

ПРО ВПЛИВ ЗМІННИХ КОЕФІЦІЄНТІВ ТЕПЛОВІДДАЧІ НА ТЕРМОНАПРУЖЕННЯ У СКІНЧЕННІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

Досліджено термонапружений стан скінченної циліндричної оболонки, на торцях якої виконуються умови ковзного зацемлення, спричинений різницею температур зовнішнього середовища на лицевих поверхнях та залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі на них. Запропоновано спосіб зведення крайової задачі теплопровідності до взаємозв'язаної системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Наведено результати числового аналізу розподілу середньої температури, температурного моменту та зумовлених ними прогину, видовження, зусилля і згинних моментів.

Вступ. Кругові циліндричні оболонки знаходять широке застосування в різноманітних галузях техніки як конструктивні елементи машин та приладів. При знаходженні їх напружено-деформованого стану за теплового навантаження важливе значення має урахування змінної температури зовнішнього середовища, що може також викликати змінність коефіцієнтів тепловіддачі з лицевих поверхонь оболонки.

Для розв'язання задач термопружності кругових циліндричних оболонок з постійними коефіцієнтами тепловіддачі існує ряд розроблених методів [6, 8]. Задачам про напружено-деформований стан кругових циліндричних оболонок зі змінними коефіцієнтами тепловіддачі, але однаковими на різних лицевих поверхнях, присвячені роботи [2, 3, 7]. Врахування впливу кусково-сталих коефіцієнтів тепловіддачі на різних лицевих поверхнях на напружено-деформований стан пластинок та пологих оболонок зі зламами досліджено у роботах [9–11]. Кусково-однорідні циліндричні оболонки з тріщинами досліджували у [4, 5]. Знаходженню змінних коефіцієнтів тепловіддачі у пластинках присвячені роботи [12, 13].

Однак, моделювання напружено-деформованого стану розглядуваних оболонок з урахуванням змінності коефіцієнтів тепловіддачі на лицевих поверхнях оболонки приводить до задач, що містять систему диференціальних рівнянь теплопровідності в частинних похідних зі змінними коефіцієнтами. Розв'язання такої системи рівнянь відомими методами пов'язане зі значними математичними труднощами. Тому розробка підходу, що базується на зведенні розглядуваних задач теплопровідності до взаємозв'язаних систем інтегральних рівнянь другого роду з інтегральними операторами Вольтерра і Фредгольма, є актуальною.

Формулювання задачі. Розглянемо тонку скінченну кругову циліндричну оболонку товщини $2h$, радіуса R і довжини $\bar{\ell}$, яка знаходиться в нерівномірному температурному полі за конвективного теплообміну із середовищем. Матеріал оболонки однорідний і ізотропний. Положення точки на серединній поверхні циліндричної оболонки визначається віднесеною до півтовщини оболонки h координатою x – відстанню точки вздовж твірної від торця $x = 0$. Відносні коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь $\mu^+(x)$, $\mu^-(x)$, а також температура зовнішнього середовища на цих поверхнях $t^+(x)$, $t^-(x)$ є кусково-сталими функціями на кільцевих областях $x \in [a_i, a_{i+1})$, $i = 0, \dots, n-1$,

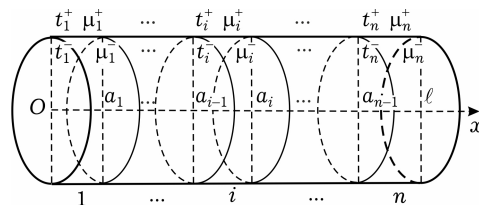


Рис. 1

$a_0 = 0$, $a_n = \ell = \bar{\ell}/h$ (рис. 1). На торцях оболонки задано конвективний теп-

лообмін із зовнішнім середовищем за відносних коефіцієнтів теплообміну \bar{b}_1 при $x = 0$ та \bar{b}_2 при $x = \ell$ і виконуються умови ковзного зацмлення.

Температурне поле. Для визначення стаціонарного осесиметричного температурного поля в оболонці маємо взаємозв'язану систему рівнянь [8]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 T_1(x)}{dx^2} - \mu_1(x) T_1(x) - \mu_2^*(x) T_2(x) &= -\mu_1(x) t_1(x) - \mu_2(x) t_2(x), \\ \frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} - 3(1 + \mu_1(x)) T_2(x) - 3\mu_2^*(x) T_1(x) &= \\ &= -3\mu_1(x) t_2(x) - 3\mu_2(x) t_1(x), \end{aligned} \quad (1)$$

і крайові умови

$$\begin{aligned} \frac{dT_j(x)}{dx} - b_1(T_j(0) - T_{j1}^c) &= 0, \quad x = 0, \\ \frac{dT_j(x)}{dx} + b_2(T_j(\ell) - T_{j2}^c) &= 0, \quad x = \ell, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2)$$

Тут

$$\begin{aligned} \mu_{1,2}(x) &= h(\mu^+(x) \pm \mu^-(x)) \frac{1}{2}, \quad t_{1,2}(x) = (t^+(x) \pm t^-(x)) \frac{1}{2}, \\ \mu_2^*(x) &= \mu_2(x) - kh, \\ \mu^\pm(x) &= \mu_1^\pm + \sum_{i=1}^{n-1} (\mu_{i+1}^\pm - \mu_1^\pm) H(x; a_i, a_{i+1}), \\ t^\pm(x) &= t_1^\pm + \sum_{i=1}^{n-1} (t_{i+1}^\pm - t_1^\pm) H(x; a_i, a_{i+1}), \\ H(x; a_i, a_{i+1}) &= \begin{cases} 1, & x \in [a_i, a_{i+1}), \\ 0, & x \notin [a_i, a_{i+1}), \end{cases} \\ b_i &= hb_i, \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}, \quad k_1 = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$k_2 = \frac{1}{R}$ – кривина оболонки; μ_i^\pm – відносні коефіцієнти тепловіддачі з лицевих поверхонь $z = \pm h$ на кільцевих областях $[a_i, a_{i+1})$, t_i^\pm – температури зовнішнього середовища лицевих поверхонь $z = \pm h$ на кільцевих областях $[a_i, a_{i+1})$, $T_1(x)$ – середня температура, $T_2(x)$ – температурний момент, T_{j1}^c , T_{j2}^c – температура зовнішнього середовища на торцях $x = 0$ та $x = \ell$ відповідно, $j = 1, 2$.

$$\text{Ввівши позначення } \eta_i^+ = \frac{h(\mu_i^+ + \mu_i^-)}{2}, \quad \eta_i^- = \frac{h(\mu_i^+ - \mu_i^-)}{2} - kh, \quad \tau_i^\pm = \frac{t_i^+ \pm t_i^-}{2},$$

запишемо (3) у вигляді

$$\begin{aligned} \mu_1(x) &= \eta_1^+ + \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+) H(x; a_i, a_{i+1}), \\ t_1(x) &= \tau_1^+ + \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{i+1}^+ - \tau_1^+) H(x; a_i, a_{i+1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_2(x) &= \eta_1^- + \sum_{i=1}^{n-1} (\eta_{i+1}^- - \eta_1^-) H(x; a_i, a_{i+1}), \\ t_2(x) &= \tau_1^-(x) + \sum_{i=1}^{n-1} (\tau_{i+1}^- - \tau_1^-) H(x; a_i, a_{i+1}).\end{aligned}\quad (4)$$

Підставимо величини (4) у систему рівнянь (1) і, зробивши заміну

$$\begin{aligned}T_1(x) &= \frac{\lambda_2(F_1(x) - \lambda_1 F_2(x))}{\lambda_2 - \lambda_1} + \tau_1^+, \\ T_2(x) &= \frac{\lambda_2 F_2(x) - F_1(x)}{\lambda_2 - \lambda_1} + \tau_1^-, \end{aligned}\quad (5)$$

після деяких перетворень отримаємо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned}\frac{d^2 F_1(x)}{dx^2} - \delta_1^2 F_1(x) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i1} F_1(x) - d_{i2} F_2(x)) H(x; a_i, a_{i+1}) + R_1(x) + \lambda_1 R_2(x), \\ \frac{d^2 F_2(x)}{dx^2} - \delta_2^2 F_2(x) &= \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (d_{i3} F_1(x) - d_{i4} F_2(x)) H(x; a_i, a_{i+1}) + \frac{R_1(x)}{\lambda_2} + R_2(x).\end{aligned}\quad (6)$$

Крайові умови (2) набудуть вигляду

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_j}{\partial x} - b_1(F_j - F_{j1}^c) &= 0, \quad x = 0, \\ \frac{\partial F_j}{\partial x} + b_2(F_j - F_{j2}^c) &= 0, \quad x = \ell, \quad j = 1, 2.\end{aligned}\quad (7)$$

У рівняннях (6), (7) позначено

$$\begin{aligned}d_{i1} &= \frac{(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+)(\lambda_2 - 3\lambda_1) + (\eta_{i+1}^- - \eta_1^-)(3\lambda_1\lambda_2 - 1)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ d_{i2} &= \frac{(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+)2\lambda_1\lambda_2 + (\eta_{i+1}^- - \eta_1^-)(\lambda_2 - 3\lambda_1^2\lambda_2)}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ d_{i3} &= \frac{(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+)(-2\lambda_2) + (\eta_{i+1}^- - \eta_1^-)(3\lambda_2^2 - 1)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ d_{i4} &= \frac{(\eta_{i+1}^+ - \eta_1^+)(-\lambda_1\lambda_2 + 3\lambda_2^2) + (\eta_{i+1}^- - \eta_1^-)(\lambda_2 - 3\lambda_1\lambda_2^2)}{\lambda_2(\lambda_2 - \lambda_1)}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ F_{11}^c &= T_{11}^c - \tau_1^+ + \lambda_1(T_{12}^c - \tau_1^-), \\ F_{12}^c &= T_{12}^c - \tau_1^+ + \lambda_1(T_{22}^c - \tau_1^-), \\ F_{21}^c &= T_{12}^c - \tau_1^- + \frac{1}{\lambda_2}(T_{11}^c - \tau_1^+), \\ F_{22}^c &= T_{22}^c - \tau_1^- + \frac{1}{\lambda_2}(T_{21}^c - \tau_1^+), \\ \delta_{1,2}^2 &= \eta_1^+ + 3\lambda_{1,2}\eta_1^-, \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{6\eta_1^-} (2\eta_1^+ + 3 \mp \sqrt{(2\eta_1^+ + 3)^2 + 12(\eta_1^-)^2}),$$

$$R_1 = - \sum_{i=1}^{n-1} [\eta_{i+1}^+ (\tau_{i+1}^+ - \tau_1^+) + (\eta_{i+1}^- + kh)(\tau_{i+1}^- - \tau_1^-)] H(x, a_i, a_{i+1}) - kh\tau_1^-,$$

$$R_2 = - \sum_{i=1}^{n-1} [3\eta_{i+1}^+ (\tau_{i+1}^- - \tau_1^-) + 3(\eta_{i+1}^- + kh)(\tau_{i+1}^+ - \tau_1^+)] H(x, a_i, a_{i+1}) + 3(\tau_1^- - kh\tau_1^+).$$

Для відшукування загального розв'язку системи рівнянь (6) застосуємо метод варіації сталої. Задовольнивши граничні умови (7), отримаємо для знаходження шуканих функцій $F_j(x)$ взаємозв'язану систему інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду

$$F_1(x) = f_1(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (d_{i1}F_1(s) - d_{i2}F_2(s)) \text{Ker}_1(x, s) ds,$$

$$F_2(x) = f_2(x) - \sum_{i=1}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} (d_{i3}F_1(s) - d_{i4}F_2(s)) \text{Ker}_2(x, s) ds, \quad (8)$$

яку розв'язуємо чисельно. Тут

$$f_j(x) = p_{j1}e^{\delta_j x} + p_{j2}e^{-\delta_j x} + v_j(x),$$

$$p_{11} = \frac{\beta_1 - \alpha_{12}p_{12}}{\alpha_{11}}, \quad p_{12} = \frac{\beta_2\alpha_{11} - \beta_1\alpha_{21}}{\alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{12}\alpha_{21}},$$

$$p_{21} = \frac{\beta_{21} - \gamma_{12}p_{22}}{\alpha_{112}}, \quad p_{22} = \frac{\beta_{22}\gamma_{11} - \beta_{21}\gamma_{21}}{\gamma_{22}\gamma_{11} - \gamma_{12}\gamma_{21}},$$

$$\beta_1 = -b_1F_{11}^c, \quad \beta_2 = -w_1(\ell) - b_2(v_1(\ell) - F_{12}^c),$$

$$\beta_{21} = -b_1F_{21}^c, \quad \beta_{22} = -w_1(\ell) - b_2(v_1(\ell) - F_{22}^c),$$

$$\alpha_{11} = \delta_1 - b_1, \quad \alpha_{21} = \delta_1 C_1 e^{\delta_1 \ell} + b_2 e^{\delta_1 \ell},$$

$$\alpha_{12} = -\delta_1 - b_1, \quad \alpha_{22} = -\delta_1 C_1 e^{-\delta_1 \ell} + b_2 e^{-\delta_1 \ell},$$

$$\gamma_{11} = \delta_2 - b_1, \quad \gamma_{12} = -\delta_2 - b_1,$$

$$\gamma_{21} = \delta_2 C_1 e^{\delta_2 \ell} + b_2 e^{\delta_2 \ell}, \quad \gamma_{22} = -\delta_2 C_1 e^{-\delta_2 \ell} + b_2 e^{-\delta_2 \ell},$$

$$\text{Ker}_j(x, s) = g_{j1}e^{\delta_j x} \mathcal{K}_j(\ell, s) + g_{j2}e^{-\delta_j x} \mathcal{K}_j(\ell, s) + \frac{1}{2\delta_j} (e^{\delta_j(x-s)} - e^{-\delta_j|x-s|}),$$

$$\mathcal{K}_j(x, s) = \text{ch } \delta_j(x-s) + b_2 \text{sh } \delta_j(x-s), \quad j = 1, 2,$$

$$g_{11} = -\frac{\alpha_{12}g_{12}}{\alpha_{11}}, \quad g_{12} = -\frac{\alpha_{11}}{\alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{12}\alpha_{21}},$$

$$g_{21} = -\frac{\gamma_{12}g_{22}}{\alpha_{112}}, \quad g_{22} = -\frac{\gamma_{11}}{\gamma_{22}\gamma_{11} - \gamma_{12}\gamma_{21}},$$

$$v_1(x) = \frac{1}{\delta_1} \int_0^x (R_1(s) + \lambda_1 R_2(s)) \text{sh } \delta_1(x-s) ds,$$

$$w_1(x) = \frac{1}{\delta_1} \int_0^x (R_1(s) + \lambda_1 R_2(s)) \text{ch } \delta_1(x-s) ds,$$

$$v_2(x) = \frac{1}{\delta_2} \int_0^x \left(\frac{R_1(s)}{\lambda_2} + R_2(s) \right) \text{sh } \delta_2(x-s) ds ,$$

$$w_2(x) = \frac{1}{\delta_2} \int_0^x \left(\frac{R_1(s)}{\lambda_2} + R_2(s) \right) \text{ch } \delta_2(x-s) ds .$$

Схема числового розв'язування системи інтегральних рівнянь (8) наведена у роботах [1, 9, 11]. Знайшовши функції F_j , середню температуру T_1 і температурний момент T_2 визначаємо за формулами (5).

Термонапруження в оболонці. Переміщення в оболонці u , w , викликані температурним полем (4), визначаємо з рівняння [6, 8]

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} + 4\alpha^4 w(x) = \xi T_1(x) - c \frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} - g \quad (9)$$

та рівності

$$u(x) = \int (\alpha_t h(1+\nu) T_1(y) - h\nu k_2 w(y)) dy + A_0 h x + A_1, \quad (10)$$

де $4\alpha^4 = 3h^2 k_2^2 (1-\nu^2)$, $\xi = 3k_2 \alpha_t h^2 (1-\nu^2)$, $c = h\alpha_t (1+\nu)$, $g = 3A_0 h^2 \nu k_2$, ν – коефіцієнт Пуассона, α_t – температурний коефіцієнт лінійного розширення, A_0 та A_1 – сталі.

Умови ковзного защемлення на торцях оболонки мають вигляд

$$w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0, \quad x = 0, \quad x = \ell, \quad (11)$$

$$u = 0, \quad x = 0, \quad \frac{du}{dx} + h\nu k_2 w - (1+\nu)h\alpha_t T_1 = 0, \quad x = \ell. \quad (12)$$

З крайових умов (12) для видовження u отримуємо, що $A_0 = A_1 = 0$. Диференціальне рівняння (9) для визначення функції $w(x)$ розв'язуємо методом варіації сталої. Розв'язок буде мати вигляд

$$w(x) = (C_1(x) + \tilde{C}_1) e^{\alpha x} \cos \alpha x + (C_2(x) + \tilde{C}_2) e^{\alpha x} \sin \alpha x + \\ + (C_3(x) + \tilde{C}_3) e^{-\alpha x} \cos \alpha x + (C_4(x) + \tilde{C}_4) e^{-\alpha x} \sin \alpha x.$$

Праву частину рівняння (9) позначимо через $\psi(x)$:

$$\psi(x) \equiv \xi T_1(x) - c \frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} - g.$$

Тоді функції $C_m(x)$, $m = 1, \dots, 4$, набудуть вигляду

$$C_1(x) = - \int_0^x \frac{\psi(s)}{8\alpha^3 e^{\alpha s}} (\cos \alpha s + \sin \alpha s) ds, \\ C_2(x) = \int_0^x \frac{\psi(s)}{8\alpha^3 e^{\alpha s}} (\cos \alpha s - \sin \alpha s) ds, \\ C_3(x) = \int_0^x \frac{\psi(s)}{8\alpha^3 e^{-\alpha s}} (\cos \alpha s - \sin \alpha s) ds, \\ C_4(x) = \int_0^x \frac{\psi(s)}{8\alpha^3 e^{-\alpha s}} (\cos \alpha s + \sin \alpha s) ds. \quad (13)$$

Для обчислення інтегралів (13) виразимо другу похідну від температурного моменту $\frac{d^2 T_2(x)}{dx^2}$ через знайдені середню температуру $T_1(x)$ і температурний момент $T_2(x)$ з другого рівняння системи (1):

$$\frac{d^2 T_2(x)}{dx^2} = 3\mu_2^*(x)T_1(x) + 3(1 + \mu_1(x))T_2(x) - 3\mu_1(x)t_2(x) - 3\mu_2(x)t_1(x)$$

і підставимо її у (13). Константи \tilde{C}_m визначаємо з крайових умов (11).

Моменти і зусилля знаходимо за відомими формулами [6, 8]:

$$N_1 = D_1 \left[\frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu}{R} w - (1 + \nu)\alpha_t T_1 \right],$$

$$N_2 = D_1 \left[\frac{\nu}{h} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{R} w - (1 + \nu)\alpha_t T_1 \right],$$

$$D_1 = \frac{2Eh}{1 - \nu^2},$$

$$M_1 = -D_2 \left[\frac{1}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{h} \alpha_t T_2 \right],$$

$$M_2 = -D_2 \left[\frac{\nu}{h^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1 + \nu}{h} \alpha_t T_2 \right],$$

$$D_2 = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{1 - \nu^2},$$

де E – лінійний модуль пружності.

Числові результати. Розрахунки середньої температури T_1 , температурного моменту T_2 , нормованих згинних моментів $M_i^* = M_i \cdot 10^{-2} 1/(\text{кг} \cdot \text{м})$, зусилля $N_2^* = N_2 \cdot 10^{-6} \text{ м/кг}$ і прогину $w^* = w \cdot 10^6 1/\text{м}$ уздовж твірної оболонки $0 \leq x \leq 18$ проводили за різних значень коефіцієнтів теплообміну та температури зовнішнього середовища на шести (рис. 2) рівних кільцевих лицевих поверхнях $z = \pm h$ ($0 \leq x < 6$, $6 \leq x < 12$, $12 \leq x \leq 18$) скінченної кругової циліндричної оболонки і заданої температури зовнішнього середовища на її торцях $x = 0$ і $x = 18$, коли $R/h = 20$. Умови нагріву оболонки та коефіцієнти тепловіддачі з поверхонь вибирались так, щоб розподіл термомеханічних величин був симетричним відносно її перерізу $x = 9$, тому на рис. 2 – рис. 5 наведено графіки тільки на ділянці $0 \leq x \leq 9$.

На рис. 2 – рис. 5 наведено вплив зміни на ділянці $0 \leq x \leq 9$ нижньої поверхні оболонки $z = -h$ на її напружено-деформований стан

– температури зовнішнього середовища $t_2^- = 100, 75, 50^\circ \text{C}$ (криві 1–3)

за таких вхідних параметрів на інших ділянках: $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = \mu_1^- = \mu_2^- = \mu_3^- = 1 \text{ м}^{-1}$, $t_1^+ = t_2^+ = t_3^+ = t_1^- = t_2^- = t_3^- = 0^\circ \text{C}$;

– коефіцієнта тепловіддачі $\mu_2^- = 0.5 \text{ м}^{-1}$, 0.1 м^{-1} (криві 4, 5) з лицевої поверхні $z = -h$ за таких вхідних параметрів: $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = \mu_1^- = \mu_3^- = 1 \text{ м}^{-1}$, $t_1^+ = t_2^+ = t_3^+ = t_1^- = t_3^- = 0^\circ \text{C}$, $t_2^- = 100^\circ \text{C}$.

У цих двох випадках торці оболонки $x = 0$, $x = 18$ теплоізолювані: $b_1 = b_2 = 0$.

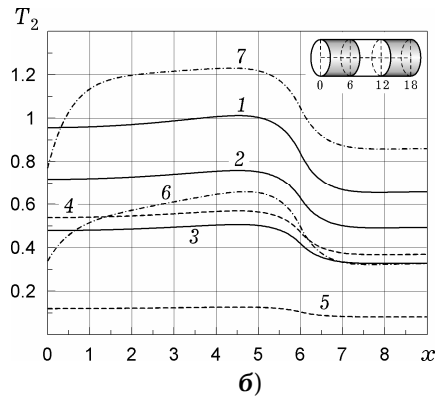
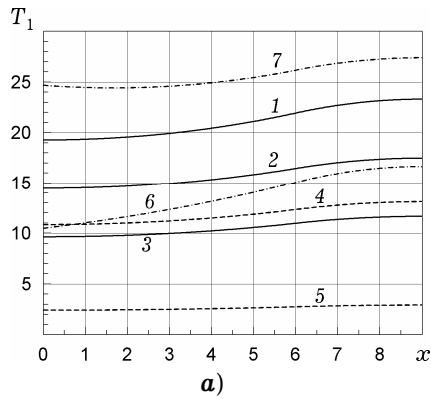


Рис. 2

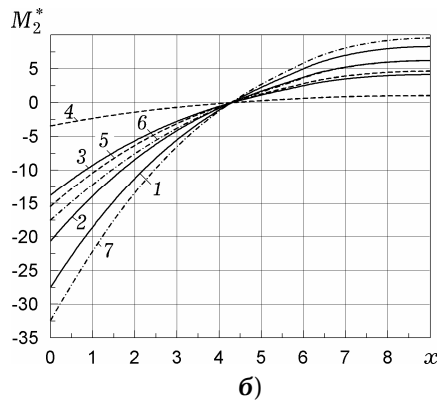
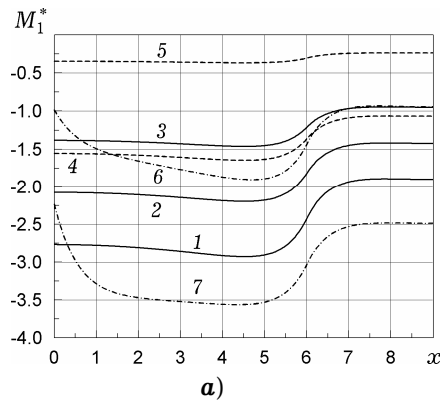


Рис. 3

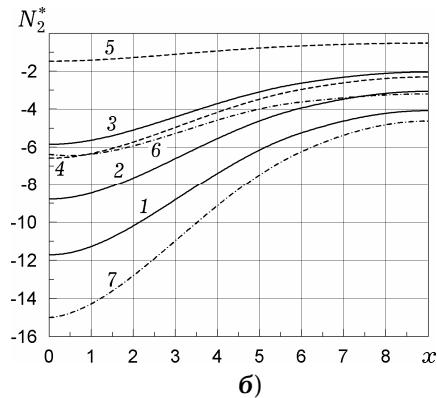
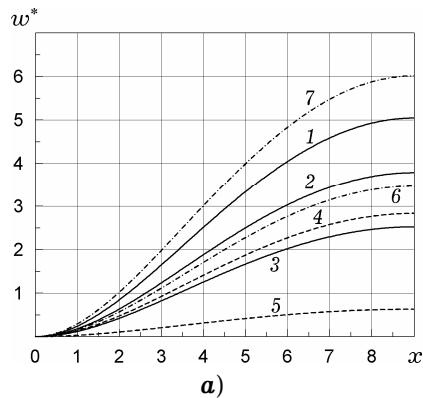


Рис. 4

У випадку конвективного теплообміну з $b_1 = b_2 = 1$ на торцях оболонки $x = 0$, $x = 18$ з температурою зовнішнього середовища $T_{11}^c = T_{12}^c = 15, 25^\circ\text{C}$, на рис. 2 – рис. 5 наведено розподіл характеристик її напружено-деформованого стану (криві 6, 7) за таких вхідних параметрів на інших ділянках поверхні оболонки: $T_{21}^c = T_{22}^c = 0^\circ\text{C}$, $\mu_1^+ = \mu_2^+ = \mu_3^+ = \mu_1^- = \mu_2^- = \mu_3^- = 1\text{ м}^{-1}$, $t_1^+ = t_2^+ = t_3^+ = t_1^- = t_3^- = 0^\circ\text{C}$, $t_2^- = 100^\circ\text{C}$.

При тепловій ізоляції на торцях оболонки $x = 0$, $x = 18$ і нульовій температурі зовнішнього середовища $t_1^+ = t_2^+ = t_3^+ = t_1^- = t_3^- = 0^\circ\text{C}$ всюди, крім відрізка $6 \leq x \leq 9$, всередині оболонки при $z = -h$, де вона дорівнює $t_2^- = 100^\circ\text{C}$, середня температура T_1 зростає і досягає максимуму в центрі

оболонки (рис. 2а, крива 1), а температурний момент T_2 зростає і досягає максимуму в околі ділянки з нагрівом, далі зменшується і досягає локального мінімуму в центрі оболонки (рис. 2б, крива 1). При спаданні температури зовнішнього середовища $t_2^- = 75, 50^\circ\text{C}$ і коефіцієнта тепловіддачі $\mu_2^- = 0.5\text{ м}^{-1}, 0.1\text{ м}^{-1}$ на цьому ж відрізку середня температура та температурний момент є меншими, ніж у випадку $t_2^- = 100^\circ\text{C}$, але характер поведінки є аналогічним (рис. 2, відповідно криві 2, 3, 4, 5). Оболонка «відчуває» вплив температури зовнішнього середовища з торців $x = 0, x = 18$ за конвективного теплообміну з ним на розподіл середньої температури та температурного моменту (рис. 2, криві 6, 7). Вищій температурі зовнішнього середовища ($T_{11}^c = T_{12}^c = 15, 25^\circ\text{C}$) відповідає вища середня температура та температурний момент (рис. 2, криві 6, 7).

Нормований згинний момент M_1^* у u^* всіх розглянутих випадках досягає локального мінімуму поблизу ділянки з нагрівом, а максимуму – на її середині, і конвективний теплообмін на торцях оболонки зменшує його величину біля торців (рис. 3а, криві 6, 7). Величина нормованого згинного моменту M_2^* (рис. 3б) в усіх випадках зростає і у точці $x = 4.3$ змінює знак на протилежний. Зростаючими при $0 \leq x \leq 9$ також є і функції нормованих прогинів w^* , видовження u^* і зусилля

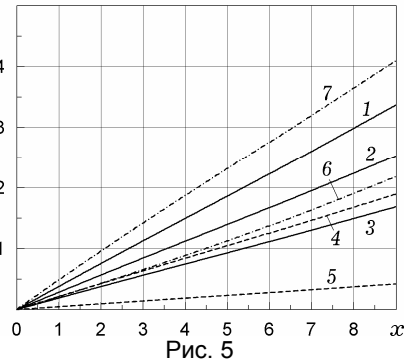


Рис. 5

N_2^* , зі збільшенням температури навколишнього середовища. Слід зауважити, що видовження u^* зростає майже лінійно (рис. 5).

Висновки. Методом варіації сталої задачу теплопровідності для скінченної циліндричної оболонки з кусково-сталими температурою середовища та коефіцієнтами тепловіддачі з її лицевих поверхонь зведено до системи інтегральних рівнянь Фредгольма другого роду. Числовий розв’язок системи інтегральних рівнянь отримано методом квадратур. Детально вивчено вплив середньої температури та температурного моменту на розподіл прогину, видовження, згинних моментів та зусилля в оболонці. Результати проведеного аналізу напружено-деформованого стану таких оболонок показали, що вибором геометричних параметрів, навантаження, умов закріплення контурів, коефіцієнтів тепловіддачі на різних частинах поверхні оболонки можна досягнути в ній необхідного з експлуатаційних міркувань діапазону зміни напружень.

1. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1978. – 292 с.
2. Коляно Ю. М., Дидык В. З. Установившиеся напряжения в бесконечной цилиндрической оболочке с теплообменом, обусловленные локальным нагревом // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1978. – Вып. 8. – С. 93–97.
3. Коляно Ю. М., Кулик А. Н. Температурные напряжения от объемных источников. – Киев: Наук. думка, 1983. – 288 с.
4. Кушнір Р. М. Визначення термопружного стану кусково-однорідної циліндричної оболонки з тріщиною // Доп. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 73–78.
5. Кушнір Р. М. Ключові рівняння для складеної циліндричної оболонки з власними напруженнями та дефектами структури // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – 44, № 4. – С. 77–84.
6. Підстригач Я. С., Ярема С. Я. Температурні напруження в оболонках. – Київ: Вид-во АН УРСР, 1961. – 212 с.

7. Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М. Термоупругость тел неоднородной структуры. – Москва: Наука, 1984. – 368 с.
8. Подстригач Я. С., Швец Р. Н. Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
9. Хапко Б. С., Чиж А. І. Термічний прогин смуги і прямокутної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 4. – С. 198–206.
 The same: Khar'ko B. S., Chyzh A. I. Thermal bending of a strip and a rectangular plate with coordinate-dependent heat exchange coefficients // J. Math. Sci. – 2011. – **174**, No. 3. – P. 375–386.
10. Хапко Б., Чиж А. Температурне поле та прогин півбезмежної пластинки із залежними від координати коефіцієнтами тепловіддачі // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2009. – Вип. 9. – С. 133–144.
11. Швец Р. Н., Хапко Б. С., Чиж А. І. Уравнения теплопроводности для оболочек с изломами при переменных коэффициентах теплоотдачи // Теорет. и прикл. механика. – 2010. – Вып. 1(47). – С. 69–76.
12. Chen H.-T., Wu X.-Y. Estimation of heat transfer coefficient in two-dimensional inverse heat conduction problems // Numer. Heat Transf. **B**-Fund. – 2006. – **50**, No. 4. – P. 375–394.
13. Grine A., Saury D., Desmons J.-Y., Harmand S. Identification models for transient heat transfer on a flat plate // Exp. Therm. Fluid Sci. – 2007. – **31**, No. 7. – P. 701–710.

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОТДАЧИ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕНИЯ В КОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

Исследовано термоупругое состояние конечной цилиндрической оболочки, на торцах которой выполняются условия скользящего защемления, обусловленное разницей температур внешней среды на лицевых поверхностях и зависимыми от координаты коэффициентами теплоотдачи на них. Предложен способ сведения краевой задачи теплопроводности к взаимосвязанной системе интегральных уравнений Фредгольма второго рода. Приведены результаты численного анализа распределения средней температуры, температурного момента и обусловленных ими прогиба, удлинения, усилия, изгибных моментов.

ON EFFECT OF VARIABLE HEAT EXCHANGE COEFFICIENTS ON THERMAL STRESSES IN FINITE CYLINDRICAL SHELL

Thermoelastic state of a finite cylindrical shell with the conditions of sliding clamping at the end faces caused by the difference of ambient temperature on outer surfaces and coordinate-dependent heat exchange coefficients on them is investigated. A method of reduction of boundary heat conduction problem to the coupled system of Fredholm integral equations of the second kind is proposed. The results of numerical analysis of the distribution of mean temperature, temperature moment and caused by them bending, elongation, forces, and bending moments are shown.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
 30.04.13