УДК: 517.956

А. М. Кузь

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ЗА ЧАСОМ ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНИХ ЗА ШИЛОВИМ СИСТЕМ РІВНЯНЬ

В області, що є декартовим добутком відрізка $[0,T]$ і простору $\mathbb{R}^p$, досліджено задачу з інтегральними умовами за часовою координатою для параболічних за Шиловим систем рівнянь у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Вступ. Дослідження задач з інтегральними умовами за виділеною змінною для рівнянь із частинними похідними розпочались порівняно недавно (друга половина XX століття). Їх вивчення зумовлене як потребою побудови загальної теорії крайових задач для рівнянь із частинними похідними, так і тим, що задачі з інтегральними умовами виникають при математичному моделюванні багатьох фізичних процесів у випадку, коли неможливо безпосередньо визначити певні фізичні величини, але відомі їхні усереднені значення. Такі задачі, взагалі кажучи, є умовно коректними, а їх розв'язність часто пов'язана з проблемою малих знаменників [10].

Дослідженню задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними присвячено багато робіт (див. [2–4, 6, 7, 11, 14, 15, 17, 19, 20] та бібліографію там), однак для систем таких рівнянь ці задачі досліджені мало. Зокрема, у праці [14] у p-вимірному шарі досліджено задачу з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь із частинними похідними першого порядку. Встановлено коректність задачі у класах функцій скінченної гладкості зі степеневим зростанням за просторовими змінними. У [7] досліджувалась задача з інтегральними умовами за часовою змінною у вигляді послідовних моментів від шуканої функції та умовами 2π-періодичності за просторовими координатами для безтипної системи рівнянь високого порядку.

У цій роботі вивчається задача знаходження майже періодичного [16, 18] за просторовими координатами розв'язку параболічної за Шиловим системи рівнянь високого порядку з умовами за часовою змінною, частинними випадками яких є інтегральні умови у вигляді довільних моментів від шуканої функції, а також умови Коші.

1. Основні позначення. Будемо використовувати такі позначення: $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $dx=dx_1\ldots dx_p$; $k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbb{Z}^p$, $|k|=|k_1|+\ldots+|k_p|$; $s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|s|=s_1+\ldots+s_p$; $\tilde{s}=(s_0,s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$, $|\tilde{s}|=s_0+s_1+ +\ldots+s_p$, $\eta^s=\eta_1^{s_1}\ldots\eta_p^{s_p}$ $\forall\eta\in\mathbb{R}^p$; $\mu_k=(\mu_{k_1},\ldots,\mu_{k_p})\in\mathbb{R}^p$, $|\mu_k|=|\mu_{k_1}|+ +\ldots+|\mu_{k_p}|$, $(\mu_k,x)=\mu_{k_1}x_1+\ldots+\mu_{k_p}x_p$; $D^p=(0,T)\times\mathbb{R}^p$, $\Pi_H^p=[0,H]^p$; $\mathbf{I}_m$, $\mathbf{O}_m$ – одинична та нульова матриці розміру $m\times m$ відповідно; $[a]$ – ціла частина числа $a\in\mathbb{R}$; C_j, $j\in\{1,2,\ldots\}$, – додатні величини, які не залежать від k і μ_k.

2. Постановка задачі. В області D^p розглядаємо задачу

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},\frac{\partial}{\partial x}\right)[\mathbf{u}]:=\frac{\partial^n\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{j=0}^{n-1}\mathbf{A}_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^j\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^j}=\mathbf{0},\qquad (t,x)\in D^p, \qquad (1)$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – 57, № 3. – С. 16-28.

$$U_j[\mathbf{u}] := \alpha_j \left. \frac{\partial^{j-1}\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^{j-1}} \right|_{t=0} + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j}\mathbf{u}(t,x)\,dt = \boldsymbol{\varphi}_j(x)\,,$$

$$j \in \{1,\dots,n\}, \qquad x \in \mathbb{R}^p\,, \tag{2}$$

у якій $\mathbf{u}(t,x) = \mathrm{col}\left(u^1(t,x),\dots,u^m(t,x)\right)$, $\mathbf{A}_j(\eta) = \left\| \sum_{|s|\le N} a^j_{q\ell,s}\eta^s \right\|_{q,\ell=1}^m$, $a^j_{q\ell,s} \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{R}^p$, $N > n$; $\alpha_j,\beta_j \in \mathbb{R}$, $\alpha_j^2 + \beta_j^2 \ne 0$, $r_j \in \mathbb{Z}_+$, $j \in \{1,\dots,n\}$; $r_1 < r_2 < \dots < r_n$; вектор-функції $\mathbf{j}_j(x) = \mathrm{col}\left(\varphi_j^1(x),\dots,\varphi_j^m(x)\right)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, є майже періодичними за x із заданим спектром $\mathcal{M} := \{\mu_k \in \mathbb{R}^p : \mu_{k_j} \in \mathcal{V}$, $j \in \{1,\dots,p\},\, k \in \mathbb{Z}^p\}$ де

$$\mathcal{V} := \{\mu_q \in \mathbb{R},\, \mu_{-q} = -\mu_q,\, d_1|q|^{\theta_1} \le |\mu_q| \le d_2|q|^{\theta_2}\,,$$

$$0 < d_1 \le d_2,\, 0 < \theta_1 \le \theta_2,\, q \in \mathbb{Z}\}\,, \tag{3}$$

та розвиваються у векторні ряди Фур'є вигляду

$$\boldsymbol{\varphi}_j(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \boldsymbol{\varphi}_{jk} \exp(i\mu_k, x), \quad \boldsymbol{\varphi}_{jk} = \mathrm{col}\left(\varphi^1_{jk},\dots,\varphi^m_{jk}\right), \quad j \in \{1,\dots,n\}\,, \tag{4}$$

причому

$$\boldsymbol{\varphi}_{jk} = \lim_{H\to\infty} \frac{1}{H^p} \int\limits_{\Pi_H^p} \boldsymbol{\varphi}_j(x)\exp(-i\mu_k, x)\,dx\,.$$

Вважаємо, що система (1) є параболічною за Шиловим [1], тобто для кожного вектора $\eta \in \mathbb{R}^p \setminus \{\mathbf{0}\}$ корені $\gamma_j(\eta)$, $j \in \{1,\dots,mn\}$, характеристичного рівняння

$$\det L(\gamma, i\eta) = \det\left\| \gamma^n \mathbf{I}_m + \sum_{j=0}^{n-1} \gamma^j \mathbf{A}_j(i\eta) \right\| = 0\,, \tag{5}$$

яке відповідає системі (1), справджують оцінки

$$\max_{1\le j\le mn} \mathrm{Re}\,\gamma_j(\eta) \le -C_H|\eta|^h + C_0, \qquad C_H > 0, \quad h > 0, \quad C_0 \in \mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Із (3) випливає, що для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ виконуються такі оцінки:

$$D_1|k|^{\theta_1} \le |\mu_k| \le D_2|k|^{\theta_2}\,,$$

$$D_1 = d_1 \min\{1, p^{1-\theta_1}\}, \qquad D_2 = d_2 \max\{1, p^{1-\theta_2}\}\,. \tag{7}$$

При дослідженні розв'язності задачі (1), (2) використовуватимемо такі функціональні простори:

– $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta,\gamma > 0$, – простір, отриманий шляхом поповнення простору поліномів вигляду $v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} v_k \exp(i\mu_k, x)$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, за нормою [16]

$$\left\| v, W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\| = \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^p} |v_k|^2 (1+|\mu_k|)^{2\alpha} \exp\left(2\beta|\mu_k|^\gamma\right) \right)^{1/2};$$

– $C^q\left([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}\right)$ – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)\exp(i\mu_k, x)$, $u_k(t) \in C^q[0,T]$, $\mu_k \in \mathcal{M}$, таких, що для довільного фіксованого $t \in [0,T]$

похідні $d^j u(t,x)/dt^j = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k^{(j)}(t)\exp(i\mu_k, x)$, $j \in \{0,1,\dots,q\}$, належать простору $W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$ і є неперервними за t у нормі цього простору

$$\left\| u, C^q([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\| = \sum_{j=1}^{q} \max_{t\in[0,T]} \left\| \frac{\partial^j u}{\partial t^j}, W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\|;$$

– $\bar{W}_{\mathcal{M},\ell}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta, \gamma > 0$, $\ell \in \mathbb{N}$, – простір вектор-функцій $\mathbf{v}(x) = \operatorname{col}\left(v^1(x), \dots, v^\ell(x)\right)$ таких, що $v^q(x) \in W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}$, $q \in \{1,\dots,\ell\}$, з нормою

$$\left\| \mathbf{v}, \bar{W}_{\mathcal{M},\ell}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\| = \sum_{q=1}^{\ell} \left\| v^q, W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma} \right\|;$$

– $C^q([0,T], \bar{W}_{\mathcal{M},\ell}^{\alpha,\beta,\gamma})$ – простір вектор-функцій $\mathbf{u}(t,x) = \operatorname{col}\left(u^1(t,x), \dots, u^\ell(t,x)\right)$ таких, що $u^j(t,x) \in C^q([0,T], W_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma})$, $j \in \{1,\dots,\ell\}$, з нормою

$$\left\| \mathbf{u}, C^q([0,T], \bar{W}_{\mathcal{M},\ell}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\| = \sum_{j=1}^{\ell} \left\| u^j, C^q([0,T], \bar{W}_{\mathcal{M}}^{\alpha,\beta,\gamma}) \right\|.$$

3. Єдиність розв'язку задачі. Позначимо

$$\mathbf{\Phi}(x) = \operatorname{col}\left(\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\right),$$

$$\mathbf{e}_q = \operatorname{col}(\underbrace{0,\dots,0}_{q-1},1,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^{mn}, \qquad q \in \{1,\dots,mn\},$$

$$\mathbf{V}(t,x) = \operatorname{col}\left(V^1(t,x), \dots, V^{mn}(t,x)\right) =$$

$$= \operatorname{col}\left(\mathbf{u}(t,x), \frac{\partial \mathbf{u}(t,x)}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{n-1}\mathbf{u}(t,x)}{\partial t^{n-1}} \right), \tag{8}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \cdots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \mathbf{I}_m & \cdots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \cdots & \mathbf{I}_m \\ -\mathbf{A}_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & -\mathbf{A}_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & -\mathbf{A}_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) & \cdots & -\mathbf{A}_{n-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \alpha_2\mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \alpha_n\mathbf{I}_m \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \beta_1\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \mathbf{O}_m & \beta_2\mathbf{I}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{O}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \beta_n\mathbf{I}_m \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R}(t) = \begin{pmatrix} t^{r_1}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ t^{r_2}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \dots & \mathbf{O}_m \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що задача (1), (2) еквівалентна такій задачі для системи рівнянь першого порядку:

$$\frac{\partial \mathbf{V}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathbf{V}(t,x), \tag{10}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{V}(0,x) + \mathcal{B}\int_0^T \mathcal{R}(t)\mathbf{V}(t,x)\,dt = \mathbf{\Phi}(x). \tag{11}$$

Майже періодичний за x зі спектром $\mathcal{M}$ розв'язок задачі (10), (11) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$\mathbf{V}(t,x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \mathbf{V}_k(t)\exp(i\mu_k, x). \tag{12}$$

Підставивши ряди (4), (12) у рівняння (10) та умови (11), отримуємо для знаходження кожного з коефіцієнтів $\mathbf{V}_k(t)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, відповідно, таку задачу:

$$\frac{d\mathbf{V}_k(t)}{dt} = \mathcal{L}(i\mu_k)\mathbf{V}_k(t), \tag{13}$$

$$\mathcal{A}\mathbf{V}_k(0) + \mathcal{B}\int_0^T \mathcal{R}(t)\mathbf{V}_k(t)\,dt = \mathbf{\Phi}_k, \qquad \mathbf{\Phi}_k = \mathrm{col}(\varphi_{1k},\dots,\varphi_{nk}). \tag{14}$$

Відомо [9], що загальний розв'язок системи (13) має вигляд

$$\mathbf{V}_k(t) = \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)\mathbf{C}, \tag{15}$$

де $\mathbf{C} = \mathrm{col}(C_1,\dots,C_{mn})$ – довільний сталий вектор. Введемо вектор-функції $\mathbf{F}_{qk}(t)$ та $\mathbf{f}_{qk}(t)$, $q\in\{1,\dots,mn\}$, означені формулами

$$\mathbf{F}_{qk}(t) = \exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)\mathbf{e}_q, \qquad \mathbf{f}_{qk}(t) = \mathrm{col}\left(F^1_{qk}(t),\dots,F^m_{qk}(t)\right). \tag{16}$$

З формули (8) випливає, що

$$\mathbf{F}_{qk}(t) = \mathrm{col}\left(\mathbf{f}_{qk}(t), \mathbf{f}^{(1)}_{qk}(t),\dots,\mathbf{f}^{(n-1)}_{qk}(t)\right). \tag{17}$$

На підставі (15), (16) розв'язок задачі (13), (14) зображається формулою

$$\mathbf{V}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} C_{qk}\mathbf{F}_{qk}(t),$$

де коефіцієнти C_{qk}, $q\in\{1,\dots,mn\}$, визначаються із системи алгебричних рівнянь

$$\left(\mathcal{A} + \mathcal{B}\int_0^T \mathcal{R}(t)\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)dt\right)\mathbf{C}_k = \mathbf{\Phi}_k, \qquad \mathbf{C}_k = \mathrm{col}\left(C_{1k},\dots,C_{mn,k}\right),$$

визначник якої співпадає із характеристичним визначником $\Delta(\mu_k, T)$ задачі (13), (14) і має вигляд

$$\Delta(\mu_k, T) = \det\left\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\int_0^T \mathcal{R}(t)\exp\left(\mathcal{L}(i\mu_k)t\right)dt\right\|, \qquad \mu_k\in\mathcal{M}. \tag{18}$$

Для кожного $\mu_k\in\mathcal{M}$, $k\in\mathbb{Z}^p$, задача (13), (14) не може мати двох різних розв'язків тоді й лише тоді, коли $\Delta(\mu_k,T)\neq 0$ [12].

Теорема 1. *Для того щоб задача* (1), (2) *мала не більше одного майже періодичного за* x *зі спектром* $\mathcal{M}$ *розв'язку у просторі* $C^n([0,T], \bar{W}^{\alpha,\beta,\gamma}_{\mathcal{M},m})$, *необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова*

$$\forall\mu_k\in\mathcal{M} \qquad \Delta(\mu_k,T)\neq 0. \tag{19}$$

Д о в е д е н н я. За умови (19) єдиність розв'язку задачі (10), (11) доводиться за схемою доведення теореми 1 у [4]. Із (8) та еквівалентності задач (1), (2) і (10), (11) випливає твердження теореми. ♦

4. Існування розв'язку задачі. Надалі вважатимемо, що виконується умова (19). Тоді для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}$ існує єдиний розв'язок $\mathbf{V}_k(t)$ задачі (13), (14), який зображує формула

$$\mathbf{V}_k(t) = \sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk}^{\ell} \right) \mathbf{F}_{qk}(t), \qquad (20)$$

де $\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k, T)$ – алгебричне доповнення елемента $(m(j-1)+\ell)$-го рядка та q-го стовпця у визначнику $\Delta(\mu_k, T)$.

На підставі (8), (12), (16) та (20) отримуємо формальний розв'язок задачі (1), (2) у вигляді ряду

$$\mathbf{u}(t,x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \left(\sum_{q=1}^{mn} \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \frac{\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k, T)}{\Delta(\mu_k, T)} \varphi_{jk}^{\ell} \right) \mathbf{f}_{qk}(t) \right) \exp(i\mu_k, x). \qquad (21)$$

Ряд (21), взагалі кажучи, є розбіжним, оскільки вираз $|\Delta(\mu_k, T)|$, як відмінний від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості векторів $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Для дослідження існування розв'язку задачі (1), (2) у шкалі просторів $C^n([0,T], \overline{W}_{\mathcal{M},m}^{\alpha,\beta,\gamma})$ нам знадобляться деякі допоміжні твердження.

Вияснимо поведінку коренів характеристичного рівняння, яке відповідає системі (13). Це рівняння співпадає з рівнянням (5) при $\eta = \mu_k$ і може бути записане у такому вигляді:

$$\gamma^{mn} + \sum_{j=1}^{m-1} B_j^{jN}(\mu_k)\gamma^{mn-j} + \sum_{j=m}^{mn} B_j^{mN}(\mu_k)\gamma^{mn-j} = 0, \qquad (22)$$

де $B_j^q(\mu_k)$, $q \in \{N, 2N, \ldots, mN\}$, $j \in \{1, \ldots, mn\}$, – многочлени степеня, не вище q, за сукупністю змінних $\mu_{k_1}, \ldots, \mu_{k_p}$ з комплексними коефіцієнтами. Отже, корені рівняння (22) є такими:

$$\gamma_{jk} = \gamma_j(\mu_k), \qquad j \in \{1, \ldots, mn\}, \qquad (23)$$

де $\gamma_j(\mu_k)$, $j \in \{1, \ldots, mn\}$, – корені рівняння (5) при $\eta = \mu_k$. Надалі будемо вважати, що ці корені попарно різні та відмінні від нуля для всіх $\mu_k \in \mathcal{M}$.

Згідно з [13, с. 101], справджуються такі оцінки:

$$|\gamma_{jk}| \le C_1(1 + |\mu_k|)^N, \qquad j \in \{1, \ldots, mn\},$$
$$C_1 = (mn)^p \max_{|s| \le N} \max_{\substack{1 \le q,\ell \le m \\ 0 \le j \le n-1}} \left\{ \left| a_{q\ell,s}^j \right| \right\}, \qquad \mu_k \in \mathcal{M}. \qquad (24)$$

На підставі (6) і (23) отримуємо, що

$$\max_{1 \le j \le mn} \operatorname{Re} \gamma_{jk} \le -C_H |\mu_k|^h + C_0. \qquad (25)$$

Позначимо

$$C_2 = (mn)^{-p}(2^{mn} - 1)T^{mn-1} C_1 \max\{1, \exp(C_0 T)\},$$
$$C_3 = (r_n/(2C_H))^{r_n} T C_2, \qquad C_4 = \max_{1 \le \ell \le n} \{|\alpha_\ell|, C_3 |\beta_\ell|\},$$
$$C_5 = (mn-1)!(C_4)^{mn-1}.$$

Лема 1. *Для компонент* $f_{qk}^{\ell}(t)$, $\ell \in \{1,\dots,n\}$, *вектор-функцій* $\mathbf{f}_{qk}(t)$, $q \in \{1,\dots,mn\}$, *виконуються оцінки*

$$\forall t \in [0,T] \qquad \left| \frac{d^j}{dt^j} f_{qk}^{\ell}(t) \right| \le$$

$$\le \begin{cases} C_2(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N} \exp(-C_H |\mu_k|^h t), & 0 \le j \le n-1, \\ C_2(1+|\mu_k|)^{mnN} \exp(-C_H |\mu_k|^h t), & j = n. \end{cases}$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення леми 1 в [7] з урахуванням оцінок (25). ♦

Розглянемо величини $\psi_j(\beta_j)$, $j \in \{1,\dots,n\}$, означені таким чином:

$$\psi_j(\beta_j) := \begin{cases} 0, & \beta_j = 0, \\ \max\{0, (mn-1)N - hr_j\}, & \beta_j \ne 0, \end{cases} \qquad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Лема 2. *Для всіх* (*крім скінченної кількості*) *векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *алгебричні доповнення* $\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k,T)$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $q \in \{1,\dots,mn\}$, *елементів визначника* $\Delta(\mu_k,T)$ *справджують оцінки*

$$\left|\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k,T)\right| \le C_5(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N - \psi_j(\beta_j) + m\sum\limits_{g=1}^{n}\psi_g(\beta_g)}.$$

Д о в е д е н н я. Проведемо спочатку допоміжні оцінки. На підставі леми 1 отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$ $K_1 = (r_n/(C_H T D_1))^{1/(\theta_1 h)}$, виконуються оцінки

$$\left| \int\limits_0^T t^{r_j} f_{qk}^{\ell}(t)\,dt \right| \le \int\limits_0^T \max_{t\in[0,T]} \left\{ \left| t^{r_j} f_{qk}^{\ell}(t) \right| \right\} dt \le$$

$$\le C_2(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N} \max_{t\in[0,T]} \left\{ t^{r_j} \exp(-C_H|\mu_k|^h t) \right\} \le$$

$$\le C_3(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N-hr_j}, \quad j \in \{1,\dots,n\}, \quad \ell \in \{1,\dots,m\}. \tag{26}$$

Позначимо через $d_{rq}(\mu_k) := \alpha_j\delta_{rq} + \beta_j \int\limits_0^T t^{r_j} f_{qk}^{\ell}(t)\,dt$ елемент визначника $\Delta(\mu_k,T)$, який стоїть на перетині r-го рядка, $r = m(j-1)+\ell$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, та q-го стовпця, $q \in \{1,\dots,mn\}$; δ_{rq} – символ Кронекера. Із (26) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > \max\{D_1^{-1/\theta_1}, K_1\}$, виконуються оцінки

$$|d_{rq}(\mu_k)| \le \begin{cases} C_4(1+|\mu_k|)^{\psi_j(\beta_j)}, & r = q, \\ C_4(1+|\mu_k|)^{(mn-1)N-hr_j}, & r \ne q, \end{cases} \qquad r,q \in \{1,\dots,mn\}. \tag{27}$$

Кожне з алгебричних доповнень $\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k,T)$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, $q \in \{1,\dots,mn\}$, можна зобразити формулою [5]

$$\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k,T)=\sum_{\omega\in S_{mn-1}}(-1)^{\rho_\omega}\prod_{\substack{r=1\\ r\neq m(j-1)+\ell\\ i_r\neq q}}^{mn} d_{r,i_r}(\mu_k)\,. \tag{28}$$

На підставі (27) та (28) отримуємо, що для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ таких, що $|k|>$ $>\max\{D_1^{-1/\theta_1},K_1\}$, виконуються нерівності

$$\left|\Delta_{m(j-1)+\ell,q}(\mu_k,T)\right|\le(mn-1)!\left|d_{qr}(\mu_k)\right|\prod_{\substack{r=1\\ r\neq m(j-1)+\ell\\ r\neq q}}^{mn}\left|d_{rr}(\mu_k)\right|\le$$

$$\le C_5\left(1+|\mu_k|\right)^{(mn-1)N-\psi_j(\beta_j)+m\sum\limits_{g=1}^{n}\psi_g(\beta_g)},$$

де $\ell\in\{1,\dots,m\}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $q\in\{1,\dots,mn\}$. Лему доведено. ♦

Теорема 2. *Нехай справджується умова* (19) *та існують сталі* $\eta>0$, $\sigma>0$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $\mu_k\in\mathcal{M}$ *виконується нерівність*

$$\left|\Delta(\mu_k,T)\right|\ge\left(1+|\mu_k|\right)^{-\eta}\exp\left(-\sigma|\mu_k|^h\right). \tag{29}$$

Якщо $\boldsymbol{\varphi}_j(x)\in\overline{W}^{\xi_j,\sigma+\beta,h}_{\mathcal{M},m}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, *де* $\xi_j=\eta+(2mn+1)N-\psi_j(\beta_j)+\alpha+$ $+\sum\limits_{g=1}^{n}\psi_g(\beta_g)$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *із простору* $C^n([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})$. *Цей розв'язок зображається формулою* (21) *і справджує оцінку*

$$\left\|\mathbf{u},C^n([0,T],\overline{W}^{\alpha,\beta,h}_{\mathcal{M},m})\right\|\le C_6\sum_{j=1}^{n}\left\|\mathbf{j}_j,\overline{W}^{\xi_j,\sigma,h}_{\mathcal{M},m}\right\|,\qquad C_6=C_6(m,n,C_2,C_5)\,.$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 2 у [4] з урахуванням лем 1 і 2. ♦

5. Оцінки малих знаменників. З'ясуємо можливість виконання нерівності (29). Введемо позначення: $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $r=r_1+\dots+r_n$, $\Gamma_k=$ $=(\gamma_{1k},\dots,\gamma_{mn,k})$, $(J,\Gamma_k)=j_1\gamma_1+\dots+j_{mn}\gamma_{mn,k}$, $\mathfrak{I}_{mn}$ – множина всіх наборів $J=(j_1,\dots,j_{mn})$, $j_q\in\{0,1\}$, $q\in\{1,\dots,mn\}$; $\mathbf{E}_q$ – $(q\times q)$-матриця, всі елементи якої є одиницями.

Позначимо також через $\mathbf{h}_{jk}$, $j\in\{1,\dots,mn\}$, деякий ненульовий стовпець матриці $L^*(\gamma_{jk},i\mu_k)$, яка є приєднаною до матриці $L(\gamma_{jk},i\mu_k)$,

$$H(\mu_k)=\det\left\|\gamma_{jk}^{q-1}\mathbf{h}_{jk}\right\|_{q=1,\dots,n}^{j=1,\dots,mn},$$

$$\Delta_1(\mu_k,T)=\det\left\|\mathbf{h}_{jk}\left(\alpha_j\gamma_{jk}^{q-1}+\beta_jI_q(\gamma_{jk})\right)\right\|_{q=1,\dots,n}^{j=1,\dots,mn}, \tag{30}$$

$$I_q(z)=\int_0^T t^{r_q}\exp(zt)\,dt=Q_q(z,T)\exp(zT)-Q_q(z,0),\qquad q\in\{1,\dots,n\}, \tag{31}$$

$$Q_q(z,T) = \sum_{\ell=1}^{r_q+1} \frac{(-1)^{\ell+1} r_q\,!}{(r_q-\ell+1)!}\,\frac{T^{r_q-\ell+1}}{z^\ell}\,. \tag{32}$$

Визначники $\Delta(\mu_k, T)$ і $\Delta_1(\mu_k, T)$ пов'язані між собою співвідношенням

$$\Delta_1(\mu_k, T) = H(\mu_k)\Delta(\mu_k, T)\,. \tag{33}$$

Як і в [4, п. 5], на підставі (30)–(33) показуємо, що $\Delta(\mu_k, T)$ як функція змінної T є квазімногочленом відносно T і зображується формулою

$$\Delta(\mu_k, T) = \frac{1}{H(\mu_k)} \sum_{J\in\Im_{nm}} F_J(T)\exp\left((J,\Gamma_k)T\right), \tag{34}$$

де $F_J(T)$ − многочлени з комплексними коефіцієнтами степеня N_J, $N_J \le$ $\le mr$, $J\in\Im_{mn}$, а кількість доданків із різними експонентами не перевищує 2^{mn}. Для кожного $\mu_k \in \mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}$ розглянемо функцію $\Delta(\mu_k,\tau)$, означену на інтервалі $(0,\infty)$ формулою (34), у якій T треба замінити на τ. З формули (34) випливає, що функція $\Delta(\mu_k,\tau)$ є аналітичною на інтервалі $(0,\infty)$. Продовжимо її аналітично на $\mathbb{R}$ і отриману функцію позначимо через $D_k := D(\mu_k,\tau)$. Через $E(D_k,\varepsilon,[0,T_0])$, $T_0>0$, позначимо множину тих $\tau\in[0,T_0]$, для яких виконується нерівність $|D(\mu_k,\tau)|\le\varepsilon$. За теоремою 2.1 із [6] для кожного $\mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}$

$$\operatorname{mes}_{\mathbb{R}} E(D_k,\varepsilon,[0,T_0]) \le C_7 B(\mu_k)\left(\frac{4\varepsilon\Psi(\mu_k)}{G(\mu_k)}\right)^{1/R-1}, \qquad C_7 = C_7(m,n,T_0)\,,$$

де

$$R := \sum_{J\in\Im_{mn}} (1+N_J) \le 2^{mn}(1+mr)\,, \tag{35}$$

$$B(\mu_k) := 1 + \max_{J\in\Im_{mn}} |(J,\Gamma_k)|, \qquad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}\,, \tag{36}$$

$$\Psi(\mu_k) := \max_{\tau\in[0,T_0]} \exp\left(-\left(\min_{J\in\Im_{mn}} \operatorname{Re}(J,\Gamma_k)\right)\tau\right), \qquad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}\,, \tag{37}$$

$$G(\mu_k) := \max_{1\le j\le R}\left\{\left|\left(\frac{\partial}{\partial\tau}\right)^{j-1} D(\mu_k,\tau)\right|_{\tau=0}\frac{1}{(B(\mu_k))^j}\right\}, \qquad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}\,. \tag{38}$$

Враховуючи (24), (36), отримуємо

$$B(\mu_k) \le 1 + \sum_{j=1}^{mn} |\gamma_{jk}| \le C_8(1+|\mu_k|)^N, \quad C_8 = mnC_1, \quad \mu_k\in\mathcal{M}\setminus\{\mathbf{0}\}. \tag{39}$$

Означимо сталу C_γ:

$$C_\gamma := -\min\left\{\inf_{\mu_k\in\mathcal{M}} \min_{1\le j\le mn} \left\{\operatorname{Re}\gamma_{jk}/(1+|\mu_k|)^N\right\}\right\}, \tag{40}$$

яка на підставі (24) існує і є скінченною. Тоді з (37) випливає оцінка

$$\Psi(\mu_k) \le C_9 \exp\left(2^{N-1} mnC_\gamma T_0 |\mu_k|^N\right), \quad C_9 = \exp\left(2^{N-1}mnC_\gamma T_0\right), \tag{41}$$

яка виконується для всіх $\mu_k\in\mathcal{M}$.

Оцінимо тепер величину $G(\mu_k)$ із (38). В околі точки $t=0$ справджуються розвинення

$$\exp\big(\mathcal{L}(i\mu_k)t\big) = \mathbf{I}_{mn} + \mathcal{L}(i\mu_k)t + \ldots + \big(\mathcal{L}(i\mu_k)\big)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + o(t^{n-1})\mathbf{E}_{mn},$$

$$\mathcal{R}(t)\exp\big(\mathcal{L}(i\mu_k)t\big) = \mathcal{R}(t) + \mathcal{R}(t)\mathcal{L}(i\mu_k)t + \mathcal{R}(t)\big(\mathcal{L}(i\mu_k)\big)^2\frac{t^2}{2} + \ldots$$

$$+ \mathcal{R}(t)\big(\mathcal{L}(i\mu_k)\big)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + o(t^{n-1})\mathcal{R}(\tau)\mathbf{E}_{mn}, \tag{42}$$

де кожен стовпець матриці $o(t^{n-1})\mathcal{R}(t)\mathbf{E}_{mn}$ має вигляд

$$\mathrm{col}\big(\underbrace{o(t^{r_1+n-1}),\ldots,o(t^{r_1+n-1})}_{m},\ldots,\underbrace{o(t^{r_n+n-1}),\ldots,o(t^{r_n+n-1})}_{m}\big). \tag{43}$$

Безпосередніми обчисленнями знаходимо, що

$$\mathcal{R}(t)\big(\mathcal{L}(i\mu_k)\big)^q = \begin{pmatrix} \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m & t^{r_1}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \underbrace{\mathbf{O}_m \quad \ldots \quad \mathbf{O}_m}_{q} & & & t^{r_n}\mathbf{I}_m & \mathbf{O}_m & \ldots & \mathbf{O}_m \end{pmatrix},$$

$$q \in \{0,1,\ldots,n-1\}, \tag{44}$$

$$\sum_{q=0}^{n-1}\mathcal{R}(t)\big(\mathcal{L}(i\mu_k)\big)^q\frac{t^q}{q!} = \begin{pmatrix} t^{r_1}\mathbf{I}_m & \frac{t^{r_1+1}}{1!}\mathbf{I}_m & \ldots & \frac{t^{r_1+n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t^{r_n}\mathbf{I}_m & \frac{t^{r_n+1}}{1!}\mathbf{I}_m & \ldots & \frac{t^{r_n+n-1}}{(n-1)!}\mathbf{I}_m \end{pmatrix}. \tag{45}$$

На підставі формул (18), (42)–(45) отримуємо, що

$$D(\mu_k,\tau) = \det\left\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\int_0^\tau \mathcal{R}(t)\exp\big(\mathcal{L}(i\mu_k)t\big)\,dt\right\| =$$

$$= \det\left(\left\|\left(\alpha_j\delta_{jq} + \beta_j\frac{\tau^{r_j+q}}{(r_j+q)(q-1)!}\right)\mathbf{I}_m + o(\tau^{r_j+n})\mathbf{E}_m\right\|_{j,q=1}^{n}\right). \tag{46}$$

Нехай в умовах (2) $\alpha_j \neq 0$, $j \in \{j_1,\ldots,j_\ell\}$, $1 \le \ell \le n$; $\{q_1,\ldots,q_{n-\ell}\} = \{1,\ldots,n\}\setminus\{j_1,\ldots,j_\ell\}$. Тоді кожен q_s-й рядок, $1 \le s \le n-\ell$, блочної матриці з (46) має вигляд

$$\left(\beta_{q_s}\frac{\tau^{r_{q_s}+1}}{(r_{q_s}+1)}\mathbf{I}_m + o(\tau^{r_{q_s}+n})\mathbf{E}_m,\ldots,\beta_{q_s}\frac{\tau^{r_{q_s}+n}}{(r_{q_s}+n)(n-1)!}\mathbf{I}_m + \right.$$

$$\left. + o(\tau^{r_{q_s}+n})\mathbf{E}_m\right), \tag{47}$$

а кожен j_s-й рядок, $1 \le s \le \ell$, подамо у вигляді

$$\big(o(\tau^{r_{j_s}+1})\mathbf{E}_m,\ldots,o(\tau^{r_{j_s}+j_s-1})\mathbf{E}_m,\alpha_{j_s}\mathbf{I}_m + o(\tau^{r_{j_s}+j_s})\mathbf{E}_m,$$

$$o(\tau^{r_{j_s}+j_s+1})\mathbf{E}_m,\ldots,o(\tau^{r_{j_s}+n})\mathbf{E}_m\big). \tag{48}$$

На підставі (46), враховуючи (47), (48) та елементарні властивості визначників, отримуємо таке розвинення в околі точки $\tau = 0$ для функції $D(\mu_k, \tau)$:

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{\ell} (\alpha_{j_s})^m \det \left\| \frac{\tau^{r_y + z}}{(r_y + z)(z-1)!} \mathbf{I}_m \right\|_{y,z \in \{q_1, \ldots, q_{n-\ell}\}} +$$

$$+ o\left(\tau^{m \sum_{s=1}^{n-\ell} (r_{q_s} + q_s)} \right) \tag{49}$$

Функцію $D(\mu_k, \tau)$, виражену формулою (49), подамо у вигляді

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{\ell} (\alpha_{j_s})^m \det \left(\mathbf{D}(\tau) \otimes \mathbf{I}_m \right) + o(\tau^{m\eta_0(\boldsymbol{\alpha})}), \tag{50}$$

де

$$\mathbf{D}(\tau) := \left\| \frac{\tau^{r_y + z}}{(r_y + z)(z-1)!} \right\|_{y,z \in \{q_1, \ldots, q_{n-\ell}\}}, \tag{51}$$

$$\eta_0(\boldsymbol{\alpha}) = r_{q_1} + \ldots + r_{q_{n-\ell}} + q_1 + \ldots + q_{n-\ell}, \tag{52}$$

а $\mathbf{D}(\tau) \otimes \mathbf{I}_m$ – тензорний добуток [5] матриць $\mathbf{D}(\tau)$ та $\mathbf{I}_m$. Із властивостей тензорного добутку випливає, що

$$D(\mu_k, \tau) = \prod_{s=1}^{\ell} (\alpha_{j_s})^m \left(\det \mathbf{D}(\tau) \right)^m + o(\tau^{m\eta_0(\boldsymbol{\alpha})}). \tag{53}$$

Визначник матриці (51) зображується формулою (див. [8, с. 110])

$$\det \mathbf{D}(\tau) = \tau^{\eta_0(\boldsymbol{\alpha})} \det \left\| \frac{\beta_y}{(r_y + z)(z-1)!} \right\|_{y,z \in \{q_1, \ldots, q_{n-\ell}\}} =$$

$$= \tau^{\eta_0(\boldsymbol{\alpha})} \prod_{s=1}^{n-\ell} \frac{\beta_{q_s}}{(q_s - 1)!} \prod_{\substack{y,z \in \{q_1, \ldots, q_{n-\ell}\} \\ z < y}} \left((r_y - r_z)(y - z) \right) \times$$

$$\times \frac{1}{\prod_{y,z \in \{q_1, \ldots, q_{n-\ell}\}} (r_y + z)} = C_{10} \tau^{\eta_0(\boldsymbol{\alpha})}. \tag{54}$$

На підставі (53), (54) отримуємо

$$D(\mu_k, \tau) = C_{11} \tau^{m\eta_0(\boldsymbol{\alpha})} + o(\tau^{m\eta_0(\boldsymbol{\alpha})}), \qquad C_{11} = (C_{10})^m \prod_{s=1}^{\ell} (\alpha_{j_s})^m. \tag{55}$$

З формули (55) випливає, що виконуються такі рівності:

$$\left. \frac{d^q D(\mu_k, \tau)}{d\tau^q} \right|_{\tau=0} = \begin{cases} 0, & q < m\eta_0(\boldsymbol{\alpha}), \\ C_{11}, & q = m\eta_0(\boldsymbol{\alpha}). \end{cases} \tag{56}$$

Із (38), (39) і (56) одержуємо оцінку

$$G(\mu_k) \geq C_{11} \left(B(\mu_k) \right)^{-m\eta(\boldsymbol{\alpha}) - 1} \geq C_{12} \left(1 + |\mu_k| \right)^{-(m\eta(\boldsymbol{\alpha}) + 1)N}, \quad \mu_k \in \mathcal{M} \setminus \{\mathbf{0}\}, \tag{57}$$

де $C_{12} = C_{11} (C_8)^{-mN\eta(\boldsymbol{\alpha})}$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебеґа в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T \in [0, T_0]$ *нерівність* (29) *справджується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$, *коли* $\sigma = 2^{N-1} mnC_\gamma T_0$, *а*

$$\eta > (m\eta_0(\boldsymbol{\alpha}) + 1)N + 2^{mn}\left(\frac{p}{\theta_1} + 1\right)(1 + mr),$$

де $T_0 \in (0, \infty)$, θ_1 *– стала з формули* (3), *стала* C_γ *означена формулою* (40), *а* $\eta_0(\boldsymbol{\alpha})$ *– формулою* (52).

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 3 із [4] з урахуванням оцінок (39), (41) і (57). ♦

Якщо $n = 1$, тобто система (1) є системою першого порядку за змінною t, із формул (30) і (33) випливає, що

$$\Delta(\mu_k, T) = \prod_{j=1}^{m} \left(\alpha_1 + \beta_1 I_1(\gamma_{jk})\right), \tag{58}$$

і в цьому випадку у задачі (1), (2) відсутня проблема малих знаменників. Це стверджує наступна

Теорема 4. *Для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $\mu_k \in \mathcal{M}$ *виконується оцінка*

$$|\Delta(\mu_k, T)| \ge \begin{cases} \dfrac{1}{2^m} |\alpha_1|^m, & \alpha_1 \ne 0, \\ \dfrac{1}{2^m} |\beta_1|^m \left(r_1!(C_1)^{-r_1-1}\right)^m (1 + |\mu_k|)^{-(r_1+1)mN}, & \alpha_1 = 0, \end{cases}$$

де $\Delta(\mu_k, T)$ *зображується формулою* (58).

Д о в е д е н н я. Нехай $\alpha_1 \ne 0$. На підставі (25), (31) і (32) отримуємо оцінки

$$|I_1(\gamma_{jk})| \le C_{13}(1 + |\mu_k|)^{-hr_1}, \qquad C_{13} = \left(\frac{r_1}{C_H e}\right)^{r_1} T, \qquad j \in \{1, \ldots, m\}, \tag{59}$$

які виконуються для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_1$, і які встановлюються аналогічно до оцінок (26). Якщо $\beta_1 \ne 0$, то з (59) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_2$, де $K_2 = \max\left\{K_1, D_1^{-\theta_1}\left(|\alpha_1|/(2|\beta_1|C_{13})^{1/(h\theta_1 r_1)}\right)\right\}$, виконується нерівність

$$|\beta_1||I_1(\gamma_{jk})| \le \frac{1}{2}|\alpha_1|. \tag{60}$$

Тоді на підставі (58), враховуючи (60), отримуємо, що оцінка

$$|\Delta(\mu_k, T)| = \prod_{j=1}^{m} |\alpha_1 + \beta_1 I_1(\gamma_{jk})| \ge \frac{1}{2^m}|\alpha_1|^m \tag{61}$$

виконується для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_2$. Якщо $\beta_1 = 0$, то нерівність (61) очевидна.

Нехай тепер $\alpha_1 = 0$. Позначимо через Y розв'язок рівняння $C_{13}\exp(-C_H T y) = y^{-(r_1+1)(N-h)}$. З (24), (31) і (33) випливає, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_3$, де $K_3 = (Y/D_1)^{1/(h\theta_1)}$, виконуються оцінки

$$\left|I_1(\gamma_{jk})\right| \ge \frac{1}{2}\left|Q_1(\gamma_{jk},0)\right| \ge C_{14}(1+|\mu_k|)^{-(r_1+1)N},$$

$$C_{14} = \frac{r_1!}{2}(C_1)^{-r_1-1}, \qquad j \in \{1,\dots,m\}. \tag{62}$$

З (58), враховуючи (62), отримуємо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$ таких, що $|k| > K_3$, справджується оцінка

$$|\Delta(\mu_k,T)| = \prod_{j=1}^{m}\left|\beta_1 I_1(\gamma_{jk})\right| \ge |\beta_1|^m (C_{14})^m (1+|\mu_k|)^{-(r_1+1)mN}. \tag{63}$$

З нерівностей (61) і (63) випливає доведення теореми. ♦

Отже, якщо $n = 1$, то існування розв'язку задачі (1), (2) не пов'язане з проблемою малих знаменників.

Висновки. У роботі досліджено коректність задачі з інтегральними умовами за часовою координатою для параболічної за Шиловим системи рівнянь зі сталими коефіцієнтами у класі майже періодичних за просторовими змінними функцій. Знайдено критерій єдиності та достатні умови існування розв'язку задачі. Для розв'язання проблеми малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід. Показано, що у випадку системи першого порядку за змінною t у задачі відсутня проблема малих знаменників.

Результати можна поширити на системи вигляду (1) зі змінними за t коефіцієнтами.

1. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции. Вып. 3. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. – Москва: Физматгиз, 1958. – 276 с.
2. *Данилкина О. Ю.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Вестн. СамГУ. – 2007. – № 6(56). – С. 141–154.
3. *Кузь А. М.* Задача з інтегральними умовами за часом для факторизованого параболічного оператора зі змінними коефіцієнтами // Вісн. нац. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Фіз.-мат. науки. – 2012. – № 740. – С. 25–33.
4. *Кузь А. М., Пташник Б. Й.* Задача з інтегральними умовами за часом для системи рівнянь динамічної теорії пружності // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 4. – С. 40–53.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц. – Москва: Наука, 1982. – 272 с.
6. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Діофантові наближення характеристичного визначника інтегральної задачі для лінійного рівняння з частинними похідними // Наук. вісн. Чернів. нац. ун-ту. Сер. Математика. – 2004. – Вип. 228. – С. 74–85.
7. *Медвідь О. М., Симотюк М. М.* Задача з інтегральними умовами для лінійних систем рівнянь із частинними похідними // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50,** № 1. – С. 32–39.
8. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. – Москва: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.
9. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Москва: Наука, 1982. – 332 с.
10. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – Київ: Наук. думка, 2002. – 416 с.
11. *Пулькина Л. С.* Нелокальная задача с интегральными условиями для гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. – 2004. – **40**, № 7. – С. 887–892.
    Те саме: *Pul'kina L. S.* A nonlocal problem with integral conditions for a hyperbolic equation // Differ. Equat. – 2004. – **40**, No. 7. – P. 947–953.
12. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. – Петроград, 1917. – 308+XIV с.
13. *Фаддєєв Д. К., Сомінський І. С.* Збірник задач з вищої алгебри. – Київ: Вища шк., 1971. – 316 с.
14. *Фардигола Л. В.* Интегральная краевая задача в слое для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных // Мат. сб. – 1995. – **186**, № 11. – С. 123–144.

Те саме: *Fardigola L. V.* An integral boundary-value problem in a layer for a system of linear partial differential equations // Sb.: Math. – 1995. – **186**, No. 11. – P. 1671–1692.

15. *Штабалюк П. І.* Про майже періодичні розв'язки однієї задачі з нелокальними умовами // Вісн. держ. ун-ту «Львів. політехніка». Сер. Диференц. рівняння та їх застосування. – 1995. – № 286. – С. 153–165.
16. *Шубин М. А.* Почти-периодические функции и дифференциальные операторы с частными производными // Успехи мат. наук. – 1978. – **33**, № 2 (200). – С. 3–47.
    Те саме: *Shubin M. A.* Almost periodic functions and partial differential operators // Rus. Math. Surv. – 1978. – **33**, No. 2. – P. 1–52.
17. *Avalishvili G., Avalishvili M., Gordeziani D.* On integral nonlocal boundary value problems for some partial differential equations // Bull. Georg. Natl. Acad. Sci. – 2011. – **5**, No. 1. – P. 31–37.
18. *Besicovitch A. S.* Almost periodic functions. – Cambridge: Dover Publ., Inc., 1954. – 180 p.
19. *Bougoffa L.* A coupled system with integral conditions // Appl. Math. E-Notes. – 2004. – **4**. – P. 99–105.
20. *Song W., Gao W.* Positive solutions for a second-order system with integral boundary conditions // Electron. J. Differ. Equat. – 2011. – **2011**, No. 13. – P. 1–9.

ЗАДАЧА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ ПО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ПО ШИЛОВУ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка $[0,T]$ и пространства $\mathbb{R}^p$, исследована задача с интегральными условиями по временной координате для параболических по Шилову систем уравнений в классе почти периодических по пространственным переменным функциям. Найден критерий единственности и достаточные условия существования решения задачи. Для решения проблемы малых знаменателей, возникающих при построении решения задачи, использован метрический подход.

PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS WITH RESPECT TO TIME FOR SHILOV PARABOLIC SYSTEMS OF EQUATIONS

In a domain specified in the form of a Cartesian product of a segment $[0,T]$ and space $\mathbb{R}^p$, a problem with integral conditions with respect to the time coordinate for Shilov parabolic systems of equations in a class of almost periodic functions with respect to space variables is investigated. The uniqueness criterion and sufficient conditions for the existence of the solution to the problem are found. To solve the problem of small denominators arising in constructing the solution of the problem, the metric approach is used.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
23.12.13