46) отримаємо систему дуальних інтегральних рівнянь для магнітоелектропружного біматеріалу:

- точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій поверхні  $\Gamma$  замкнутого контуру:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma} \mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma} \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma_C} [\mathbf{U}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{hs}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\infty}(\mathbf{y}); \end{aligned} \quad (47)$$

- точка колокації  $\mathbf{y}$  лежить на гладкій поверхні  $\Gamma_C$  розрізу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = & \text{RPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \\ & - \text{CPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & + \int_{\Gamma} [\mathbf{U}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{T}^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_{\infty}(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = n_j^+(\mathbf{y}) & \left[ \text{CPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) - \right. \\ & - \text{HPV} \int_{\Gamma_C} \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) d\Gamma(\mathbf{x}) + \\ & \left. + \int_{\Gamma} [\mathbf{D}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}_j^{\text{bm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})] d\Gamma(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\sigma}_j^\infty(\mathbf{y}) \right]. \quad (48) \end{aligned}$$

Тут HPV – скінченна частина гіперсингулярного інтеграла за Адамаром (Hadamard Principal Value). Такі рівняння вже цілком придатні для розв’язування задач теорії тріщин.

Однак можна піти й далі. Дуальні інтегральні рівняння (47), (48) сумісно з моделями тонких МЕРІ включень [13], які можна подати у формі зв’язків

$$\Sigma \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^u(\mathbf{y}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})), \quad \Delta \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{y}) = \mathbf{F}^t(\mathbf{y}, \Delta \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}), \Sigma \tilde{\mathbf{t}}(\mathbf{x})),$$

дають можливість розв’язувати задачі для біматеріалів із отворами, тріщинами та тонкими включеннями, зокрема, й за допомогою граничноелементного методу функцій стрибка [13].

Згідно з [13, 14] крайові функції стрибків напружень і переміщень поблизу вершин тонких неоднорідностей, що не лежать на межі поділу матеріалів, повністю характеризуються узагальненими коефіцієнтами інтенсивності напружень, електричних зміщень і магнітної індукції (КІНЕЗМІ). Означення і методику обчислення цих коефіцієнтів за допомогою граничноелементного методу функцій стрибка подано у роботах [13, 14].

Випадок, коли включення лежить на межі поділу матеріалів чи його вершина торкається її, потребує окремого дослідження і виходить за межі даної роботи.

### 5. Числові приклади. 5.1. Верифікація підходу.

Для верифікації розробленого підходу розглянемо безмежне середовище, що складається з двох ізотропних півпросторів із модулями зсуву  $G_1$  та  $G_2$  і коефіцієнтами Пуассона  $\nu_1$  та  $\nu_2$  відповідно. У розрахунках без зменшення загальності вважаємо, що  $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$ . Пружні сталі  $C_{ijkl}$  матеріалів півпросторів обчислюємо за значеннями  $G$  і  $\nu$  для плоского напруженого стану [8, 18]. На безмежності у верхньому півпросторі задано напруження  $\sigma_{11}^{(1)\infty} = \sigma^{(1)}$ , а у нижньому півпросторі діють напруження  $\sigma_{11}^{(2)\infty} \equiv \sigma^{(2)} = G_2/G_1 \sigma^{(1)}$ . Середовище містить тріщину довжини  $2a$ , що під прямим кутом перетинає межу поділу матеріалів (рис. 2). Цей дефект для збереження універсальності підходу моделюємо тонким включенням дуже малої жорсткості ( $G^i = 10^{-10} G_1$ ).

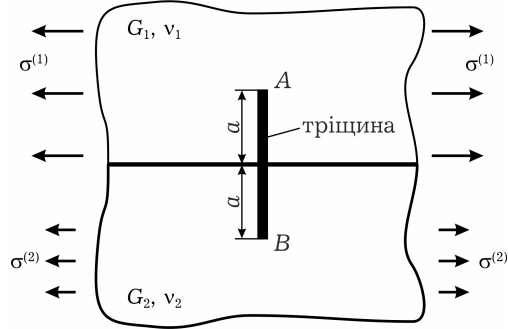


Рис. 2. Схема задачі з тріщиною.

У табл. 1 подано порівняння КІН, розрахованих методом об’ємних сил [9], методом граничних елементів [10] і запропонованим граничноелементним методом функцій стрибка. Видно повну узгодженість результатів усіх трьох підходів, що засвідчує достовірність кожного із них, а також ефективність розробленого методу, оскільки при дискретизації задачі було використано всього 20 тривузлових граничних елементів, включаючи два спеціальні, що моделюють кореневу особливість у вершинах дефекту.

Оскільки у літературі авторам не вдалося знайти конкретних числових даних розрахунку біматеріалів із тонкими деформівними включеннями, то для верифікації підходу у цьому випадку розглянуто задачі для безмежного простору та півпросторів із тонкими неоднорідностями, інтегральні рівняння яких отримуються із подань, побудованих за допомогою граничних переходів за МЕР сталими одного з матеріалів. Отримано цілковиту узгодженість результатів розрахунку тестових задач із відомими [15] для простору та півпростору.

Табл. 1. КІН тріщини, перпендикулярної до межі поділу матеріалів.

$G_2/G_1$	[9]		[10]		Розроблений підхід	
	$\frac{K_I^A}{\sigma^{(1)}\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^B}{\sigma^{(2)}\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^A}{\sigma^{(1)}\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^B}{\sigma^{(2)}\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^A}{\sigma^{(1)}\sqrt{\pi a}}$	$\frac{K_I^B}{\sigma^{(2)}\sqrt{\pi a}}$
0.1	1.062	1.153	1.063	1.156	1.063	1.154
0.3	1.015	1.064	1.016	1.066	1.016	1.065
0.5	1.000	1.028	1.001	1.029	1.001	1.029
0.8	0.997	1.006	0.998	1.007	0.997	1.006

**5.2. МЕР біматеріал із пружним діелектричним включенням.** Розглянемо плоску деформацію поєднаних уздовж площини  $x_3 = 0$  півпросторів, верхній ( $x_3 > 0$ ) з яких виготовлений із п'єзомагнетика  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$ , а нижній ( $x_3 < 0$ ) – із п'єзоелектрика  $\text{BaTiO}_3$ . Магнітоелектромеханічні властивості цих матеріалів, поляризованих уздовж осі  $Ox_3$ , подано у табл. 2.

Біматеріал містить стрічкове включення ширини  $2a$  і товщини  $2h$ . У розрахунках приймали, що  $h = 0.01a$ , а саме включення є ізотропним пружним діелектриком, що не поляризується і не намагнічується (тобто електрична та магнітна проникності включення дорівнюють відповідно електричній і магнітній сталим вакууму).

Табл. 2. Властивості  $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  та  $\text{BaTiO}_3$  [19].

	$C_{11}$	$C_{12}$	$C_{13}$	$C_{33}$	$C_{44}$	$\alpha_{11}$	$\alpha_{33}$	$\mu_{11}$	$\mu_{33}$	$e_{31}$	$e_{33}$	$e_{15}$	$h_{31}$	$h_{33}$	$h_{15}$
	[ГПа]					[нФ/м]		[мкГ/м]		[Кл/м <sup>2</sup> ]			[Тл]		
$\text{BaTiO}_3$	166	77	78	162	43	11.2	12.6	5	10	-4.4	18.6	11.6	0	0	0
$\text{CoFe}_2\text{O}_4$	286	173	170.5	269.5	45.3	0.08	0.093	590	157	0	0	0	580.3	699.7	550

На рис. 3 зображено залежності нормованих значень узагальнених КІНЕЗМІ тонкого паралельного до межі поділу матеріалів включення від відносної жорсткості  $k = G^{\text{in}}/C_{44}^{\text{BaTiO}_3}$  для різних значень аплікати  $d$  його центра. Суцільні криві відповідають нормованим КІНЕЗМІ  $K_{11}/p\sqrt{\pi a}$ , штрихові –  $K_{12}/p\sqrt{\pi a}$ , штрихпунктирні –  $K_{51}/B^*\sqrt{\pi a}$ , пунктирні –  $K_{41}/D^*\sqrt{\pi a}$ . При цьому для нормування використано такі розмірні величини:  $D^* = 10^{-9} p$  [Кл·Н<sup>-1</sup>],  $B^* = 10^{-9} p$  [А<sup>-1</sup>·м].

Із рис. 3 видно, що зміна розташування включення (і навіть доволі велике наближення до межі поділу матеріалів) за такого способу навантаження незначно впливає на узагальнені КІН  $K_{11}$  та  $K_{12}$ , які є близькими до відповідних значень для включення в однорідному матеріалі ( $\text{CoFe}_2\text{O}_4$  чи  $\text{BaTiO}_3$ ). Це пов'язано з тим, що у прикладі розглянуто лише механічне навантаження біматеріалу. Натомість, узагальнені КІМІ  $K_{51}$  та КІЕЗ  $K_{41}$  істотно змінюються при зближенні включення і межі поділу матеріалів. Як-

що включення перебуває у п'єзомагнітній частині біматеріалу, то зменшення відстані  $|d|$  зумовлює зростання КІМІ  $K_{51}$ , а якщо у п'єзоелектричній – зростання КІЕЗ  $K_{41}$ , – як для неоднорідностей, податніших, ніж матеріали середовищ ( $k < 1$ ), так і для жорсткіших ( $k > 1$ ) неоднорідностей.

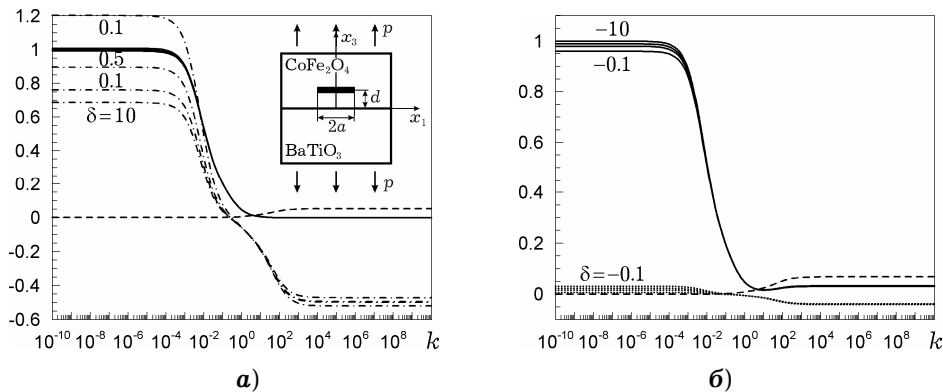


Рис. 3. Узагальнені КІНЕЗМІ паралельного до межі поділу матеріалів тонкого включення.

**Висновки.** Запропонована достатньо проста, пряма і математично коректна методологія дала змогу побудувати дуальні інтегральні рівняння типу Сомільяни для біматеріалу та вперше отримати явні вирази для всіх ядер таких рівнянь. Впровадження цих рівнянь і математичних моделей тонких неоднорідностей в алгоритм граничноелементного методу функцій стрибка дозволило отримати ефективний засіб числового розв'язування задач магнітоелектропружності для біматеріалу з тріщинами та тонкими деформівними включеннями. У результаті розгляду конкретних прикладів з'ясовано, що наявність межі поділу матеріалів чинить істотний вплив на інтенсивність полів електричних зміщень і магнітної індукції поблизу вершин тонких неоднорідностей навіть у разі дії на середовище суто механічного навантаження.

1. Бурак Я., Кондрат В., Грицина О. Основи локально градієнтної теорії діелектриків. – Ужгород: Поліграфцентр «Ліра», 2011. – 208 с.
2. Калоев С. А., Петренко А. В. Двумерные задачи электромагнитоупругости для многосвязных тел. – Донецк: Юго-Восток, 2011. – 232 с.
3. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. – Москва: Наука, 1968. – 512 с.
4. Пастернак Я. М. Побудова інтегральних рівнянь магнітоелектропружності на основі формалізму Стро // Доп. НАН України. – 2012. – № 11. – С. 66–72.
5. Barnett D. M., Lothe J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators // Phys. Status Solidi. **B**. – 1975. – **67**, No. 1. – P. 105–111.
6. Ding H., Jiang A. A boundary integral formulation and solution for 2D problems in magneto-electro-elastic media // Comput. Struct. – 2004. – **82**, No. 20-21. – P. 1599–1607.
7. García-Sánchez F., Rojas-Díaz R., Sáez A., Zhang Ch. Fracture of magneto-electroelastic composite materials using boundary element method (BEM) // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2007. – **47**, No. 3. – P. 192–204.
8. Hwu Ch. Anisotropic elastic plates. – London: Springer, 2010. – 673 p.
9. Isida M., Noguchi H. An interface crack and an arbitrary array of cracks in bonded semi-infinite bodies under in-plane loads // Trans. Jpn. Soc. Mech. Eng. Ser. A. – 1983. – **49**, No. 438. – P. 137–146 (in Japanese).
10. Pan E., Amadei B. Boundary element analysis of fracture mechanics in anisotropic bimaterials // Eng. Anal. Bound. Elem. – 1999. – **23**, No. 8. – P. 683–691.
11. Pan E., Yuan F.G. Three-dimensional Green's functions in anisotropic piezoelectric bimaterials // Int. J. Eng. Sci. – 2000. – **38**, No. 17. – P. 1939–1960.
12. Pasternak Ia. Boundary integral equations and the boundary element method for fracture mechanics analysis in 2D anisotropic thermoelasticity // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2012. – **36**, No. 12. – P. 1931–1941.

13. *Pasternak Ia.* Coupled 2D electric and mechanical fields in piezoelectric solids containing cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2011. – **35**, No. 4. – P. 678–690.
14. *Pasternak Ia., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on the 2D boundary element method for anisotropic thermoelectroelastic solids with cracks and thin inhomogeneities // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2013. – **37**, No. 2. – P. 419–433.
15. *Pasternak Ia., Sulym H.* Stroh formalism based boundary integral equations for 2D magnetoelectroelasticity // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2013. – **37**, No. 1. – P. 167–175.
16. *Qin Q.-H.* Green's function and boundary elements of multifield materials. – Oxford: Elsevier, 2007. – 266 p.
17. *Tian W., Gabbert U.* Parallel crack near the interface of magnetoelectroelastic bimetals // *Comput. Mater. Sci.* – 2005. – **32**, No. 3-4. – P. 562–567.
18. *Ting T. C. T.* Anisotropic elasticity: theory and applications. – New York: Oxford Univ. Press. – 1996. – xvii+570 p.
19. *Sih G. C., Yu H. Y.* Volume fraction effect of magnetoelectroelastic composite on enhancement and impediment of crack growth // *Compos. Struct.* – 2005. – **68**, No. 1. – P. 1–11.
20. *Special topics in the theory of piezoelectricity* / Ed. J. Yang. – New York: Springer, 2009. – xii+329 p.
21. *Yang P. S., Liou J. Y., Sung J. C.* Subinterface crack in an anisotropic piezoelectric bimaterial // *Int. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**, No. 18-19. – P. 4990–5014.
22. *Zhu X., Huang Zh., Jiang A., Chen W. Q., Nishimura N.* Fast multipole boundary element analysis for 2D problems of magneto-electro-elastic media // *Eng. Anal. Bound. Elem.* – 2010. – **34**, No. 11. – P. 927–933.

#### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОЙ МАГНИТОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ ДЛЯ БИМАТЕРИАЛА С ТРЕЩИНАМИ И ТОНКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

На основе применения формализма Stroha и теории функции комплексного переменного получены дуальные интегральные уравнения магнитоэлектроругоости для биматериала. При этом впервые построены интегральные представления комплексных потенциалов Stroha и явные выражения для всех ядер исключительно через параметры и матрицы использованного формализма. Это существенно уменьшает количество вычислений, необходимых для формирования определяющих уравнений методов типа граничных элементов. Также записаны выражения для главных частей комплексных потенциалов, дающие возможность рассматривать заданную на бесконечности однородную магнитоэлектромеханическую нагрузку. Полученные уравнения совместно с построенными ранее моделями тонких деформируемых включений введены в расчетную схему граничноэлементного метода функций прыжка. Расчет тестовых задач подтвердил высокую точность и эффективность предложенного подхода. Получены решения новых задач для магнитоэлектроругоого биматериала с тонким включением.

#### INTEGRAL EQUATIONS OF PLANE MAGNETOELECTROELASTICITY FOR A BIMATERIAL WITH CRACKS AND THIN INCLUSIONS

Based on the combined application of the Stroh formalism and complex variable theory the dual integral equations for a magnetoelectroelastic bimaterial are obtained. For the first time it is developed the integral formulae for the Stroh complex potentials and explicit expressions for all kernels using the parameters and matrices of the formalism only. This significantly reduces the amount of computation required to form governing equations of the boundary element methods. Also, the explicit expressions for the principal parts of the complex potentials are obtained, which allow to consider the homogeneous magnetoelectromechanical loading to be prescribed at infinity. These equations, together with previously developed models of thin deformable inclusions are introduced into the computational algorithm of the boundary element method of jump function. Calculation of the test problems shows high accuracy and efficiency of the proposed approach. Solutions to new problems for a magnetoelectroelastic bimaterial with a thin inclusion are also obtained.

<sup>1</sup> Луцьк. нац. техн. ун-т, Луцьк,

<sup>2</sup> Ін-т прикл. проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,

<sup>3</sup> Укр. акад. друкарства, Львів