

## ОСЕСИМЕТРИЧНІ РЕЗОНАНСНІ КОЛИВАННЯ І ВІБРОРОЗІГРІВ ТЕРМОВ'ЯЗКОПРУЖНОЇ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ З П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИМИ СЕНСОРАМИ І АКТУАТОРАМИ

*Розглядається задача про осесиметричні вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзоелектричними сенсорами і актуаторами при моногармонічному навантаженні. В'язкопружна поведінка пасивного і п'єзоактивного матеріалів описується в термінах комплексних модулів, які залежать від температури вібророзігріву. На основі числових розрахунків досліджено вплив температурної залежності властивостей матеріалів на динамічні характеристики, температуру вібророзігріву, електричні показники сенсора та активне модальне демпфування оболонки за допомогою п'єзоактуатора з використанням показника сенсора.*

**Вступ.** Для демпфування коливань тонкостінних елементів конструкцій у практичних застосуваннях все частіше використовують активні методи, коли в структуру елемента включають п'єзоактивні складові, які виконують роль актуаторів або сенсорів [4, 12, 15]. На ефективність активного демпфування коливань тонкостінних елементів впливає багато факторів: геометричні параметри складових об'єкта, електромеханічні властивості пасивного (без п'єзоефекту) і п'єзоактивного матеріалів, механічні і електричні граничні умови та теплові ефекти, спричинені гістерезисними втратами або зовнішнім нагрівом тіла [2–4, 13, 14, 16]. Температура вібророзігріву, зумовлена внутрішніми втратами в матеріалі, може суттєво вплинути на динамічну поведінку та ефективність демпфування тонкостінних конструкцій [4, 10, 11 та ін.].

Моделюванню вимушених стаціонарних коливань і дисипативного розігріву тонкостінних непружних елементів з п'єзоелектричними включеннями та дослідженню впливу температурної залежності матеріалів на динамічні характеристики та ефективність демпфування таких об'єктів присвячено роботи [1, 5, 9, 10 та ін.]. Резонансні осесиметричні коливання і розігрів циліндричних оболонок та їх контроль п'єзоелектричними актуаторами на основі аналітичних розв'язків і чисельних методів розглядалися у статтях [7, 8, 11 та ін.].

У цій статті досліджуються резонансні коливання і вібророзігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзошарами, які виконують роль актуаторів або сенсорів, вплив температури вібророзігріву на електричні показники сенсора та можливість демпфування коливань за допомогою п'єзоактуатора на основі показника сенсора.

**1. Постановка задачі.** Розглянемо тришарову циліндричну оболонку довжини  $l$ . Середній шар товщини  $h$  виготовлено з пасивного ізотропного матеріалу. Зовнішні шари товщини  $\delta$ , виготовлені з поляризованої уздовж товщини п'єзокераміки, жорстко скріплені з пасивним шаром і виконують роль сенсорів або актуаторів. Оболонку віднесено до циліндричної системи координат  $\alpha, \theta, z$  з початком товщинної координати у точці  $z = 0$  на серединній поверхні радіуса  $R$ . Вважаємо, що поляризація верхнього ( $z > h/2$ ) і нижнього ( $z < -h/2$ ) п'єзошарів характеризується значеннями п'єзомодулів  $-d_{31}$  і  $d_{31}$  відповідно. Поверхні шарів електродовані. Електроди на поверхнях контакту з пасивним шаром підтримуються при електричному потенціалі  $\varphi(\pm h/2) = 0$ . Суцільні електроди на циліндричних поверхнях  $z = \pm H/2$  ( $H = h + 2\delta$ ) оболонки нескінченно тонкими круговими

розрізами з координатами  $\alpha_1, \alpha_2$  ( $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq \ell$ ) розділені на окремі ділянки.

Оболонку навантажено осесиметричним поверхневим тиском  $q_z = q(\alpha) \cos \omega t$ , який гармонічно змінюється в часі  $t$  з частотою  $\omega$ , близькою до резонансної. У випадку п'єзошарів-актуаторів до електродів на ділянках площею  $s^\pm = 2\pi R \Delta_\alpha$  ( $\Delta_\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ ) з частотою механічного навантаження для компенсації його дії підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою  $\varphi(\pm H/2) = \pm V_a$ . На ділянках  $\alpha < \alpha_1$  і  $\alpha > \alpha_2$  електроди закорочені ( $V_a = 0$ ). Якщо п'єзоактивні ділянки виконують роль сенсора, то внаслідок дії механічного навантаження на електродованих поверхнях  $z = \pm H/2$  виникає невідома різниця амплітуд електричних потенціалів  $\varphi(\pm H/2) = \pm V_s$  та виконуються такі електричні граничні умови [4]:

$$\iint_{s^\pm} D^\pm ds = 0, \quad (1)$$

де  $D^\pm$  – нормальна складова електричної індукції у п'єзошарах.

При моделюванні електротермомеханічної поведінки тришарової циліндричної оболонки припускаємо, що для пакета шарів справджуються гіпотези Кірхгофа – Лява відносно механічних змінних. Для електричних польових величин вважаємо, що в п'єзоактивних шарах складовими вектора індукції  $D_\alpha, D_\theta$  і напруженості  $E_\alpha, E_\theta$  електричного поля можна знехтувати. Тоді з рівнянь електростатики випливає, що в п'єзошарах складова  $D_z^\pm = C^\pm(\alpha)$  не залежить від координати  $z$  [2]. Температуру дисипативного розігріву приймаємо сталою по товщині пакета. Вважаємо, що торці оболонки шарнірно закріплені, а на зовнішніх її поверхнях виконуються умови конвективного теплообміну. Згідно з підходом [6] на основі прийнятих гіпотез задача про електромеханічну поведінку розглядуваної циліндричної оболонки відносно шуканих комплексних величин зводиться до розв'язання

– рівнянь гармонічних коливань (множник  $e^{i\omega t}$  опускаємо):

$$\frac{dN_\alpha}{d\alpha} + \hat{\rho}\omega^2 u = 0, \quad \frac{dM_\alpha}{d\alpha} - Q_\alpha = 0, \quad \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} - \frac{N_\theta}{R} + \hat{\rho}\omega^2 w + q_z = 0; \quad (2)$$

– визначальних співвідношень для зусиль і моментів:

$$N_\alpha = C_{11}\varepsilon_\alpha + C_{12}\varepsilon_\theta, \quad N_\theta = C_{12}\varepsilon_\alpha + C_{11}\varepsilon_\theta, \\ M_\alpha = D_{11}x_\alpha + M_E, \quad M_\theta = D_{12}x_\alpha + M_E; \quad (3)$$

– виразів для параметрів деформації через амплітуди переміщень:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{du}{d\alpha}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{w}{R}, \quad x_\alpha = \frac{d\vartheta_\alpha}{d\alpha}, \quad \vartheta_\alpha = -\frac{dw}{d\alpha}; \quad (4)$$

– усередненого за період коливань і по товщині оболонки рівняння теплопровідності:

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial \alpha^2} - \frac{2\alpha_s}{\lambda H} (T - T_0) + \frac{1}{\lambda H} \widehat{W} \quad (5)$$

з дисипативною функцією

$$\widehat{W} = \frac{\omega}{2} \left[ C_{11}'' (\varepsilon_\alpha'^2 + \varepsilon_\alpha''^2 + \varepsilon_\theta'^2 + \varepsilon_\theta''^2) + 2C_{12}'' (\varepsilon_\alpha' \varepsilon_\theta' + \varepsilon_\alpha'' \varepsilon_\theta'') + D_{11}'' (x_\alpha'^2 + x_\alpha''^2) - \right. \\ \left. - 2(h + \delta) b_{31} (V_\alpha' x_\alpha' + V_\alpha'' x_\alpha'') + \frac{2b_{33}''}{\delta} (V_\alpha'^2 + V_\alpha''^2) \right]. \quad (6)$$

Механічні граничні умови є такими:

$$N_\alpha = 0, \quad w = 0, \quad M_\alpha = 0, \quad \alpha = 0, \ell. \quad (7)$$

Граничні та початкові умови для рівняння теплопровідності мають вигляд

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = \pm \frac{\alpha_{0,\ell}}{\lambda} (T - T_c), \quad \alpha = 0, \ell, \quad T = T_0, \quad t = 0. \quad (8)$$

У рівняннях (2)–(8) введено такі позначення:

$$\begin{aligned} C_{1k} &= h[B_{1k} + (2B_{1k}^s + k_1\gamma_{33})\delta_1], \\ D_{1k} &= \frac{h^3}{12}[B_{1k} + 2B_{1k}^s\delta_*^3 + 2\gamma_{33}(k_2\delta_1^3 + k_3\delta_*^3)], \quad k = 1, 2, \\ B_{11} &= \frac{E}{1 - \nu^2}, \quad B_{12} = \nu B_{11}, \quad B_{11}^s = \frac{1}{S_{11}^E(1 - \nu_E^2)}, \quad B_{12}^s = \nu_E B_{11}^s, \\ \nu_E &= -\frac{S_{12}^E}{S_{11}^E}, \quad \gamma_{33} = \frac{b_{31}^2}{b_{33}}, \quad b_{31} = \frac{d_{31}}{S_{11}^E(1 - \nu_E^2)}, \quad b_{33} = \varepsilon_{33}^T(1 - k_p^2), \\ k_p^2 &= \frac{2d_{31}^2}{S_{11}^E \varepsilon_{33}^T(1 - \nu_E)}, \quad M_E = -h(1 + \delta_1)b_{31}V_\alpha, \quad \delta_1 = \frac{\delta}{h}, \\ \delta_*^3 &= 4\delta_1^3 + 6\delta_1^2 + 3\delta_1, \quad \bar{\rho} = 2\rho_*\delta + \rho h. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут  $s_{1k}^E = s_{1k}'(T)[1 - i\delta_{1k}^s(T)]$ ,  $d_{31} = d_{31}'(T)[1 - i\delta_{31}^d(T)]$ ,  $\varepsilon_{33}^T = \varepsilon_{33}'(T)[1 - i\delta_{33}^\varepsilon(T)]$  – відповідно залежні від температури комплексні податливості, п'езомодуль і діелектрична проникність п'езоматеріалу;  $E = E'(T) + iE''(T)$  – коефіцієнт в'язкопружності і  $\nu = \text{const}$  – коефіцієнт Пуассона пасивного матеріалу;  $w = w' + iw''$ ,  $u = u' + iu''$  – комплексні амплітуди прогину і осьового переміщення;  $\rho$ ,  $\rho_*$  – питома густина пасивного і п'езоактивного матеріалів;  $\alpha_s$ ,  $\alpha_{0,\ell}$  – коефіцієнти теплообміну на зовнішніх поверхнях оболонки;  $\lambda$ ,  $a$  – коефіцієнти тепло- і температуропровідності. Тут і далі прийнято стандартні позначення комплексних величин  $a = a' + ia''$ ,  $|a| = (a'^2 + a''^2)^{1/2}$ ,  $i = \sqrt{-1}$ .

Зауважимо, що у перших двох співвідношеннях (9)  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 0$ ,  $k_3 = 1.0$ , якщо п'езошари є актуаторами, і  $k_1 = 0$ ,  $k_2 = 1.0$ ,  $k_3 = 0$ , якщо вони виконують роль сенсорів.

При побудові визначальних рівнянь (3) для випадку п'езошарів-сенсорів замість (1) використано умову  $D_z = C = 0$  [6].

**2. Побудова розв'язку задачі.** При врахуванні температурної залежності в'язкопружних властивостей пасивного і п'езоактивного матеріалів система рівнянь (2)–(8) є взаємозв'язаною і нелінійною. Для її розв'язування використовуємо метод покрокового інтегрування за часом [2]. З цією метою рівняння (2)–(4) після деяких перетворень залишемо у формі звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду

$$\begin{aligned} \frac{dN_\alpha}{d\alpha} &= -\bar{\rho}\omega^2 u, & \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} &= -\frac{\nu_C}{R} N_\alpha + \left( \frac{1 - \nu_C^2}{R^2} C_{11} - \bar{\rho}\omega^2 \right) w - q_z, \\ \frac{dM_\alpha}{d\alpha} &= Q_\alpha, & \frac{du}{d\alpha} &= J_C N_\alpha - \frac{\nu_C}{R} w, \\ \frac{dw}{d\alpha} &= -Q_\alpha, & \frac{dQ_\alpha}{d\alpha} &= J_D M_\alpha - J_D M_E, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $J_C = 1/C_{11}$ ,  $J_D = 1/D_{11}$ ,  $\nu_C = C_{12}/C_{11}$ .

Комплекснозначну систему рівнянь (10) з граничними умовами (7) на кожному часовому кроці  $\Delta t$  інтегруємо з використанням типової програми розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь. При цьому на кожному кроці розв'язуємо лінійну задачу при ізотермічних електро-механічних характеристиках матеріалів. Після отримання дисипативної функції (6) задачу теплопровідності розв'язуємо методом скінченних різниць із застосуванням явної схеми. Потім за розподілом температури обчислюємо жорсткісні характеристики (9) і процес повторюється. При цьому використовуємо безрозмірні просторову координату  $x = \alpha/\ell$ , координату за часом  $\tau = at^2/\ell^2$  і нормований коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$  коефіцієнт теплообміну  $\gamma_{s,0,\ell} = \alpha_{s,0,\ell}\ell/\lambda$ .

У розглядуваному випадку в оболонці реалізуються переважно згинальні коливання з найбільш енергоємною першою модою. Тому нижче всі розрахунки проводились в околі частот першого резонансу згинальної моди.

Дослідження виконано для трьох способів збудження вимушених коливань оболонки з п'єзощарами-актуаторами. Перший спосіб – навантаження оболонки рівномірним поверхневим тиском  $q_z = q_0$ . При другому способі до зовнішніх електродів актуатора підводиться різниця електричних потенціалів з амплітудою  $\pm V_a$ . При третьому, комбінованому способі навантаження, оболонка знаходиться під дією гармонічного рівномірного тиску  $q_0$ , і з метою його компенсації до актуатора підводиться різниця потенціалів  $2V_a$  з тією ж частотою, але протилежної фази. Компенсаційне значення  $V_a$  при відомому  $q_0$  розраховується за формулою [9]

$$V_a = k_a(\Delta)q_0. \quad (11)$$

Тут  $k_a$  – коефіцієнт керування,  $\Delta = \Delta_\alpha/\ell$  – безрозмірна ширина п'єзоактивної ділянки. Розрахований на частоті лінійного резонансу коефіцієнт  $k_a$  визначається відношенням [8]

$$k_a = \frac{|w_q|_{\max}}{|w_E|_{\max}}, \quad (12)$$

у якому  $|w_q|_{\max}$  і  $|w_E|_{\max}$  – максимальні амплітуди прогинів оболонки при навантаженнях  $q_0 = 1$  Па,  $V_a = 0$  і  $q_0 = 0$ ,  $\pm V_a = 1$  В, відповідно.

Нехай тепер п'єзощари з розімкнутими зовнішніми електродами виконують роль сенсора. При механічному гармонічному навантаженні на електродах сенсора виникає різниця електричних потенціалів  $V_s$ , яку можна визначити експериментально або розрахувати чисельно. У розглядуваному випадку потенціал на електродах верхнього п'єзощару ( $z = H/2$ ) оболонки з використанням умови (1) обчислюється за формулою

$$\frac{V_s}{\delta} = \frac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{31}(T) \left( \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\theta + \frac{h + \delta}{2} x_\alpha \right) d\alpha}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} b_{33}(T) d\alpha}. \quad (13)$$

Для контролю вимушених коливань оболонки необхідно за зумовленим зовнішнім навантаженням показником  $V_s$  сенсора визначити показник електричного потенціалу  $V_a$ , який необхідно підвести до електродів п'єзощарів, вважаючи їх актуаторами, щоб компенсувати невідоме навантаження. З цією метою використаємо найбільш характерну для модальної форми

демпфування коливань тонкостінних елементів лінійну залежність оберненого зв'язку [4]

$$V_a = G_{as} V_s, \quad (14)$$

у якій  $G_{as}$  – коефіцієнт оберненого зв'язку.

Варіюванням коефіцієнта  $G_{as}$  можна за показником  $V_s$  визначити таку величину різниці потенціалів  $2V_a$ , протифазну з  $V_s$ , підведення якої до електродів актуатора значно знизить амплітуду вимушених коливань оболонки або повністю її погасить. Числове значення компенсаційного коефіцієнта  $G_{as}$ , згідно з [6, 9], розраховуємо за формулою

$$G_{as} = \frac{|V_a^1(\Delta)|}{|V_s^1(\Delta)|}. \quad (15)$$

Тут амплітуди еталонних показників актуатора  $V_a^1$  і сенсора  $V_s^1$  обчислюються відповідно за формулами (11) і (13) при навантаженні оболонки з амплітудою  $q_0 = 1$  Па.

**3. Результати розрахунків та їх аналіз.** Числові розрахунки проводились для оболонки, пасивний шар якої виготовлено із полімеру, а п'єзощари – із п'єзокераміки типу ЦТС<sub>T</sub>БС-2. Теплофізичні коефіцієнти та температурні залежності механічних і п'єзоелектричних в'язкопружних модулів цих матеріалів наведено в роботах [6, 9]. Геометричні розміри оболонки такі:  $R = 0.1$  м,  $\ell = 0.2$  м,  $\delta = 0.1 \cdot 10^{-4}$  м.

На рис. 1 для оболонки, зовнішні п'єзощари якої є актуаторами, зображено залежності від параметра  $\Delta$  розподілу максимальних амплітуд прогинів  $\tilde{w}_q = |w| \cdot 10^7$  м (штрихові лінії), зумовлених поверхневим тиском амплітуди  $q_0 = 1$  Па ( $V_a = 0$ ), та амплітуд  $\tilde{w}_E = |w| \cdot 10^6$  м (суцільні лінії), розрахованих при підведенні до зовнішніх ( $z = \pm H/2$ ) електродів актуатора електричних потенціалів  $\pm V_a = 1$  В ( $q = 0$ ). Криві 1–4 одержано при незалежних від температури властивостях матеріалів для таких значень товщини  $h$  пасивного шару та резонансних частот  $\omega$ :

криві 1:	$h = 0.4 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15620$ с <sup>-1</sup> ,
криві 2:	$h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15450$ с <sup>-1</sup> ,
криві 3:	$h = 0.75 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15230$ с <sup>-1</sup> ,
криві 4:	$h = 1 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15130$ с <sup>-1</sup> .

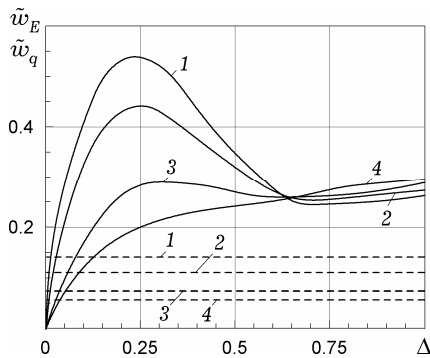


Рис. 1

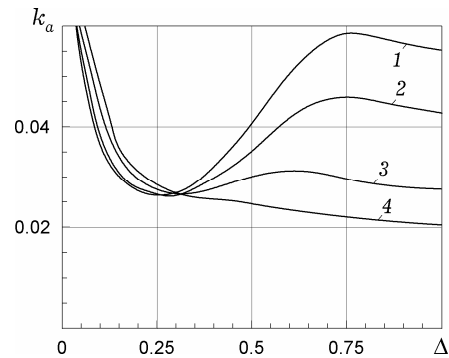


Рис. 2

Залежності обчислених за формулою (12) коефіцієнтів керування  $k_a$  від параметра  $\Delta$  для вказаних варіантів оболонки показано на рис. 2. Тут і

далі параметр  $\Delta$  вибираємо так, щоб його центр співпадав з координатою максимальних прогинів оболонки при електричному збудженні. Із рис. 1, рис. 2 видно, що розміри  $\Delta$  актуатора, при яких електричне збудження реалізує в оболонці максимальні амплітуди прогинів  $w_E$  (рис. 1) при мінімальних значеннях  $k_a$  (рис. 2), істотно залежать від товщини  $h$  оболонки. Так, зі збільшенням  $h$  у розглядуваних варіантах оболонок безрозмірний параметр ширини актуатора змінюється від  $\Delta = 0.25$  (криві 1) до  $\Delta = 1$  (криві 4).

У випадку п'єзошарів-сенсорів залежності від параметра  $\Delta$  еталонних показників електричного потенціалу  $V_s^1$  на зовнішніх електродах і коефіцієнтів оберненого зв'язку  $G_{as}$  при механічному збудженні оболонки амплітудою  $q_0 = 1$  Па наведено на рис. 3 і рис. 4. Криві 1–4 обчислено при таких значеннях  $h$  і  $\omega$ :

криві 1:	$h = 0.4 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15730$ с $^{-1}$ ,
криві 2:	$h = 0.5 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15540$ с $^{-1}$ ,
криві 3:	$h = 0.75 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15290$ с $^{-1}$ ,
криві 4:	$h = 1 \cdot 10^{-2}$ м,	$\omega = 15130$ с $^{-1}$ .

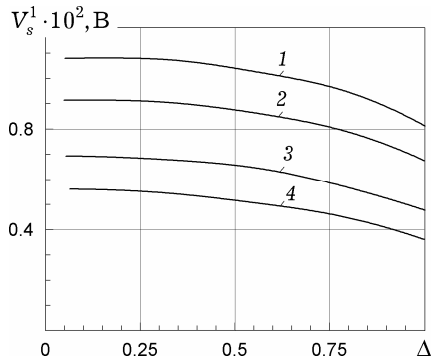


Рис. 3

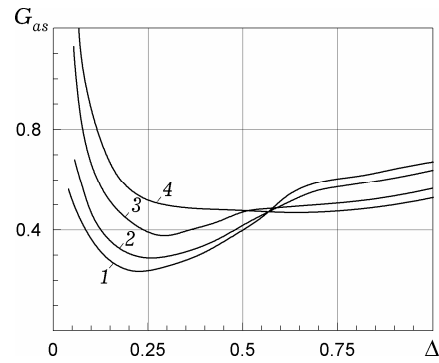


Рис. 4

Поведінка кривих на рис. 3, рис. 4 засвідчує, що електричний потенціал  $V_s^1$  на електродах сенсора монотонно зменшується при збільшенні площі  $\Delta$  сенсора і товщини  $h$  оболонки. Коефіцієнти оберненого зв'язку  $G_{as}$ , змінюючись немонотонно, досягають мінімальних значень при тих же значеннях параметра  $\Delta$ , що й коефіцієнт керування  $k_a$ .

Розподіл амплітуди прогинів  $\tilde{w} = |w| \cdot 10^3 / h$  (криві 1) і температури вібророзігріву (криві 2) при фіксованому розмірі сенсора  $\Delta = 0.7$  ( $x_1 = 0.15$ ,  $x_2 = 0.85$ ) уздовж оболонки товщини  $h = 0.01$  м, розраховані на частоті ізотермічного резонансу  $\omega = 0.152 \cdot 10^5$  с $^{-1}$  при  $q_0 = 0.1 \cdot 10^4$  Па і  $\gamma_k = 0.25$ , зображено на рис. 5. Тут і далі на рис. 6 – рис. 8 штрихові криві відповідають ізотермічним (при  $T = 20$  °С) характеристикам матеріалів, а суцільні – характеристикам матеріалів з урахуванням їх залежності від температури. Частотні залежності максимальних амплітуд прогинів  $\tilde{w}$  при  $x = 0.5$ , температури розігріву  $\Delta T = T_{x=0.5} - T_0$  та показника сенсора  $|V_s|$  показано, відповідно, на рис. 6 – рис. 8, де криві 1, 2 обчислено при  $q_0 = 0.05 \cdot 10^4$  Па і  $q_0 = 0.10 \cdot 10^4$  Па.

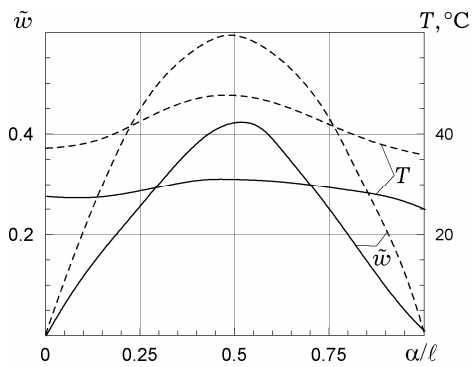


Рис. 5

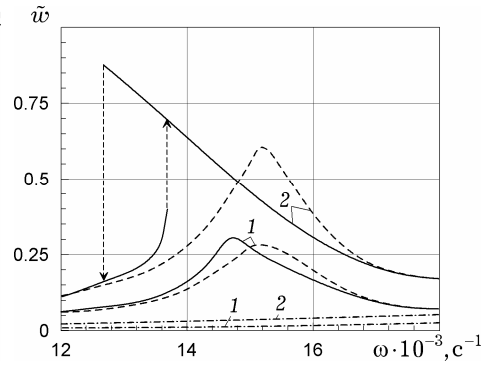


Рис. 6

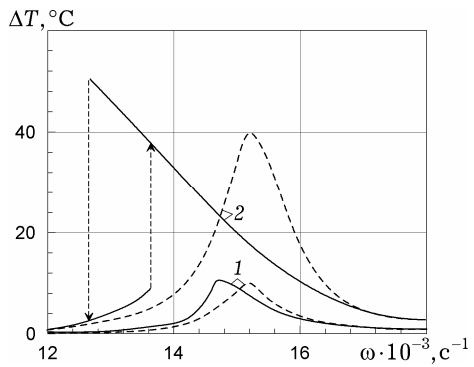


Рис. 7

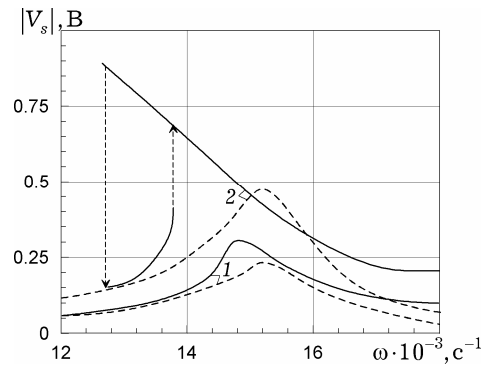


Рис. 8

На рис. 6 штрихпунктирні криві 1, 2 характеризують сумісну проти-фазну дію на оболонку вказаних значень  $q_0$  і компенсуючих це навантаження електричних потенціалів  $\pm V_a = 11.3 \text{ В}$  і  $\pm V_a = 22.6 \text{ В}$ , підведених до електродів актуатора. Компенсуючі потенціали  $V_a$  розраховувались як за формулами (11) і (12) при відомих  $q_0$ , так і за формулами (14) і (15) при невідомих  $q_0$ , але відомих із формули (13) показниках сенсора  $V_s = 0.234 \text{ В}$  та  $V_s = 0.269 \text{ В}$ . При обох способах розрахунків числові значення  $V_a$  співпадають.

На рис. 6 – рис. 8 бачимо, що врахування температурної залежності властивостей матеріалів (суцільні лінії) при вимушених коливаннях оболонки приводить до появи частотних характеристик «м'якого» типу та зменшення резонансної частоти. Аналіз штрихпунктирних кривих показує, що амплітуди прогинів при механічних коливаннях оболонки в околі основного резонансу згинальної моди при підведенні до електродів актуатора компенсуючого електричного потенціалу знижуються більше ніж на порядок.

На рис. 9 залежності усталеної (при  $\tau = 0.25$ ) температури вібророзігріву  $T_m = T|_{x=0.5}$  у центрі оболонки товщини  $h = 0.01 \text{ м}$  від амплітуди  $q_0$  на частоті  $\omega = 0.152 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}$  показано кривими 1, 2, 3, обчисленими відповідно при  $\gamma_k = 0.125, 0.25, 0.5$ .

Із рис. 9 видно, що врахування температурної залежності властивостей матеріалів (суцільні криві) на роз-

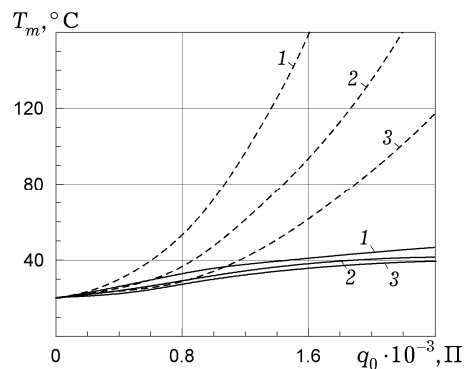


Рис. 9

глядуюваній частоті коливань оболонки суттєво знижує температуру вібророзігріву. Збільшення амплітуди механічного навантаження  $q_0$  і зменшення відносного коефіцієнта теплообміну  $\gamma_k$  супроводжується зростанням температури вібророзігріву оболонки, яка може досягти критичного значення  $T_{cr}$ , при якому розм'якшується пасивний матеріал або деполяризується матеріал п'єзоактивних складових, і система втрачає працездатність. Це свідчить про необхідність розрахунку температур вібророзігріву при вимушених коливаннях тонкостінних елементів розглядуваного типу.

**Висновки.** Наведено наближену постановку задачі про вимушені резонансні коливання і дисипативний розігрів в'язкопружної циліндричної оболонки з п'єзокерамічними сенсорами і актуаторами при осесиметричному моногармонічному навантаженні та врахуванні залежності властивостей матеріалу від температури. На основі числових розрахунків досліджено вплив температурної залежності властивостей матеріалу на амплітудно- і температурно-частотні залежності та електричний показник сенсора при вимушених коливаннях оболонки на частоті першого резонансу згинальної моди. Показано можливість активного гасіння таких коливань оболонки при підведенні протифазного невідомому механічному збудженню електричного потенціалу до електродів п'єзоактуатора, визначеного на основі сенсора.

1. *Жук Я. А., Сенченков И. К.* Моделирование стационарных колебаний и диссипативного разогрева тонкостенных неупругих элементов, содержащих пьезоактивные слои // Прикл. механика. – 2004. – **40**, № 5. – С. 80–91.  
Te same: *Zhuk Ya. A., Senchenkov I. K.* Modelling the stationary vibrations and dissipative heating of thin-walled inelastic elements with piezoactive layers // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 5. – P. 546–556.
2. *Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф.* Электротермовязкоупругость. – Київ: Наук. думка, 1988. – 320 с. – Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
3. *Карнаузов В. Г., Киричок И. Ф., Козлов В. И.* Влияние температуры диссипативного разогрева на активное демпфирование вынужденных колебаний неупругих тонких пластин при помощи пьезоэлектрических сенсоров и актуаторов // Актуальні аспекти фізико-механічних досліджень. Акустика і хвилі. – Київ: Наук. думка, 2007. – С. 127–152.
4. *Карнаузов В. Г., Михайленко В. В.* Нелинейная термомеханика пьезоэлектрических неупругих тел при моногармоническом нагружении. – Житомир: Житомир. держ. технолог. ун-т, 2005. – 426 с.
5. *Киричок И. Ф.* Вынужденные резонансные колебания и диссипативный разогрев гибкой круглой пластинки с пьезоактуаторами // Прикл. механика. – 2012. – **48**, № 5 – С. 112–121.  
Te same: *Kirichok I. F.* Forced resonant vibrations and self-heating of a flexible circular plate with piezoactuators // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, No. 5. – P. 583–591.
6. *Киричок И. Ф.* Осесимметричные резонансные колебания и разогрев оболочек вращения и их контроль пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 8. – С. 42–57.  
Te same: *Kirichok I. F.* Control of axisymmetric resonant vibrations and self-heating of shells of revolution with piezoelectric sensors and actuators // Int. Appl. Mech. – 2010. – **46**, No. 8. – P. 890–901.
7. *Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В.* Вынужденные осесимметричные колебания и разогрев термовязкоупругих цилиндрических оболочек с пьезоактуаторами // Прикл. механика. – 2010. – **46**, № 10. – С. 53–61.  
Te same: *Kirichok I. F., Karnaukhova T. V.* Forced axisymmetric vibrations and self-heating of thermoviscoelastic cylindrical shells with piezoelectric actuators // Int. Appl. Mech. – 2011. – **46**, No. 10. – P. 1132–1138.
8. *Киричок И. Ф., Карнаухова Т. В., Пересунько Н. В.* Резонансные осесимметричные колебания и диссипативный разогрев цилиндрических оболочек и их контроль с помощью пьезоэлектрических актуаторов // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 132–140.



9. Киричок І. Ф., Карнаухова Т. В. Вплив граничних умов і температури дисипативного розігріву на активне демпфування вимушених осесиметричних резонансних згинальних коливань круглих в'язкопружних пластин за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 2. – С. 94–107.  
 The same: Kyrychok I. F., Karnaukhova T. V. Influence of boundary conditions and temperature of dissipative heating on active damping of forced axisymmetric resonant bending vibrations of circular viscoelastic plates by piezoelectric sensors and actuators // *J. Math. Sci.* – 2011. – **178**, No. 5. – P. 480–495.
10. Киричок І., Карнаухова Т. Контроль вимушених коливань круглих в'язкопружних пластинок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів з урахуванням вібророзігріву // *Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології.* – 2009. – Вип. 9. – С. 67–78.
11. Козлов В. І., Карнаухова Т. В., Пересунько М. В. Демпфірування вимушених осесиметричних коливань шарнірно опертої в'язкопружної циліндричної оболонки за допомогою п'єзоелектричних актуаторів // *Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Фіз.-мат. науки.* – 2007. – № 4. – С. 107–113.
12. *IUTAM Symposium on smart structures and structronic systems: Proc. IUTAM Symp. (Magdeburg, Germany, 26–29 Sept. 2000) / Eds U. Gabbert, H. S. Tzou.* – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2001. – 384 p.
13. Lu X., Hanagud S. V. Extended irreversible thermodynamics modeling for self-heating and dissipation in piezoelectric ceramics // *IEEE Trans. Ultrason. Ferr.* – 2004. – **51**, No. 12. – P. 1582–1592.
14. Mauck L. D., Lynch Ch. S. Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part I: Computational micromechanical model versus experimental results // *J. Intel. Mater. Syst. Struct.* – 2003. – **14**, No. 9. – P. 587–602.
15. Tzou H. S. Piezoelectric shells: Distributed sensing and control of continua. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – xxiii+468 p.
16. Weiland L. M., Lynch Ch. S. Thermo-electro-mechanical behavior of ferroelectric materials. Part II: Introduction of rate and self-heating effects // *J. Intel. Mater. Syst. Struct.* – 2003. – **14**, No. 10. – P. 605–621.

**ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВИБРОРАЗОГРЕВ  
 ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ  
 С ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ СЕНСОРАМИ И АКТУАТОРАМИ**

*Рассматривается задача об осесимметричных вынужденных резонансных колебаниях и диссипативном разогреве вязкоупругой цилиндрической оболочки с пьезоэлектрическими сенсорами и актуаторами при моногармоническом нагружении. Вязкоупругое поведение пассивного и пьезоактивного материалов описывается в терминах комплексных модулей, зависящих от температуры виброразогрева. На основе численных расчетов исследовано влияние температурной зависимости свойств материалов на динамические характеристики, температуру виброразогрева, электрические показатели сенсора и активное модальное демпфирование оболочки пьезоактуатором с использованием показателя сенсора.*

**AXISYMMETRIC RESONANT VIBRATIONS AND VIBRO-HEATING-UP  
 OF THERMOVISCOELASTIC CYLINDRICAL SHELL WITH  
 PIEZOELECTRIC SENSORS AND ACTUATORS**

*The problem of axisymmetric forced resonant vibrations and dissipative heating-up of a viscoelastic cylindrical shell with piezoelectric sensors and actuators under monoharmonic loading is considered. The viscoelastic behavior of passive and piezoactive materials in terms of complex moduli depending on the temperature of vibro-heating-up is described. On the basis of numerical calculations the effect of the temperature dependence of the properties of materials on dynamic characteristics, temperature of vibro-heating-up, electrical parameters of a sensor and active modal damping of the shell by piezoactuator using indicator sensor are investigated.*

Ин-т механіки ім. С. П. Тимошенка  
 НАН України, Київ

Получено  
 24.08.13