УДК 517.95

Я. О. Баранецький, А. А. Баша

НЕЛОКАЛЬНА БАГАТОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ПОРЯДКУ $2n$

Досліджується нелокальна багатоточкова задача для диференціально-операторних рівнянь порядку $2n$. Розглянуто спектральні властивості оператора задачі та встановлено умови існування і єдиності її розв'язку. Розв'язок задачі знайдено у вигляді розвинення в ряд за системою власних функцій і доведено, що система власних функцій задачі утворює базис Рісса.

Вступ. Для диференціально-операторних рівнянь задачі про побудову збурень у крайових умовах, які залишають інваріантними точковий спектр і повноту системи власних функцій спектральної задачі, описано у роботах [1–3, 6, 7, 9, 10]. У цій статті розглянемо диференціально-операторне рівняння порядку $2n$ з ізоспектральним збуренням, породженим нелокальними багатоточковими умовами.

1. Постановка задачі. Нехай H – сепарабельний гільбертовий простір, $A : H \to H$, $A = A^* > 0$ – додатний самоспряжений оператор з точковим спектром $\sigma_p(A) = \{z_k : z_k \sim a(k^\alpha),\ k \to \infty,\ a, \alpha > 0\}$, $V(A) = \{v_k \in H : Av_k = z_k v_k\}$ – система власних функцій, яка утворює ортонормований базис у просторі H,

$$H(A^m) \equiv \{h \in H : A^m h \in H\}, \qquad (u,v)_{H(A^m)} \equiv (u,v)_H + (A^m u, A^m v)_H ,$$

$$\|h\|^2_{H(A^m)} \equiv \|h\|^2_H + \left\|A^m h\right\|^2_H < \infty, \qquad m > 0 ,$$

$$H_1 \equiv \{u(t) : (0,1) \to H, \qquad \|u(t)\|_H \in L_2(0,1)\} ,$$

$$\|u(t)\|^2_{H_1} \equiv \left\|\|u(t)\|_H\right\|^2_{L_2(0,1)} = \int_0^1 \|u(t)\|^2_H \, dt < \infty ,$$

D_t – сильна похідна в просторі H_1, тобто

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{u(t+\Delta t) - u(t)}{\Delta t} - D_t(t) \right\|_{H_1} = 0 ,$$

$$H_2 \equiv W_2^{2n}((0,1), H) = \{v \in H_1,\ D_t^{2n} v(t) \in H_1,\ A^{2n} v(t) \in H_1\} ,$$

$$\|v\|^2_{H_2} \equiv \left\|D_t^{2n} v\right\|^2_{H_1} + \left\|A^{2n} v\right\|^2_{H_1}, \qquad n \in \mathbb{N} \text{ – фіксоване},$$

$$H_1 = H^p \oplus H^n ,$$

де $H^p \equiv \{v(t) \in H_1 : v(t) \equiv v(1-t)\}$, $H^n \equiv \{v(t) \in H_1 : v(t) \equiv -v(1-t)\}$.

Розглянемо задачу

$$Lu \equiv (-1)^n D_t^{2n} u(t) + A^{2n} u(t) = f(t), \quad t \in (0,1), \quad f(t) \in H_1 , \tag{1}$$

$$\ell_{2j+1} u \equiv D_t^{2j} u(0) + D_t^{2j} u(1) = 0 ,$$

$$\ell_{2j+2} u \equiv D_t^{2j} u(0) - D_t^{2j} u(1) + \sum_{s=1}^{r} a_s \left(D_t^{2j} u(t_s) + D_t^{2j} u(1-t_s) \right) = 0 ,$$

$$-1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < 1, \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad s = 1,2,\ldots,r, \quad j = 0,1,\ldots,n-1 . \tag{2}$$

Під розв'язком [4, 6] задачі (1), (2) будемо розуміти функцію $u(t) \in H_2$, яка задовольняє рівності:

$$\| Lu - f \|_{H_1} = 0, \qquad \left\| \ell_{2j+i} u \right\|_{H(A^{m_j})} = 0,$$

де $m_j = 2n - 2j - \frac{1}{2}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$, $i = 0, 1$.

2. Допоміжна задача. У просторі $L_2(0,1)$ розглянемо допоміжну спектральну задачу

$$\widehat{L}w \equiv -w''(t) = \mu w(t), \qquad \mu \in \mathbb{C}, \tag{3}$$

$$w(0) + w(1) = 0,$$

$$w(0) - w(1) + \sum_{s=1}^{r} a_s \big(w(t_s) + w(1 - t_s) \big) = 0,$$

$$-1 < t_1 < t_2 < \ldots < t_r < 1, \quad a_s \in \mathbb{R}, \quad s = 1, 2, \ldots, r. \tag{4}$$

Якщо $a_s = 0$, то отримаємо граничну задачу

$$\widehat{L}_0 w \equiv -w''(t) = \mu w(t), \qquad \mu \in \mathbb{C},$$

$$w(0) = w(1) = 0$$

з добре відомими властивостями: оператор цієї задачі $\widehat{L}_0 : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ має власні значення $\mu_k = (k\pi)^2$, $k \in \mathbb{N}$, і систему власних функцій $W(\widehat{L}_0) = \{\sqrt{2}\sin k\pi t,\ k \in \mathbb{N}\}$, яка утворює ортонормований базис в $L_2(0,1)$.

Введемо в розгляд оператор $\widehat{L} : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ задачі (3), (4) та подамо простір $L_2(0,1)$ у такому вигляді:

$$L_2(0,1) = H_0^p \oplus H_0^n,$$

де

$$H_0^p \equiv \{ v(t) \in L_2(0,1) : v(1-t) = v(t) \},$$

$$H_0^n \equiv \{ v(t) \in L_2(0,1) : v(1-t) = -v(t) \}.$$

Теорема 1. ***1°***. *Спектр оператора $\widehat{L}$ співпадає зі спектром оператора $\widehat{L}_0$:*

$$\sigma_p(\widehat{L}) = \sigma_p(\widehat{L}_0) = \{ \mu_k = (k\pi)^2,\ k \in \mathbb{N} \}.$$

2°. *Система власних функцій $W(\widehat{L})$ оператора $\widehat{L}$ є повною і мінімальною в $L_2(0,1)$.*

3°. *Система власних функцій $W(\widehat{L})$ оператора $\widehat{L}$ утворює базис Рісса в $L_2(0,1)$.*

Д о в е д е н н я. ***1°***. Власні функції оператора $\widehat{L}$ будемо шукати у вигляді

$$w_k(t) = w_k^0(t) + \Delta w_k(t), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Для $k = 2q$ безпосередньою підстановкою $w_{2q}(t)$ у рівняння (3) можна переконатися, що збурення $\Delta w_{2k}(t) = 0$, тобто $w_{2q}(t) = w_{2q}^0(t) = \sqrt{2}\sin 2q\pi t$ –

власні функції оператора $\widehat{L}$, які відповідають власним значенням $\mu_{2q} = 4q^2\pi^2$, $q \in \mathbb{N}$.

Оскільки загальний розв'язок диференціального рівняння (3) має вигляд $w(t) = C_1 \sin\sqrt{\mu}t + C_2 \cos\sqrt{\mu}t$, то для $k = 2q-1$ власні функції, що відповідають власним значенням $\mu_{2q-1} = (2q-1)^2\pi^2$, $q \in \mathbb{N}$, будемо шукати у вигляді

$$w_{2q-1}(t) = w_{2q-1}^0(t) + \Delta w_{2q-1}(t) = \sqrt{2}\sin(2q-1)\pi t + B_q \cos(2q-1)\pi t\,, \quad (5)$$

де B_q − невідомі коефіцієнти, $q \in \mathbb{N}$.

Для визначення коефіцієнтів B_q підставимо вираз (5) у другу з умов (4), звідки отримаємо $B_q = -\sqrt{2}\sum_{s=1}^{r} a_s \sin(2q-1)\pi t_s$, $q \in \mathbb{N}$.

Отже, власні функції оператора $\widehat{L}$ мають вигляд

$$w_k(t) = \sqrt{2}\sin 2q\pi t, \qquad k = 2q, \qquad q \in \mathbb{N}\,,$$

$$w_k(t) = \sqrt{2}\sin(2q-1)\pi t -$$

$$-\sqrt{2}\sum_{s=1}^{r} a_s \sin(2q-1)\pi t_s \cos(2q-1)\pi t, \quad k = 2q-1, \quad q \in \mathbb{N}\,.$$

2°. Доведемо повноту системи $W(\widehat{L})$ у просторі $L_2(0,1)$. Оскільки в гільбертовому просторі поняття повноти співпадає з поняттям тотальності [3, 8], то будемо доводити тотальність цієї системи.

Нехай h − довільний елемент з простору $L_2(0,1)$, ортогональний до елементів системи $W(\widehat{L})$, тобто $(h, w_k)_{L_2(0,1)} = 0$, і його можна подати у вигляді суми $h = h_1 + h_0$, де $h_1 \in H_0^n$, $h_0 \in H_0^p$.

Тоді для $k = 2q-1$ маємо

$$(h, w_{2q-1})_{L_2(0,1)} = (h_0 + h_1, w_{2q-1}^0)_{L_2(0,1)} = (h_0, w_{2q-1}^0)_{L_2(0,1)}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Оскільки система $\{w_{2q-1}^0\}_{q=1}^{\infty}$ є тотальною у просторі H_0^p, то $h_0 = 0$. Тому $h = h_1$.

Для $k = 2q$ отримуємо

$$(h_1, w_{2q})_{L_2(0,1)} = (h_1, w_{2q}^0 + \Delta w_{2q})_{L_2(0,1)} = (h_1, w_{2q}^0)_{L_2(0,1)} = 0\,,$$

оскільки $(h_1, \Delta w_{2q}) = 0$, $\Delta w_{2q} \in H_0^p$, $q \in \mathbb{N}$. З тотальності $\{w_{2q}^0\}_{q=1}^{\infty}$ у просторі H_0^n випливає, що $h_1 = 0$.

Отже, $h = 0$, тобто система $W(\widehat{L})$ є тотальною у просторі $L_2(0,1)$.

Введемо оператори $Q, R : L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ такі, що

$$Q : \begin{cases} w_{2k}^0 \to w_{2k}^0 \in H_0^n, \\ w_{2k-1}^0 \to w_{2k-1}^0 + \Delta w_{2k-1} \in H_0^p, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}\,,$$

$$Q = E + R\,,$$

де E − одиничний оператор в $L_2(0,1)$. Тоді оператор R визначається таким чином:

$$R:\begin{cases} w_{2k}^0 \to 0, \\ w_{2k-1}^0 \to \Delta w_{2k-1}, \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

З означення оператора R та повноти системи $W(\widehat{L})$ в $L_2(0,1)$ маємо

$$R: H_0^n \to 0, \qquad R: H_0^p \to H_0^n.$$

Тоді $RR: H_0^n \to 0$, $RR: H_0^p \to 0$, тобто $R^2 = \mathcal{O}$, де $\mathcal{O}$ − нульовий оператор у просторі $L_2(0,1)$.

Звідси випливає, що $Q^{-1} = E - R$, $(Q^*)^{-1} = E - R^*$, де Q^* − спряжений до Q оператор:

$$\forall\, u, v \in L_2(0,1): (Qu, v)_{L_2(0,1)} = (u, Q^* v)_{L_2(0,1)}.$$

Тому можемо стверджувати, що система власних функцій $W(\widehat{L})$ оператора $\widehat{L}$ має єдину біортогональну систему $\tilde{W}(\widehat{L})$ ($(w_k, \tilde{w}_m)_{L_2(0,1)} = \delta_{k,m}$, $k, m \in \mathbb{N}$) [5] в $L_2(0,1)$, утворену дією $(Q^*)^{-1} = E - R^*$ на елементи з $W(\widehat{L}_0): \tilde{w}_m = (Q^*)^{-1} w_k^0$.

Оскільки існує біортогональна до $W(\widehat{L})$ система, то $W(\widehat{L})$ є мінімальною.

3°. Щоб довести базисність Рісса системи $W(\widehat{L})$ в $L_2(0,1)$, згідно з формулою (6) достатньо довести обмеженість оператора $R: L_2(0,1) \to \to L_2(0,1)$.

Нехай $h \in L_2(0,1)$. Зобразимо h рядом Фур'є за системою $W(\widehat{L}_0)$:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(h_k^1 \sqrt{2} \sin 2k\pi t + h_k^0 \sqrt{2} \sin (2k-1)\pi t \right).$$

Згідно з означенням оператора R маємо

$$Rh(t) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k^0 \left(\sqrt{2} \sin (2k-1)\pi t - \sqrt{2} \sum_{s=1}^{r} a_s \sin (2k-1)\pi t_s \cos (2k-1)\pi t \right).$$

Записавши норму оператора R в $L_2(0,1)$:

$$\|Rh(t)\|_{L_2(0,1)}^2 = \left\| R\left(\sum_{k=1}^{\infty} h_k^1 \sqrt{2} \sin 2k\pi t + h_k^0 \sqrt{2} \sin (2k-1)\pi t \right) \right\|_{L_2(0,1)}^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_k^0 \left(\sqrt{2} \sin (2k-1)\pi t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sqrt{2} \sum_{s=1}^{r} a_s \sin (2k-1)\pi t_s \cos (2k-1)\pi t \right) \right\|_{L_2(0,1)}^2,$$

оцінимо її , враховуючи, що $L_2(0,1) = H_0^n \oplus H_0^p$:

$$\|Rh(t)\|_{L_2(0,1)}^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} h_k^{0,p} \sqrt{2} \sin (2k-1)\pi t \right\|_{L_2(0,1)}^2 +$$

$$+\left\|\sum_{k=1}^{\infty} h_k^{0,n} B_k \cos(2k-1)\pi t\right\|^2_{L_2(0,1)} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{\infty}\left\|h_k^{0,p}\right\|^2_{L_2(0,1)} + \frac{1}{2}\max_{k\in\mathbb{N}}|B_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty}\left\|h_k^{0,n}\right\|^2_{L_2(0,1)} \le$$

$$\le \max\left\{1, \frac{1}{2}\max_{k\in\mathbb{N}}|B_k|^2\right\}\|h\|^2_{L_2(0,1)}.$$

Отже, оператор R обмежений в $L_2(0,1)\to L_2(0,1)$:

$$\|Rh(t)\|_{L_2(0,1)} \le C\|h\|_{L_2(0,1)}, \qquad C = \sqrt{\max\left\{1, \frac{1}{2}\max_{k\in\mathbb{N}}|B_k|^2\right\}} < \infty.$$

3. Властивості задачі (1), (2). Повернемось до вихідної задачі (1), (2). Розглянемо спектральну задачу, відповідну задачі (1), (2):

$$(-1)^n D_t^{2n} u(t) + A^{2n} u(t) = \lambda u(t), \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \qquad t\in(0,1),$$

$$\ell_m u(t) = 0, \qquad m = 1,2,\ldots,2n, \qquad n\in\mathbb{N}.$$

Розв'язок цієї задачі шукаємо у вигляді

$$u(t) = u_k(t) v_k, \quad u_k(t)\in L_2(0,1), \quad v_k \in V(A), \quad k\in\mathbb{N}.$$

Враховуючи властивість ортогональності і повноти системи $V(A)$ у просторі H_1, для визначення $u_k(t)$ для кожного $k\in\mathbb{N}$ приходимо до такої задачі:

$$(-1)^n u_k^{2n}(t) + z_k^{2n} u_k(t) = \lambda u_k(t), \qquad \lambda\in\mathbb{C}, \qquad t\in(0,1),$$

$$\ell_m u_k(t) = 0, \qquad m = 1,2,\ldots,2n, \qquad n,k\in\mathbb{N}.$$

Ця задача має власні значення $\lambda_k = (k\pi)^2$, $k\in\mathbb{N}$, і систему власних функцій

$$V = \Big\{\sqrt{2}\sin k\pi t + \sqrt{2}\sin(2k-1)\pi t -$$

$$- \sqrt{2}\sum_{s=1}^{r} a_s \sin(2k-1)\pi t_s \cos(2k-1)\pi t,\ k\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Для оператора $L: H_1 \to H_1$ задачі (1), (2) можна показати правильність такого твердження.

Лема 1. *Оператор* L *має власні значення* $\lambda_{k,s} = (\pi s)^{2n} + z_k^{2n}$, $k,s\in\mathbb{N}$, *та систему власних функцій*

$$V(L) = \Big\{v_{k,\ell}\in H_1 : v_{k,\ell} = \Big(\sqrt{2}\sin 2\ell\pi t + \sqrt{2}\sin(2\ell-1)\pi t -$$

$$- \sum_{s=1}^{r} a_s \sin(2\ell-1)\pi t_s \cos(2\ell-1)\pi t\Big) v_k,\ k,\ell\in\mathbb{N}\Big\}.$$

Теорема 2. *Система власних функцій оператора* L *утворює базис Рісса у просторі* H_1.

Д о в е д е н н я цієї теореми випливає з відомого твердження, що добуток базису Рісса в $L_2(0,1)$ на ортонормований базис у просторі H є базисом Рісса в просторі H_1, який ізоморфний тензорному добутку гільбертових просторів $L_2(0,1)$ та H. ♦

При цьому для будь-якого елемента $f \in H_1$ існують додатні числа m_1, m_2, M_1, M_2 такі, для яких справджуються нерівності

$$m_1 \|f\|^2_{H_1} \le \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left|(f, v_{k,\ell})_{H_1}\right|^2 \le M_1 \|f\|^2_{H_1}, \tag{7}$$

$$m_2 \|f\|^2_{H_1} \le \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left|(f, w_{k,\ell})_{H_1}\right|^2 \le M_2 \|f\|^2_{H_1}. \tag{8}$$

Розглянемо питання існування і єдиності розв'язку задачі (1), (2).

Теорема 3. *Для кожного* $f(t) \in H_1$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *у вигляді ряду за системою власних функцій* $V(L)$ *і виконується нерівність*

$$\|u\|^2_{H_2} \le C\|f\|^2_{H_1}.$$

Д о в е д е н н я. *Існування.* Вектор-функцію $f(t)$ розвинемо в ряд за системою $V(L)$:

$$f(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} f_{k,\ell} v_{k,\ell}, \qquad f_{k,\ell} = \int_0^1 (f(t), v_{k,\ell}(t))\,dt, \qquad k, \ell \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} u_{k,\ell} v_{k,\ell}. \tag{10}$$

Для визначення невідомих $u_{k,\ell} \in \mathbb{R}$ підставимо ряди (9), (10) у рівняння (1). Враховуючи біортогональність систем $V(L)$, $\tilde{W}(\widehat{L})$, отримаємо

$$u_{k,\ell} = \lambda^{-1}_{k,\ell} f_{k,\ell}, \qquad k, \ell \in \mathbb{N}.$$

Отже, формальний розв'язок задачі (1), (2) має такий вигляд:

$$u(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \lambda^{-1}_{k,\ell} f_{k,\ell} v_{k,\ell}. \tag{11}$$

Дослідимо властивості цього розвинення. Оцінимо норму $u(t)$ в H_1:

$$\|u(t)\|^2_{H_1} < \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \lambda^{-1}_{k,\ell} f_{k,\ell} v_{k,\ell} \right\|^2_{H_1} \le \frac{1}{\lambda^2_{1,1}} M_1 \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left|f_{k,\ell}\right|^2_{H_1} \le \frac{1}{\lambda^2_{1,1}} M_1 M_2 \|f\|^2_{H_1} < \infty.$$

Отже, $u(t) \in H_1$.

Потрібно показати, що

$$\|u(t)\|^2_{H_2} = \|u(t)\|^2_{H_1} + \left\|D^{2n}_t u(t)\right\|^2_{H_1} + \left\|A^{2n} u(t)\right\|^2_{H_1} \le C\|f(t)\|^2_{H_1}.$$

Покажемо, що функції $\varphi(t) \equiv A^{2n} u(t)$ і $\psi(t) \equiv (-1)^n D^{2n}_t u(t)$ належать до простору H_1. Розвинемо функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ у ряди за системою $V(L)$:

$$\varphi(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{f_{k,\ell}\, z_k^{2n}}{(2\ell\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \sqrt{2} \sin 2\ell\pi t\, v_k +$$

$$+ \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{f_{k,\ell} z_k^{2n}}{((2\ell-1)\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \Bigg[\sqrt{2} \sin (2\ell-1)\pi t -$$

$$- \sum_{s=1}^{r} a_s \sin (2\ell-1)\pi t_s \cos (2\ell-1)\pi t \Bigg],$$

$$\psi(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{f_{k,\ell}(2\ell\pi)^{2n}}{(2\ell\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \sqrt{2} \sin 2\ell\pi t \, v_k +$$

$$+ \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \frac{f_{k,\ell} \quad ((2\ell-1)\pi)^{2n}}{((2\ell-1)\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \Big[\sqrt{2} \sin(2\ell-1)\pi t -$$

$$- \sum_{s=1}^{r} a_s \sin(2\ell-1)\pi t_s \cos(2\ell-1)\pi t \Big] v_k .$$

Оцінимо $\varphi(t)$ за нормою у просторі $H_1 = H^p \oplus H^n$:

$$\|\varphi(t)\|_{H_1}^2 = \|\varphi_p(t)\|_{H_1}^2 + \|\varphi_n(t)\|_{H_1}^2 =$$

$$= \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k,\ell} z_k^{2n}}{(2\ell\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \sqrt{2} \sin 2\ell\pi t \right) v_k \right\|_{H_1}^2 +$$

$$+ \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k,\ell} \, z_k^{2n}}{((2\ell-1)\pi)^{2n} + z_k^{2n}} [\sqrt{2} \sin(2\ell-1)\pi t - \right.\right.$$

$$\left.\left. - B_\ell \cos(2\ell-1)\pi t] \right) v_k \right\|_{H_1}^2 \le$$

$$\le \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k,\ell} z_k^{2n}}{(2\ell\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \sqrt{2} \sin 2\ell\pi t \right) v_k \right\|_{H_1}^2 +$$

$$+ 2 \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k,\ell} \, z_k^{2n}}{((2\ell-1)\pi)^{2n} + z_k^{2n}} \sqrt{2} \sin(2\ell-1)\pi t \right) v_k \right\|_{H_1}^2 +$$

$$+ 2 \left\| \sum_{k,\ell=1}^{\infty} \left(\frac{f_{k,\ell} \, z_k^{2n}}{((2\ell-1)\pi)^{2n} + z_k^{2n}} [B_\ell \cos(2\ell-1)\pi t] \right) v_k \right\|_{H_1}^2 \le$$

$$\le (3 + 2M) M_1 M_2 \, \|f(t)\|_{H_1}^2 < \infty .$$

Тут використано те, що

$$\|v_k\|_H^2 = 1, \qquad \frac{z_k^{2n}}{(2\ell\pi)^{2n} + z_k^{2n}} < 1, \qquad \|B_\ell\|_{H_1}^2 < M < \infty, \qquad k, \ell \in \mathbb{N},$$

а також нерівності (7), (8) для $f(t)$. Отже, $\varphi(t) \in H_1$.

Для функції $\psi(t)$ аналогічними міркуваннями отримуємо

$$\|\psi(t)\|_{H_1}^2 \le (3 + 2M) M_1 M_2 \, \|f(t)\|_{H_1}^2 < \infty .$$

Отже, $\psi(t) \in H_1$. Підсумовуючи, остаточно для $u(t)$ маємо таку оцінку:

$$\|u(t)\|_{H_2}^2 \le C \|f(t)\|_{H_1}^2 ,$$

де $C = \left(\frac{1}{\lambda_{1,1}^2} + (6 + 4M) \right) M_1 M_2 < \infty$.

Єдиність розв'язку доведемо від супротивного.

Припустимо, що існують два різні розв'язки задачі (1), (2) $u_i(t)$, $i = 1, 2$. Різницю цих розв'язків позначимо через $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$. Розв'язок задачі (1), (2) подамо у вигляді ряду за системою $V(L)$ власних функцій оператора L і використаємо формулу (10):

$$u(t) = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} u_{k,\ell} v_{k,\ell} = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} (\lambda_{k,\ell}^{-1} - \lambda_{k,\ell}^{-1}) f_{k,\ell} v_{k,\ell} = \sum_{k,\ell=1}^{\infty} 0 \cdot f_{k,\ell} v_{k,\ell} = 0 .$$

Таким чином, $u(t) = 0$ у просторі H_1, а це суперечить припущенню, що розв'язки різні. Отже, розв'язок задачі єдиний. ♦

1. *Баранецький Я. О., Каленюк П. І., Ярка У. Б.* Збурення крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Прикл. математика. – 1998. – **1**, № 337. – С. 70–73.
2. *Баранецький Я. О., Ярка У. Б.* Про один клас крайових задач для диференціально-операторних рівнянь парного порядку // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1999. – **42**, № 4. – С. 64–67.
3. *Бари Н. К.* Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве // Уч. записки Моск. гос. ун-та. – 1951. – **4**, вып. 148. – С. 69–107.
4. *Горбачук В. Н., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
5. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. – Москва: Наука, 1965. – 448 с.
6. *Каленюк П. И., Баранецкий Я. Е., Нитребич З. Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – Киев: Наук. думка, 1993. – 230 с.
7. *Курдюмов В. П., Хромов А. П.* О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – Вып. 6. – С. 80–82.
8. *Михайлов В. П.* О базисах Рисса в $\mathcal{L}_2(0,1)$ // Докл. АН СССР. – 1962. – **144**, № 5. – С. 981–984.
9. *Jakobson D., Levitin M., Nadirashvili N., Polterovich I.* Spectral problems with mixed Dirichlet–Neumann boundary conditions: isospectrality and beyond // J. Comput. Appl. Math. – Special issue on 60th birthday of Prof. Brian Davies. – 2006. – **194**, No. 1. – P. 141–155.
10. *Kopzhassarova A., Sarsenbi A.* Basis properties of eigenfunctions of second-order differential operators with involution // Abstr. Appl. Anal. – 2012. – **2012**. – Article ID 576843, 6 pages.

НЕЛОКАЛЬНАЯ МНОГОТОЧЕЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОРЯДКА $2n$

Исследуется нелокальная многоточечная задача для дифференциально-операторных уравнений порядка $2n$. Рассмотрены спектральные свойства оператора задачи и установлены условия существования и единственности ее решения. Решение задачи найдено в виде разложения в ряд по системе собственных функций и доказано, что система собственных функций задачи образует базис Рисса.

NONLOCAL MULTIPOINT PROBLEM FOR DIFFERENTIAL OPERATOR EQUATIONS OF $2n$ TH ORDER

The nonlocal multipoint problem for the $2n$ th order differential operator equations is studied. The spectral properties of operator of the problem are considered and conditions of existence and uniqueness of the solution of the problem are established. The solution of this problem is found in the form of eigenfunctions expansion in a series and also it is proved that the system of eigenfunctions of the problem is the Riss basis.

Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
07.05.13