УДК 539.3

В. С. Попович, Б. М. Калиняк

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ І МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ СТАТИЧНОГО ТЕРМОПРУЖНОГО СТАНУ БАГАТОШАРОВИХ ТЕРМОЧУТЛИВИХ ЦИЛІНДРІВ

Розроблено методику отримання аналітичних виразів для опису осесиметричних стаціонарного теплового та статичного чи квазістатичного полів напружень і деформацій у довгих порожнистих багатошарових циліндрах із термочутливих матеріалів, на обмежувальних поверхнях яких задані сталі нормальні навантаження і довільні класичні умови теплообміну. Проблему побудови розв'язку задачі теплопровідності зведено до визначення одної сталої інтегрування, через яку визначаються всі інші такі сталі з нелінійного алгебричного рівняння, а задача термопружності – до розв'язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду з відповідними інтегральними умовами. В результаті застосування запропонованої методики розв'язання системи інтегральних рівнянь отримано формули для обчислення характеристик напружено-деформованого стану у вигляді функціональних залежностей від температури, масових сил, товщин шарів, поверхневих навантажень і залежностей механічних характеристик матеріалів шарів від температури.

Значна частина елементів енергетичного, хімічного та іншого обладнання є багатошаровими циліндричними конструкціями, які працюють в умовах нагрівання до високих температур та одночасно зазнають істотних силових навантажень. При проектуванні та експлуатації таких елементів конструкцій розрахунок розподілу температури та зумовлених нею напружень на основі математичних моделей, які не враховують таку об'єктивну реальність, як залежність теплових та механічних характеристик шарів від температури, не задовольняє сучасну інженерну практику [6, 16]. Врахування термочутливості є важливим і при розрахунку термонапруженого стану циліндричних конструкцій з функціонально-градієнтних та композитних матеріалів [13, 14]. При цьому особливу цінність мають аналітичні розв'язки задач термопружності. Вони є зручними при числовому аналізі та корисними при побудові розв'язків задач оптимального за швидкодією керування процесами нагрівання тіл за обмежень на температуру та напруження, а також при розв'язуванні задач ідентифікації температурних полів і напружень за неповної інформації про теплові та силові навантаження. Ці задачі зводяться до обернених задач термопружності, розв'язання яких значно спрощується, якщо є відомими відповідні розв'язки прямих задач у напруженнях [1, 7]. Дослідження напружень у термочутливих суцільних і кусково-неоднорідних циліндрах проводилось у роботах [2, 3, 11, 12, 17].

Визначенню компонент статичного чи квазістатичного напружено-деформованого стану таких конструкцій передує знаходження розподілу температури з відповідної нелінійної задачі теплопровідності. Цю задачу переважно частково лінеаризують шляхом введення змінних Кірхгофа [4, 5, 15, 17]. При визначенні стаціонарних розподілів температури в записаній на змінні Кірхгофа крайовій задачі нелінійними будуть умови, отримані з рівності температур на межі контакту сусідніх шарів, а також умови, отримані з умов конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішнім середовищем через обмежувальні поверхні [5, 17]. Для розв'язування такого типу задач у роботах [8–10] запропоновано методику, яка базується на використанні апарату узагальнених функцій, однак при цьому залишається відкритим принципове питання вибору початкового наближення розв'язку системи нелінійних алгебричних рівнянь, до чого, по суті, зводиться проблема побудови розв'язку крайової задачі.

Нижче на прикладі осесиметричної задачі термопружності для багатошарового циліндра ілюструється методика розв'язання таких задач, яка ґрунтується на використанні класичного математичного апарату, тому є широкодоступною і простою у застосуванні. При знаходженні розподілу температури залежно від умов теплообміну на обмежувальних поверхнях отримуємо точний аналітичний розв'язок або зводимо проблему до числового розв'язання одного нелінійного рівняння зі зрозумілим способом вибору початкового наближення його розв'язку. Для компонент напружено-деформованого стану отримуємо аналітичні вирази, які містять розподіли температури та масових сил у шарах циліндра, їх товщини, силові навантаження та функціональні залежності механічних характеристик матеріалів шарів циліндра від температури.

Формулювання математичної моделі для визначення усталеного розподілу температури. Розглянемо безмежний n-шаровий порожнистий круговий циліндр, на кожній з обмежувальних поверхонь $r = r_1$ і $r = r_{n+1}$ якого задано сталі температури чи теплові потоки або умови конвективного, променевого чи конвективно-променевого теплообміну із зовнішніми середовищами сталих температур. Між ізотропними контактуючими шарами, коефіцієнти теплопровідності яких є різними і залежать від температури, наявні тепловиділення, які спричиняють сталі теплові потоки. У кожному із шарів діють внутрішні джерела тепла, густина яких залежить від радіальної координати. Стаціонарне температурне поле такого циліндра описується системою рівнянь теплопровідності [6, 15]

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left[r\lambda_t^{(j)}(t^{(j)})\frac{dt^{(j)}}{dr}\right] = -W^{(j)}(r), \qquad j = 1,\dots,n\,, \tag{1}$$

з умовами контакту сусідніх шарів

$$t^{(j)}\Big|_{r=r_{j+1}} = t^{(j+1)}\Big|_{r=r_{j+1}}, \qquad j = 1,\dots,n-1\,, \tag{2}$$

$$\lambda_t^{(j)}(t^{(j)})\frac{dt^{(j)}}{dr}\bigg|_{r=r_{j+1}} = \lambda_t^{(j+1)}(t^{(j+1)})\frac{dt^{(j+1)}}{dr}\bigg|_{r=r_{j+1}} + q^{(j+1)}, \quad j = 1,\dots,n-1\,, \tag{3}$$

де $t^{(j)}$ – абсолютна температура, $\lambda^{(j)}(t^{(j)})$ – залежний від температури коефіцієнт теплопровідності j-го шару циліндра, $W^{(j)}(r)$ – густина джерел тепла в j-му шарі, а $q^{(j+1)}$, $j = 1,\dots,n-1$, – потоки тепла, спричинені тепловиділеннями на межах сусідніх шарів. Для повного формулювання математичної моделі температурного поля у багатошаровому порожнистому циліндрі до рівнянь (1)–(3) слід долучити умови теплообміну на обмежувальних поверхнях, можливі варіанти яких розглянемо дещо пізніше.

Для зручності подальших викладок введемо безрозмірні температури $T^{(j)} = t^{(j)}/t_0$ та координату $\rho = r/\ell_0$, де t_0 і ℓ_0 – вибрані нами відлікова температура та характерний розмір. Коефіцієнти теплопровідності подамо у вигляді $\lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) = \lambda_{t0}^{(j)}\lambda_*^{(j)}(T^{(j)})$, де множники з індексом «0» – сталі величини з розмірністю коефіцієнта теплопровідності, а з індексом «$*$» – безрозмірні функції, які описують залежності коефіцієнтів теплопровідності шарів від введених безрозмірних температур $T^{(j)}$. Зазначимо, що у довідковій літературі залежності характеристик матеріалів від температури переважно наводять у табличному вигляді. При теоретичних дослідженнях ці залежності апроксимують певними аналітичними виразами (лінійними, квадратичними тощо).

Нехай коефіцієнти теплопровідності матеріалів шарів задано у діапазоні температур $[t_\mathrm{p}, t_\mathrm{k}]$. Тоді доволі поширену лінійну апроксимацію їхньої температурної залежності в j-му шарі подамо у вигляді

$$\lambda_t^{(j)}(t^{(j)}) = \lambda_{t0}^{(j)}[1 + k^{(j)}(T^{(j)} - T_\mathrm{p})]\,, \tag{4}$$

де $\lambda_{t0}^{(j)}$ – значення коефіцієнтів теплопровідності матеріалів шарів при мінімальній температурі $T_{\text{p}} = t_{\text{p}}/t_0$ з діапазону їх задання $[T_{\text{p}}, T_{\text{k}}]$ (опорні значення), $T_{\text{k}} = t_{\text{k}}/t_0$.

Густини джерел тепла $W^{(j)}(r)$ подамо у вигляді $W^{(j)}(r) = w_0^{(j)} w_*^{(j)}(\rho)$, де $w_0^{(j)}$ – розмірні величини, а $w_*^{(j)}(\rho)$ – безрозмірні функції, що описують просторовий розподіл джерел тепла.

У введених безрозмірних величинах рівняння (1) та умови контакту (2) і (3) набувають вигляду

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\lambda_*^{(j)}(T^{(j)})\frac{dT^{(j)}}{d\rho}\right] = -\mathrm{Po}^{(j)}\, w_*^{(j)}(\rho), \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$T^{(j)}\Big|_{\rho=\rho_{j+1}} = T^{(j+1)}\Big|_{\rho=\rho_{j+1}}, \qquad j = 1,\ldots,n-1, \tag{6}$$

$$\frac{\lambda_{t0}^{(j)}}{\lambda_{t0}^{(j+1)}}\lambda_*^{(j)}(T^{(j)})\frac{dT^{(j)}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}} = \lambda_*^{(j+1)}(T^{(j+1)})\frac{dT^{(j+1)}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}} + \mathrm{Ki}^{(j+1)},$$

$$j = 1,\ldots,n-1, \tag{7}$$

де $\rho_j = \dfrac{r_j}{\ell_0}$, а $\mathrm{Po}^{(j)} = \dfrac{w_0^{(j)}\ell_0^2}{t_0\lambda_{t0}^{(j)}}$ і $\mathrm{Ki}^{(j+1)} = \dfrac{q_0^{(j+1)}\ell_0}{t_0\lambda_{t0}^{(j+1)}}$ – опорні критерії Померанцева та Кірпічова відповідно.

Рівняння (5) та умови (7) є нелінійними з огляду на залежності коефіцієнтів теплопровідності від шуканих температур. Для їх лінеаризації застосуємо перетворення Кірхгофа [4, 6, 15]

$$\theta^{(j)} = \int_{T_p}^{T^{(j)}} \lambda_*^{(j)}(T^{(j)})\, dT^{(j)}, \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{8}$$

внаслідок чого рівняння (5) та умови (7) трансформуються у лінійні відносно змінних Кірхгофа

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left[\rho\frac{d\theta^{(j)}}{d\rho}\right] = -\mathrm{Po}^{(j)}\, w_*^{(j)}(\rho), \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{9}$$

$$\frac{\lambda_{t0}^{(j)}}{\lambda_{t0}^{(j+1)}}\frac{d\theta^{(j)}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}} = \frac{d\theta^{(j+1)}}{d\rho}\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}} + \mathrm{Ki}^{(j+1)}, \qquad j = 1,\ldots,n-1. \tag{10}$$

У той же час з лінійних умов (6) отримаємо наступні нелінійні умови на змінні Кірхгофа:

$$T^{(j)}(\theta^{(j)})\Big|_{\rho=\rho_{j+1}} = T^{(j+1)}(\theta^{(j+1)})\Big|_{\rho=\rho_{j+1}}, \qquad j = 1,\ldots,n-1, \tag{11}$$

де $T^{(j)}(\theta^{(j)})$ – вирази температури через змінні Кірхгофа. За конкретних залежностей $\lambda_*^{(j)}(T^{(j)})$ їх вигляд отримаємо з рівнянь (8). Так, якщо залежності коефіцієнтів теплопровідності від температури мають вигляд (4), то $\lambda_*^{(j)}(T^{(j)}) = 1 + k^{(j)}(T^{(j)} - T_{\text{p}})$, і рівняння (8) набувають вигляду

$$\theta^{(j)} = T^{(j)} - T_{\text{p}} + \frac{k^{(j)}}{2}(T^{(j)} - T_{\text{p}})^2, \qquad j = 1,\ldots,n. \tag{12}$$

Розв'язавши рівняння (12) відносно $T^{(j)}$, отримуємо вирази температури через змінні Кірхгофа

$$T^{(j)}(\theta^{(j)}) = \frac{\sqrt{1 + 2k^{(j)}\theta^{(j)}} - 1}{k^{(j)}} + T_{\text{р}}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{13}$$

Зазначимо, що з двох можливих знаків перед коренем квадратним у формулах (13) вибрано той, який відповідає фізичній суті задачі (при $k^{(j)} \to 0$ (нетермочутливі шари) маємо $\theta^{(j)} \to T^{(j)} - T_{\text{р}}$).

Побудова розв'язку крайової задачі на змінні Кірхгофа. Інтегруючи рівняння (9), знаходимо

$$\frac{d\theta^{(j)}}{d\rho} = \frac{1}{\rho}[C_1^{(j)} - \text{Po}^{(j)}\, w^{(j)}(\rho)], \tag{14}$$

$$\theta^{(j)} = C_1^{(j)} \ln\frac{\rho}{\rho_j} + C_2^{(j)} - \text{Po}^{(j)}\, \bar{w}^{(j)}(\rho), \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{15}$$

де

$$w^{(j)}(\rho) = \int\limits_{\rho_j}^{\rho} \xi w_*^{(j)}(\xi)\, d\xi, \qquad \bar{w}^{(j)}(\rho) = \int\limits_{\rho_j}^{\rho} \xi \ln\frac{\rho}{\xi}\, w_*^{(j)}(\xi)\, d\xi,$$

$C_i^{(j)}$, $i = 1, 2$, – сталі інтегрування. Визначення сталих інтегрування здійснимо так. Будемо вважати сталі інтегрування, наприклад, першого шару $C_i^{(1)}$ (базові сталі) відомими. Покажемо, що всі інші сталі інтегрування $C_i^{(j)}$, $j = 2, \ldots, n$, $i = 1, 2$, виражаються через вибрані дві базові сталі $C_i^{(1)}$ на основі умов контакту сусідніх шарів (10), (11). Дійсно, з умов (10) маємо

$$C_1^{(j)} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(j)}}\left[\lambda_{t0}^{(1)} C_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{j-1} (\lambda_{t0}^{(k)}\, \text{Po}^{(k)}\, w^{(k)}(\rho_{k+1}) + \lambda_{t0}^{(k+1)} \rho_{k+1}\, \text{Ki}^{(k+1)})\right],$$

$$j = 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Бачимо, що всі сталі інтегрування з нижнім індексом «1» у виразах змінних Кірхгофа подано через сталу $C_1^{(1)}$ – першу із базових сталих.

Для знаходження сталих інтегрування $C_2^{(j)}$, $j = 2, \ldots, n$, використаємо умови [5]

$$\left(\theta^{(j+1)} - \frac{k^{(j+1)}}{k^{(j)}}\theta^{(j)}\right)\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}} = \left(1 - \frac{k^{(j+1)}}{k^{(j)}}\right)(T^{(j)}(\theta^{(j)}) - T_{\text{р}})\Bigg|_{\rho=\rho_{j+1}},$$

$$j = 1, \ldots, n-1, \tag{17}$$

які рівносильні умовам (11). При цьому врахуємо, що $\theta^{(j)}(\rho_j) = C_2^{(j)}$. В результаті отримаємо рекурентний зв'язок

$$C_2^{(j+1)} = \frac{k^{(j+1)}}{k^{(j)}}\theta^{(j)}(\rho_{j+1}) + \left(1 - \frac{k^{(j+1)}}{k^{(j)}}\right)[T^{(j)}(\theta^{(j)}(\rho_{j+1})) - T_{\text{р}}], \tag{18}$$

де

$$\theta^{(j)}(\rho_{j+1}) = C_1^{(j)} \ln\frac{\rho_{j+1}}{\rho_j} + C_2^{(j)} - \text{Po}^{(j)}\, \bar{w}^{(j)}(\rho_{j+1}).$$

З (18) бачимо, що стала з нижнім індексом «2» для кожного наступного шару виражається через сталі інтегрування у попередньому шарі. Так,

$$C_2^{(2)} = \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\theta^{(1)}(\rho_2) + \left(1 - \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}}\right)[T^{(1)}(\theta^{(1)}(\rho_2)) - T_{\text{р}}],$$

де $\theta^{(1)}(\rho_2) = C_1^{(1)} \ln\frac{\rho_2}{\rho_1} + C_2^{(1)} - \text{Po}^{(1)}\, \bar{w}^{(1)}(\rho_2)$ виражається через базові сталі $C_1^{(1)}$ і $C_2^{(1)}$.

Подібно отримуємо

$$C_2^{(3)} = \frac{k^{(3)}}{k^{(2)}}\,\theta^{(2)}(\rho_3) + \left(1 - \frac{k^{(3)}}{k^{(2)}}\right)[T^{(2)}(\theta^{(2)}(\rho_3)) - T_{\text{p}}]\,,$$

де

$$\theta^{(2)}(\rho_3) = C_1^{(2)} \ln\frac{\rho_3}{\rho_2} + C_2^{(2)} - \text{Po}^{(2)}\,\bar{w}^{(2)}(\rho_3)\,.$$

Оскільки, як показано вище, сталі $C_1^{(2)}$ і $C_2^{(2)}$ виражаються через $C_1^{(1)}$ і $C_2^{(1)}$, то і стала $C_2^{(3)}$ виражається через них. Подібно можна виписати вирази для всіх сталих інтегрування $C_2^{(j)}$, $j = 1,\dots,n$.

Отже, в результаті проведених обчислень у виразах змінних Кірхгофа (15) невідомими залишаться базові сталі інтегрування $C_i^{(1)}$, $i = 1,2$, для визначення яких слід використати умови теплообміну на обмежувальних поверхнях. Розглянемо типові варіанти таких умов.

1°. Нехай обмежувальна поверхня $r = r_1$ підтримується при сталій температурі t_{c1}. Тоді гранична умова на цій поверхні має вигляд $t^{(1)}\big|_{r=r_1} = t_{c1}$, а у безрозмірному вигляді запишеться як

$$T^{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = T_{c1}\,, \tag{19}$$

де $T_{c1} = t_{c1}/t_0$. З умови (19) отримуємо таку умову щодо змінної Кірхгофа:

$$\theta^{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = \theta_{c1}\,, \tag{20}$$

де

$$\theta_{c1} = \int\limits_{T_{\text{p}}}^{T_{c1}} \lambda_*^{(1)}(T)\,dT = T_{c1} - T_{\text{p}} + (k^{(1)}/2)(T_{c1} - T_{\text{p}})^2\,.$$

З цієї умови знаходимо, що друга базова стала інтегрування $C_2^{(1)} = \theta_{c1}$.

На другій обмежувальній поверхні $r = r_{n+1}$ можуть бути задані:

- стала температура t_{cn}. У безрозмірних величинах відповідна гранична умова має вигляд $T^{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = T_{cn}$ (тут $T_{cn} = t_{cn}/t_0$), з якої отримуємо умову на змінну Кірхгофа

$$\theta^{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = \theta_{cn}\,, \tag{21}$$

де

$$\theta_{cn} = T_{cn} - T_{\text{p}} + (k^{(n)}/2)(T_{cn} - T_{\text{p}})^2\,.$$

Задовольнивши умову (21), отримуємо алгебричне рівняння для визначення першої базової сталої інтегрування $C_1^{(1)}$:

$$C_1^{(n)}(C_1^{(1)})\ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + C_2^{(n)}(C_1^{(1)}, C_2^{(1)})\Big|_{C_2^{(1)}=\theta_{c1}} = \text{Po}^{(n)}\,\bar{w}^{(n)}(\rho_{n+1}) + \theta_{cn}\,, \tag{22}$$

де $C_1^{(n)}$ виражається через $C_1^{(1)}$ формулою (16).

- сталий тепловий потік $q^{(n+1)}$, тобто $\lambda_t^{(n)}(t_n)\dfrac{dt_n}{dr}\Big|_{r=r_{n+1}} = q^{(n+1)}$. У безрозмірних величинах ця умова має вигляд

$$\lambda_*^{(n)}(T^{(n)})\frac{dT^{(n)}}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_{n+1}} = \text{Ki}^{(n+1)}\,,$$

а через змінну Кірхгофа для n-го шару вона запишеться як

$$\left.\frac{d\theta^{(n)}}{d\rho}\right|_{\rho=\rho_{n+1}} = \mathrm{Ki}^{(n+1)}, \tag{23}$$

де $\mathrm{Ki}^{(n+1)} = (q^{(n+1)}\ell_0)/(t_0\lambda_{t0}^{(n)})$ – критерій Кірпічова.

З умови (23) знаходимо, що

$$C_1^{(1)} = \frac{1}{\lambda_{t0}^{(1)}}\left[\sum_{k=1}^{n}\lambda_{t0}^{(k)}\,\mathrm{Po}^{(k)}\,w^{(k)}(\rho_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{t0}^{(k+1)}\rho_{k+1}\,\mathrm{Ki}^{(k+1)} + \right.$$

$$\left. + \lambda_{t0}^{(n)}\rho_{n+1}\,\mathrm{Ki}^{(n+1)}\right].$$

Отже, у розглянутому випадку всі сталі інтегрування у виразах змінних Кірхгофа виражено у явному вигляді, тобто отримано точний аналітичний розв'язок нелінійної задачі теплопровідності.

• конвективно-променевий теплообмін з середовищем температури t_{cn}. У цьому випадку гранична умова на зовнішній поверхні циліндра має вигляд

$$\left.\left[\lambda_t^{(n)}(t^{(n)})\frac{dt^{(n)}}{dr} + \alpha_n(t^{(n)} - t_{cn}) + \sigma\varepsilon(t^{(n)})[(t^{(n)})^4 - t_{cn}^4]\right]\right|_{r=r_{n+1}} = 0, \tag{24}$$

де $\alpha_n(t^{(n)})$, $\varepsilon(t^{(n)})$ – залежні від температури коефіцієнт теплообміну через поверхню $r = r_{n+1}$ і ступінь чорноти цієї поверхні, які подібно до коефіцієнтів теплопровідності подаємо у вигляді $\alpha_n(t^{(n)}) = \alpha_{n0}\alpha_n^*(T^{(n)})$, $\varepsilon(t^{(n)}) = \varepsilon_0\varepsilon^*(T^{(n)})$. У безрозмірних величинах умова (24) набуває вигляду

$$\left[\lambda_*^{(n)}(T^{(n)})\frac{dT^{(n)}}{d\rho} + \mathrm{Bi}_n\,\alpha_n^*(T^{(n)})(T^{(n)} - T_{cn}) + \right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{Sk}_n\,\varepsilon^*(T^{(n)})((T^{(n)})^4 - T_{cn}^4)\right]\right|_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \tag{25}$$

де $\mathrm{Bi}_n = \alpha_{n0}\ell_0/\lambda_{t0}^{(n)}$, $\mathrm{Sk}_n = \sigma\varepsilon_n\ell_0 t_0^{(n)}/\lambda_{t0}^{(n)}$ – опорні критерії Біо і Старка відповідно. Якщо скористатись змінною Кірхгофа для n-го шару, то умова (25) запишеться так:

$$\left.\left[\frac{d\theta^{(n)}}{d\rho} + g_{n+1}(T^{(n)}(\theta^{(n)}))\right]\right|_{\rho=\rho_{n+1}} = 0, \tag{26}$$

де

$$g_{n+1}(T^{(n)}(\theta^{(n)})) = \mathrm{Bi}_n\,\alpha_n^*(T^{(n)}(\theta^{(n)}))(T^{(n)}(\theta^{(n)}) - T_{cn}) +$$

$$+ \mathrm{Sk}_n\,\varepsilon^*(T^{(n)}(\theta^{(n)}))((T^{(n)}(\theta^{(n)}))^4 - T_{cn}^4).$$

З умови (26) отримаємо алгебричне рівняння для визначення сталої інтегрування $C_1^{(1)}$:

$$\lambda_{t0}^{(1)}C_1^{(1)} - \sum_{k=1}^{n}\lambda_{t0}^{(k)}\,\mathrm{Po}^{(k)}\,w^{(k)}(\rho_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{t0}^{(k+1)}\rho_{k+1}\,\mathrm{Ki}^{(k+1)} +$$

$$+ \lambda_{t0}^{(n)}\rho_{n+1}g_{n+1}(T^{(n)}(\theta^{(n)}(\rho_{n+1}))) = 0, \tag{27}$$

де

$$\theta^{(n)}(\rho_{n+1}) = C_1^{(n)}\ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + \left.C_2^{(n)}(C_1^{(1)}, C_2^{(1)})\right|_{C_2^{(1)}=\theta_{c1}} - \mathrm{Po}^{(n)}\,\bar{w}^{(n)}(\rho_{n+1}),$$

а $C_1^{(n)}$ виражається через $C_1^{(1)}$ та інші вхідні параметри за формулою (16). Звернемо увагу, що з рівняння (27) при $\mathrm{Sk}_n = 0$ отримаємо рівняння для визначення базової сталої $C_1^{(1)}$ у випадку чисто конвективного, а при $\mathrm{Bi}_n = 0$ – чисто променевого теплообміну на обмежувальній поверхні $r = r_{n+1}$.

2°. Нехай на обмежувальній поверхні $r = r_1$ задано сталий потік тепла $q^{(1)}$, тобто $\lambda_t^{(1)}(t^{(1)}) \dfrac{dt^{(1)}}{dr}\Big|_{r=r_1} = -q^{(1)}$. У безрозмірному вигляді ця умова має вигляд $\lambda_*^{(1)}(T^{(1)}) \dfrac{dT^{(1)}}{d\rho}\Big|_{\rho=\rho_1} = -\mathrm{Ki}^{(1)}$, звідки отримуємо умову на змінну Кірхгофа $\theta^{(1)}$:

$$\frac{d\theta^{(1)}}{d\rho}\bigg|_{\rho=\rho_1} = -\mathrm{Ki}^{(1)}. \tag{28}$$

Задовольнивши умову (28), знаходимо, що $C_1^{(1)} = -\rho_1 \mathrm{Ki}^{(1)}$. Другу базову сталу $C_2^{(1)}$ визначимо з умови теплообміну на поверхні $r = r_{n+1}$. На ній можуть бути задані:

• стала температура t_{cn}. Тоді умова на змінну Кірхгофа $\theta^{(n)}$ має вигляд (21), звідки знаходимо вираз для другої базової сталої інтегрування $C_2^{(1)}$:

$$C_2^{(1)} = -C_1^{(n)} \ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + \mathrm{Po}^{(n)} \,\bar{w}^{(n)}(\rho_{n+1}) + \theta_{cn},$$

де

$$C_1^{(n)} = -\frac{1}{\lambda_{t0}^{(n)}}\left[\lambda_{t0}^{(1)}\rho_1 \mathrm{Ki}^{(1)} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\lambda_{t0}^{(k)} \mathrm{Po}^{(k)} w^{(k)}(\rho_{k+1}) + \lambda_{t0}^{(k+1)}\rho_{k+1} \mathrm{Ki}^{(k+1)}\right)\right].$$

У розглянутому випадку всі базові сталі інтегрування записано в аналітичному вигляді. Отже, отримано аналітичний розв'язок нелінійної задачі теплопровідності.

• конвективно-променевий теплообмін (25). Тоді з умови (26) для визначення базової сталої інтегрування $C_2^{(1)}$ отримуємо рівняння (27), у якому

$$C_1^{(1)} = -\rho_1 \mathrm{Ki}^{(1)},$$

$$\theta^{(n)}(\rho_{n+1}) = C_1^{(n)} \ln\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + C_2^{(n)}(C_1^{(1)}, C_2^{(1)})\Big|_{C_1^{(1)}=-\rho_1 \mathrm{Ki}^{(1)}} - \mathrm{Po}^{(n)} \,\bar{w}^{(n)}(\rho_{n+1}),$$

а $C_1^{(n)}$ виражається формулою (16).

3°. Нехай розглядуваний циліндр через обидві обмежувальні поверхні $r = r_1$ і $r = r_{n+1}$ конвективно-променевим способом обмінюється теплом із середовищами сталих температур t_{c1} і t_{cn} відповідно. Тоді умова теплообміну на поверхні $r = r_1$, записана через змінну Кірхгофа, для першого шару має вигляд

$$\left[\frac{d\theta^{(1)}}{d\rho} - g_1(T^{(1)}(\theta^{(1)}))\right]\bigg|_{\rho=\rho_1} = 0, \tag{29}$$

де

$$g_1(T^{(1)}(\theta^{(1)})) = \mathrm{Bi}_1 \,\alpha_1^*(T^{(1)}(\theta^{(1)}))(T^{(1)}(\theta^{(1)}) - T_{c1}) + \\ + \mathrm{Sk}_1 \,\varepsilon^*(T^{(1)}(\theta^{(1)}))((T^{(1)}(\theta^{(1)}))^4 - T_{c1}^4).$$

Умова теплообміну на поверхні $r = r_{n+1}$, записана через змінну Кірхгофа $\theta^{(n)}$, має вигляд (26).

З умови (29) отримуємо рівняння

$$C_1^{(1)} = \rho_1 g_1(T^{(1)}(\theta^{(1)}(\rho_1))). \tag{30}$$

Оскільки $\theta^{(1)}(\rho_1) = C_2^{(1)}$, то вираз $g_1(T^{(1)}(\theta^{(1)}(\rho_1)))$ у рівнянні (30) не містить сталої $C_1^{(1)}$. Тому

$$C_1^{(1)} = \rho_1 g_1(C_2^{(1)}). \tag{31}$$

Враховуючи рівність (31), з граничної умови (26) отримуємо рівняння для визначення базової сталої інтегрування $C_2^{(1)}$:

$$\lambda_{t0}^{(1)}\rho_1 g_1(C_2^{(1)}) + \lambda_{t0}^{(n)}\rho_{n+1} g_{n+1}(T^{(n)}(\theta^{(n)}(\rho_{n+1}))) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_{t0}^{(k)} \,\mathrm{Po}^{(k)}\, w^{(k)}(\rho_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{t0}^{(k+1)} \rho_{k+1}\, \mathrm{Ki}^{(k+1)}, \tag{32}$$

де

$$\theta^{(n)}(\rho_{n+1}) = C_1^{(n)} \ln \frac{\rho_{n+1}}{\rho_n} + C_2^{(n)}(C_1^{(1)}, C_2^{(1)})\Big|_{C_1^{(1)}=\rho_1 g_1(C_2^{(1)})} - \mathrm{Po}^{(n)}\, \bar{w}^{(n)}(\rho_{n+1}),$$

а $C_1^{(n)}$ виражається через $C_1^{(1)}$ за формулою (16).

Можливі випадки теплообміну не вичерпуються розглянутими варіантами умов на обмежувальних поверхнях циліндра, але в цих інших випадках визначення базових сталих інтегрування є чисто технічною роботою. Маючи змінні Кірхгофа, усталені розподіли температури в шарах циліндра визначаємо за формулами (13).

Визначення напружено-деформованого стану. Нехай розглядуваний n-шаровий циліндр з ідеальним механічним контактом між шарами і відомим радіальним розподілом температури, визначеним з відповідної задачі теплопровідності або експериментально, перебуває під заданими сталими нормальними навантаженнями на його зовнішніх поверхнях. Вважаємо, що механічні характеристики (модулі пружності, коефіцієнти Пуассона та температурні коефіцієнти лінійного розширення) складових циліндра є функціями від температури (термочутливі матеріали). Враховуючи, що температури шарів залежать від радіальної координати, в подальшому будемо пам'ятати (а при потребі писати), що механічні характеристики шарів та їх комбінації є функціями від радіальної координати. Основними рівняннями, які описують термопружний стан такого циліндра, будуть:

– *рівняння рівноваги*

$$\frac{d}{d\rho}(\rho^2 \sigma_r^{(j)}) = \rho(\sigma^{(j)} - \rho f^{(j)}), \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{33}$$

– *зв'язки між компонентами тензорів деформацій і напружень*

$$E^{(j)} e_r^{(j)} = \sigma_r^{(j)} - \nu^{(j)}\big(\sigma_\varphi^{(j)} + \sigma_z^{(j)}\big) + E^{(j)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = (1 + \nu^{(j)}) \times$$
$$\times [\sigma_r^{(j)} - \nu^{(j)}\sigma^{(j)}] - \nu^{(j)} E^{(j)} e_z + (1 + \nu^{(j)}) E^{(j)} \Phi^{(j)}(T^{(j)}), \tag{34'}$$

$$E^{(j)} e_\varphi^{(j)} = \sigma_\varphi^{(j)} - \nu^{(j)}\big(\sigma_r^{(j)} + \sigma_z^{(j)}\big) + E^{(j)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = (1 + \nu^{(j)}) \times$$
$$\times [(1 - \nu^{(j)})\sigma^{(j)} - \sigma_r^{(j)}] - \nu^{(j)} E^{(j)} e_z + (1 + \nu^{(j)}) E^{(j)} \Phi^{(j)}(T^{(j)}), \tag{34''}$$

$$E^{(j)} e_z = \sigma_z^{(j)} - \nu^{(j)}\big(\sigma_r^{(j)} + \sigma_\varphi^{(j)}\big) + E^{(j)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}) =$$
$$= \sigma_z^{(j)} - \nu^{(j)}\sigma^{(j)} + E^{(j)}\Phi^{(j)}(T^{(j)}), \qquad j = 1, \ldots, n; \tag{34'''}$$

– *рівняння суцільності*

$$\rho \frac{de_\varphi^{(j)}}{d\rho} = e_r^{(j)} - e_\varphi^{(j)},$$

які у напруженнях мають вигляд

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1-(\nu^{(j)})^2}{E^{(j)}}\sigma^{(j)} - \nu^{(j)} e_z + (1+\nu^{(j)})\Phi^{(j)}(T^{(j)})\right] =$$

$$= \sigma_r^{(j)} \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu^{(j)}}{E^{(j)}}\right) - f^{(j)} \frac{1+\nu^{(j)}}{E^{(j)}}; \tag{35}$$

– *умови на обмежувальних поверхнях і в перерізі*

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_1) = -p_1, \qquad \sigma_r^{(n)}(\rho_{n+1}) = -p_2, \qquad 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_{n+1}} \eta\sigma_z(\eta)\,d\eta = p; \tag{36}$$

– *умови ідеального механічного контакту сусідніх шарів*

$$u_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = u_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad \sigma_r^{(j+1)}(\rho_{j+1}) = \sigma_r^{(j)}(\rho_{j+1}), \quad j = 1,\ldots,n-1. \tag{37}$$

У рівняннях і співвідношеннях (33)–(37) $E^{(j)}$, $\nu^{(j)}$, $\alpha^{(j)}$ – залежні від температури модуль пружності, коефіцієнт Пуассона, температурний коефіцієнт лінійного розширення матеріалу j-го шару відповідно; $\Phi^{(j)}(T^{(j)}) = t_0 \int_{T_p}^{T^{(j)}} \alpha^{(j)}(T^{(j)})\,dT^{(j)}$ – чисто теплова деформація; $f^{(j)}$ – масові сили, залежні від радіальної координати. Залежності від температури механічних характеристик матеріалів шарів у діапазоні безрозмірних температур $[T_\text{p}, T_\text{k}]$ їх задання подамо у вигляді $\chi^{(j)}(T^{(j)}) = \chi_0^{(j)}\chi_j^*(T^{(j)})$, де $\chi_0^{(j)}$ – розмірні величини, а $\chi_j^*(T^{(j)})$ – безрозмірні величини, які описують температурну залежність відповідної характеристики (вважатимемо, що $\chi_j^*(T^{(j)}) = 1 + k_{1\chi}(T^{(j)} - T_\text{p}) + k_{2\chi}(T^{(j)} - T_\text{p})^2 + \ldots$); $\sigma_r^{(j)}$, $\sigma_\varphi^{(j)}$, $\sigma_z^{(j)}$ – радіальна, колова та осьова компоненти тензора напружень; $e_r^{(j)}$, $e_\varphi^{(j)}$ – радіальна та колова компоненти тензора деформацій у j-му шарі відповідно; e_z – стала осьова деформація циліндра; $\sigma^{(j)} = \sigma_r^{(j)} + \sigma_\varphi^{(j)}$; $u_r^{(j)}$ – радіальна компонента вектора переміщень j-го шару, віднесена до характерного розміру ℓ_0; p_1, p_2 – задані сталі тиски (напруження) на внутрішній $(\rho = \rho_1)$ і зовнішній $(\rho = \rho_{n+1})$ поверхнях циліндра; p – задане на торцях циліндра зусилля, що діє уздовж його осі.

Після інтегрування рівняння рівноваги (33) для j-го шару за радіальною координатою у межах від ρ_j до ρ отримаємо рівняння

$$\rho^2\sigma_r^{(j)}(\rho) - \rho_j^2\sigma_r^{(j)}(\rho_j) = \int_{\rho_j}^{\rho} \eta(\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta))\,d\eta, \tag{38}$$

звідки

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[\rho_j^2\sigma_r^{(j)}(\rho_j) + \int_{\rho_j}^{\rho} \eta(\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta))\,d\eta\right], \quad j = 1,\ldots,n. \tag{39}$$

Зі співвідношення (39) при $j = 1$ отримуємо інтегральне рівняння

$$\sigma_r^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[\rho_1^2\sigma_r^{(1)}(\rho_1) + \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta(\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta))\,d\eta\right],$$

яке з урахуванням першої з умов (36) набуває вигляду

$$\sigma_r^{(1)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2 p_1 + \int\limits_{\rho_1}^{\rho}\eta(\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta))\,d\eta\right]. \tag{40}$$

При $j = 2$ з (39) маємо рівняння

$$\sigma_r^{(2)}(\rho) = \frac{\rho_2^2}{\rho^2}\sigma_r^{(1)}(\rho_2) + \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_2}^{\rho}\eta(\sigma^{(2)}(\eta) - \eta f^{(2)}(\eta))\,d\eta, \tag{41}$$

у якому враховано умову контакту $\sigma_r^{(2)}(\rho_2) = \sigma_r^{(1)}(\rho_2)$. Якщо знайдений з рівняння (40) вираз

$$\sigma_r^{(1)}(\rho_2) = \frac{1}{\rho_2^2}\left[-\rho_1^2 p_1 + \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\eta(\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta))\,d\eta\right]$$

підставити в рівняння (41), то прийдемо до інтегрального рівняння

$$\sigma_r^{(2)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2 p_1 + \int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\eta(\sigma^{(1)}(\eta) - \eta f^{(1)}(\eta))\,d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\rho_2}^{\rho}\eta(\sigma^{(2)}(\eta) - \eta f^{(2)}(\eta))\,d\eta\right]. \tag{42}$$

Продовжуючи аналогічно перетворення рівняння (39) при $j = 3, \ldots, n$, отримаємо такий вигляд рівняння відносно радіальних і сумарних напружень у j-му шарі:

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2 p_1 + (1 - \delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta(\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta))\,d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta(\sigma^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta))\,d\eta\right], \quad j = 1, \ldots, n. \tag{43}$$

Тут δ_{ik} – символ Кронекера. Якщо у рівнянні (43) покласти $j = n$ та $\rho = \rho_{n+1}$ і врахувати другу з граничних умов (36), то отримаємо інтегральну умову для сумарних напружень:

$$\rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\eta(\sigma^{(k)}(\eta) - \eta f^{(k)}(\eta))\,d\eta. \tag{44}$$

Проінтегруємо рівняння суцільності у напруженнях (35) для j-го шару в межах $[\rho_j, \rho]$:

$$\frac{1 - (\nu^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)}\sigma^{(j)}(\rho) - \nu^{(j)}(\rho)e_z + (1 + \nu^{(j)}(\rho))\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)) =$$

$$= \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\left[\sigma_r^{(j)}(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1 + \nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)}\right) - f^{(j)}(\eta)\frac{1 + \nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)}\right]d\eta +$$

$$+ \frac{1 - (\nu^{(j)}(\rho_j))^2}{E^{(j)}(\rho_j)}\sigma^{(j)}(\rho_j) - \nu^{(j)}(\rho_j)e_z +$$

$$+ (1 + \nu^{(j)}(\rho_j))\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho_j)), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{45}$$

В інтегральних рівняннях (45), крім невідомої сталої осьової деформації e_z, невідомими є значення сумарних напружень $\sigma^{(j)}(\rho_j)$, $j = 2,\dots,n$, на межах контакту сусідніх шарів. Виразимо їх через невідоме значення сумарного напруження $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ на внутрішній поверхні $\rho = \rho_1$. Застосуємо таку ж процедуру, як і при вираженні радіальних напружень на границях між шарами в інтегральних рівняннях (38), отриманих з рівнянь рівноваги (33) через радіальне напруження на внутрішній поверхні − відому граничну умову (36). Для цього скористаємось умовами неперервності радіальних переміщень на межах контакту шарів. Враховуючи, що $e_\varphi^{(j)} = u_r^{(j)}/\rho$, умови неперервності радіальних переміщень зводяться до умов неперервності колових деформацій $e_\varphi^{(j)}(\rho_{j+1}) = e_\varphi^{(j+1)}(\rho_{j+1})$, $j = 1,\dots,n-1$. Ці умови, виражені через сумарні та радіальні напруження, з урахуванням неперервності радіальних напружень набудуть вигляду

$$\frac{1-(\nu^{(j)}(\rho_j))^2}{E^{(j)}(\rho_j)}\sigma^{(j)}(\rho_j) = \left[\frac{1+\nu^{(j)}(\rho_j)}{E^{(j)}(\rho_j)} - \frac{1+\nu^{(j-1)}(\rho_j)}{E^{(j-1)}(\rho_j)}\right]\sigma_r^{(j-1)}(\rho_j) +$$

$$+ [\nu^{(j)}(\rho_j) - \nu^{(j-1)}(\rho_j)]e_z - [(1+\nu^{(j)}(\rho_j))\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho_j)) -$$

$$-(1+\nu^{(j-1)}(\rho_j))\Phi^{(j-1)}(T^{(j-1)}(\rho_j))] + \frac{1-(\nu^{(j-1)}(\rho_j))^2}{E^{(j-1)}(\rho_j)}\sigma^{(j-1)}(\rho_j),$$

$$j = 2,\dots,n. \tag{46}$$

Отже, процедура вираження невідомих значень $\sigma^{(j)}(\rho_j)$, $j = 2,\dots,n$, у рівняннях (45) полягатиме у послідовному підставлянні виразів (46) в інтегральне рівняння (45) із заміною $\sigma^{(j-1)}(\rho_j)$ на його вираз, отриманий з інтегрального рівняння (45):

$$\frac{1-(\nu^{(j-1)}(\rho_j))^2}{E^{(j-1)}(\rho_j)}\sigma^{(j-1)}(\rho_j) - \nu^{(j-1)}(\rho_j)e_z +$$

$$+ (1+\nu^{(j-1)}(\rho_j))\Phi^{(j-1)}(T^{(j-1)}(\rho_j)) =$$

$$= \int\limits_{\rho_{j-1}}^{\rho_j}\left[\sigma_r^{(j-1)}(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu^{(j-1)}}{E^{(j-1)}}\right) - f^{(j-1)}(\eta)\frac{1+\nu^{(j-1)}(\eta)}{E^{(j-1)}(\eta)}\right]d\eta +$$

$$+ \frac{1-(\nu^{(j-1)}(\rho_{j-1}))^2}{E^{(j-1)}(\rho_{j-1})}\sigma^{(j-1)}(\rho_{j-1}) - \nu^{(j-1)}(\rho_{j-1})e_z +$$

$$+ (1+\nu^{(j-1)}(\rho_{j-1}))\Phi^{(j-1)}(T^{(j-1)}(\rho_{j-1})). \tag{47}$$

В результаті отримаємо інтегральні рівняння

$$\frac{1-(\nu^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)}\sigma^{(j)}(\rho) = \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\left[\sigma_r^{(j)}(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)}\right) - f^{(j)}(\eta)\frac{1+\nu^{(j)}(\eta)}{E^{(j)}(\eta)}\right]d\eta +$$

$$+ (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\left[\sigma_r^{(k)}(\eta)\frac{d}{d\eta}\left(\frac{1+\nu^{(k)}(\eta)}{E^{(k)}(\eta)}\right) -\right.$$

$$- f^{(k)}(\eta)\frac{1+\nu^{(k)}(\eta)}{E^{(k)}(\eta)}\Bigg] d\eta + [\nu^{(j)}(\rho) - \nu^{(1)}(\rho_1)] e_z -$$

$$- [(1+\nu^{(j)}(\rho))\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)) - (1+\nu^{(1)}(\rho_1))\Phi^{(1)}(T^{(1)}(\rho_1))] +$$

$$+ (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\left[\frac{1+\nu^{(k+1)}(\rho_{k+1})}{E^{(k+1)}(\rho_{k+1})} - \frac{1+\nu^{(k)}(\rho_{k+1})}{E^{(k)}(\rho_{k+1})}\right]\sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) +$$

$$+ \frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{48}$$

Введемо позначення

$$\varphi^{(k)}(\rho) = \frac{1+\nu^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)}, \qquad (\varphi^{(k)}(\eta))' = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{1+\nu^{(k)}(\rho)}{E^{(k)}(\rho)}\right)\Bigg|_{\rho=\eta},$$

$$\beta^{(k)} = \varphi^{(k+1)}(\rho_{k+1}) - \varphi^{(k)}(\rho_{k+1}),$$

$$F^{(j)}(\rho) = (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta f^{(k)}(\eta)\varphi^{(k)}(\eta)\,d\eta + \int\limits_{\rho_j}^{\rho} \eta f^{(j)}(\eta)\varphi^{(j)}(\eta)\,d\eta +$$

$$+ [(1+\nu^{(j)}(\rho))\Phi^{(j)}(T^{(j)}(\rho)) - (1+\nu^{(1)}(\rho_1))\Phi^{(1)}(T^{(1)}(\rho_1))].$$

З урахуванням цих позначень рівняння (48) набудуть вигляду

$$\frac{1-(\nu^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)}\sigma^{(j)}(\rho) = \int\limits_{\rho_j}^{\rho} \sigma_r^{(j)}(\eta)(\varphi^{(j)}(\eta))'\,d\eta + \frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1) +$$

$$+ [\nu^{(j)}(\rho) - \nu^{(1)}(\rho_1)]e_z + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \sigma_r^{(k)}(\eta)(\varphi^{(k)}(\eta))'\,d\eta +$$

$$+ (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\sigma_r^{(k)}(\rho_{k+1}) - F^{(j)}(\rho), \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{49}$$

Отже, для визначення сумарних і радіальних напружень у всіх n шарах циліндра потрібно розв'язати n інтегральних рівнянь (43), n інтегральних рівнянь (49), а для визначення невідомих сталих e_z та $\sigma^{(1)}(\rho_1)$, які входять в отримані вирази для напружень, використати інтегральні умови (36) і (44). Тоді колові напруження визначаємо через сумарні і радіальні за формулами $\sigma_\varphi^{(j)} = \sigma^{(j)} - \sigma_r^{(j)}$, осьові напруження $\sigma_z^{(j)}$ та радіальні $e_r^{(j)}$ і колові $e_\varphi^{(j)}$ деформації – зі зв'язків між деформаціями та напруженнями (34′), (34″), а переміщення – з формул Коші $e_\varphi^{(j)} = u_r^{(j)}/\rho$.

Методика побудови розв'язків інтегральних рівнянь. Як бачимо, проблему визначення компонент термопружного стану розглядуваного циліндра зведено до розв'язання системи інтегральних рівнянь (43) і (49) та виконання інтегральних умов (36) і (44). Для цього застосуємо підхід, запропонований у роботах [3, 12].

Спочатку розглянемо ***порожнистий циліндр, який складається з n тонких шарів із різних матеріалів***. Під ***тонкими*** розуміємо шари такої товщини, для яких при обчисленні в інтегральних рівняннях (43) і (49) інтегралів, що містять в підінтегральних виразах $Y(\eta)$ невідомі напруження, із задовільною для нас точністю справджується формула трапецій

$$\int_{\rho_j}^{\rho} Y(\eta)\,d\eta \approx \frac{\rho-\rho_j}{2}[Y(\rho)+Y(\rho_j)]. \tag{50}$$

З рівнянь (43) і (49) при $j=1$ після використання формули (50) для обчислення інтегралів, які містять в підінтегральних виразах невідомі напруження, отримуємо рівності

$$\sigma_r^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\left\{\rho_1^2\sigma_r^{(1)}(\rho_1)+\frac{\rho-\rho_1}{2}[\rho\sigma^{(1)}(\rho)+\rho_1\sigma^{(1)}(\rho_1)]-\int_{\rho_1}^{\rho}\eta^2 f^{(1)}(\eta)\,d\eta\right\}, \tag{51}$$

$$\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho))^2}{E^{(1)}(\rho)}\sigma^{(1)}(\rho)=\frac{\rho-\rho_1}{2}[\sigma_r^{(1)}(\rho)(\varphi^{(1)}(\rho))'+\sigma_r^{(1)}(\rho_1)(\varphi^{(1)}(\rho_1))']+$$
$$+\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1)+[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)]e_z-F^{(1)}(\rho). \tag{52}$$

Підставивши вираз для радіального напруження (51) у рівність (52), отримаємо алгебричне рівняння відносно сумарного напруження $\sigma^{(1)}(\rho)$:

$$\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho))^2}{E^{(1)}(\rho)}\sigma^{(1)}(\rho)=\frac{\rho-\rho_1}{2\rho^2}\left\{\rho_1^2\sigma_r^{(1)}(\rho_1)+\frac{\rho-\rho_1}{2}[\rho\sigma^{(1)}(\rho)+\rho_1\sigma^{(1)}(\rho_1)]-\right.$$
$$\left.-\int_{\rho_1}^{\rho}\eta^2 f^{(1)}(\eta)\,d\eta\right\}(\varphi^{(1)}(\rho))'+\frac{\rho-\rho_1}{2}\sigma_r^{(1)}(\rho_1)(\varphi^{(1)}(\rho_1))'+$$
$$+\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}\sigma^{(1)}(\rho_1)+[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)]e_z-F^{(1)}(\rho). \tag{53}$$

Звідси отримуємо такий вираз для сумарного напруження у першому шарі:

$$\sigma^{(1)}(\rho)=\sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{10}^{(1)}(\rho)+e_z\gamma_{20}^{(1)}(\rho)+\gamma_{00}^{(1)}(\rho), \tag{54}$$

де

$$\gamma_{10}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}\left[\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)}+\left(\frac{\rho-\rho_1}{2}\right)^2\frac{\rho_1}{\rho^2}(\varphi^{(1)}(\rho))'\right],$$

$$\gamma_{20}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}[\nu^{(1)}(\rho)-\nu^{(1)}(\rho_1)],$$

$$\gamma_{00}^{(1)}(\rho)=-\frac{1}{\psi^{(1)}(\rho)}\left\{\frac{\rho-\rho_1}{2}\left[p_1\left((\varphi^{(1)}(\rho))'\frac{\rho_1^2}{\rho^2}+(\varphi^{(1)}(\rho_1))'\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+(\varphi^{(1)}(\rho))'\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta^2 f^{(1)}(\eta)\,d\eta\right]+F^{(1)}(\rho)\right\},$$

$$\psi^{(1)}(\rho)=\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho))^2}{E^{(1)}(\rho)}-\left(\frac{\rho-\rho_1}{2}\right)^2\frac{1}{\rho}(\varphi^{(1)}(\rho))'.$$

Радіальні напруження, отримані з формули (40) після заміни у ній сумарних напружень виразом (54), мають вигляд

$$\sigma_r^{(1)}(\rho)=\sigma^{(1)}(\rho_1)\gamma_{1r}^{(1)}(\rho)+e_z\gamma_{2r}^{(1)}(\rho)+\gamma_{0r}^{(1)}(\rho), \tag{55}$$

де

$$\gamma_{1r}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\gamma_{10}^{(1)}(\eta)\,d\eta,\qquad \gamma_{2r}^{(1)}(\rho)=\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta\gamma_{20}^{(1)}(\eta)\,d\eta,$$

$$\gamma_{0r}^{(1)}(\rho)=-\frac{\rho_1^2 p_1}{\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\int_{\rho_1}^{\rho}\eta(\gamma_{00}^{(1)}(\eta)-\eta f^{(1)}(\eta))\,d\eta.$$

У формулах (54), (55) враховано, що $\sigma_r^{(1)}(\rho_1)=-p_1$.

Виконавши подібні перетворення з кожною наступною парою рівнянь, отриманою з систем (43), (49) при $j = 2,\dots,n$, запишемо вирази для сумарних і радіальних напружень у довільному шарі циліндра:

$$\sigma^{(j)}(\rho) = \gamma_{10}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{20}^{(j)}(\rho)e_z + \gamma_{00}^{(j)}(\rho), \tag{56}$$

$$\sigma_r^{(j)}(\rho) = \gamma_{1r}^{(j)}(\rho)\sigma^{(1)}(\rho_1) + \gamma_{2r}^{(j)}(\rho)e_z + \gamma_{0r}^{(j)}(\rho), \qquad j = 1,\dots,n, \tag{57}$$

де

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{(1-\delta_{1j})\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho) + \left[\frac{1-(\nu^{(1)}(\rho_1))^2}{E^{(1)}(\rho_1)} + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{1r}^{(k)}(\eta)(\varphi^{(k)}(\eta))'\,d\eta + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\gamma_{1r}^{(k)}(\rho_{k+1})\right]\chi_1^{(j)}(\rho)\Bigg\},$$

$$\gamma_{20}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{[\nu^{(j)}(\rho) - \nu^{(j)}(\rho_j)] + (1-\delta_{1j})\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho) + \Bigg[\nu^{(j)}(\rho_j) - \nu^{(1)}(\rho_1) + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\Bigg(\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{2r}^{(k)}(\eta)(\varphi^{(k)}(\eta))'\,d\eta + \beta^{(k)}\gamma_{2r}^{(k)}(\rho_{k+1})\Bigg)\Bigg]\chi_1^{(j)}(\rho)\Bigg\},$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{[-\delta_{1j}p_1 + (1-\delta_{1j})\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)]\chi_2^{(j)}(\rho) - \frac{\rho-\rho_j}{2}(\varphi^{(j)}(\rho))' \times \frac{1}{\rho^2}\int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta^2 f^{(j)}(\eta)\,d\eta + \Bigg[(1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int\limits_{\rho_k}^{\rho_{k+1}}\gamma_{0r}^{(k)}(\eta)(\varphi^{(k)}(\eta))'\,d\eta + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\beta^{(k)}\gamma_{0r}^{(k)}(\rho_{k+1}) - F^{(j)}(\rho_j)\Bigg]\chi_1^{(j)}(\rho) - F^{(j)}(\rho) + F^{(j)}(\rho_j)\Bigg\},$$

$$\gamma_{1r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{10}^{(j)}(\eta)\,d\eta\right],$$

$$\gamma_{2r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[(1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta\gamma_{20}^{(j)}(\eta)\,d\eta\right],$$

$$\gamma_{0r}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\rho^2}\left[-\rho_1^2 p_1\delta_{1j} + (1-\delta_{1j})\rho_j^2\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j) + \int\limits_{\rho_j}^{\rho}\eta(\gamma_{00}^{(j)}(\eta) - \eta f^{(j)}(\eta))\,d\eta\right],$$

$$\chi_1^{(j)}(\rho) = 1 + \left(\frac{\rho-\rho_j}{2}\right)^2(\varphi^{(j)}(\rho))'\frac{\rho_j}{\rho^2}\frac{E^{(j)}(\rho_j)}{1-(\nu^{(j)}(\rho_j))^2},$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho) = \frac{\rho-\rho_j}{2}\left[\frac{\rho_j^2}{\rho^2}(\varphi^{(j)}(\rho))' + (\varphi^{(j)}(\rho_j))'\right],$$

$$\psi^{(j)}(\rho) = \frac{1-(\nu^{(j)}(\rho))^2}{E^{(j)}(\rho)} - \left(\frac{\rho-\rho_j}{2}\right)^2\frac{1}{\rho}(\varphi^{(j)}(\rho))', \qquad j = 1,\dots,n. \tag{58}$$

Сталі $\sigma^{(1)}(\rho_1)$ та e_z визначаємо з інтегральних умов (36) і (44). В результаті отримуємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь з двома невідомими

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)d_{11} + e_z d_{12} = c_1,$$

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)d_{21} + e_z d_{22} = c_2, \tag{59}$$

де

$$d_{11} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta\gamma_{10}^{(k)}(\eta)\,d\eta, \qquad d_{12} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta\gamma_{20}^{(k)}(\eta)\,d\eta,$$

$$d_{21} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta\nu^{(k)}(\eta)\gamma_{10}^{(k)}(\eta)\,d\eta,$$

$$d_{22} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta[\nu^{(k)}(\eta)\gamma_{20}^{(k)}(\eta) + E^{(k)}(\eta)]\,d\eta,$$

$$c_1 = \rho_1^2 p_1 - \rho_{n+1}^2 p_2 + \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta[\eta f^{(k)}(\eta) - \gamma_{00}^{(k)}(\eta)]\,d\eta,$$

$$c_2 = \frac{p}{2\pi} + \sum_{k=1}^{n} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \eta[E^{(k)}(\eta)\Phi^{(k)}(T^{(k)}(\eta)) - \nu^{(k)}(\eta)\gamma_{00}^{(k)}(\eta)]\,d\eta. \tag{60}$$

Розв'язком системи (59) є

$$\sigma^{(1)}(\rho_1) = \frac{c_1 d_{22} - c_2 d_{12}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}, \qquad e_z = \frac{c_2 d_{11} - c_1 d_{21}}{d_{11}d_{22} - d_{21}d_{12}}. \tag{61}$$

У випадку жорстко закріплених кінців циліндра $(e_z = 0)$, замість системи алгебричних рівнянь (59) будемо мати одне рівняння

$$\sigma^{(1)}(\rho_1)d_{11} = c_1. \tag{62}$$

Нехай ***циліндр виготовлено з одного термочутливого матеріалу***. Неоднорідність матеріалу по товщині такого циліндра індукується нерівномірним розподілом температури і вона буде тим істотнішою, чим більшою є зміна температури. Такий циліндр можна розглядати як складений з n шарів малої товщини (тонких шарів) із одного і того ж матеріалу. Сумарні і радіальні напруження у кожному з таких тонких шарів обчислимо за формулами (56), (57), у яких вирази $\gamma_{\alpha 0}^{(j)}$, $\alpha = 0,1,2$, значно спрощуються:

$$\gamma_{10}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{(1-\delta_{1j})\gamma_{1r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho) + \\ + \left[\frac{1-(\nu(\rho_1))^2}{E(\rho_1)} + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{1r}^{(k)}(\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta\right]\chi_1^{(j)}(\rho)\Bigg\},$$

$$\gamma_{20}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)}\Bigg\{[\nu(\rho) - \nu(\rho_j)] + (1-\delta_{1j})\gamma_{2r}^{(j-1)}(\rho_j)\chi_2^{(j)}(\rho) + \\ + \left[\nu(\rho_j) - \nu(\rho_1) + (1-\delta_{j1})\sum_{k=1}^{j-1}\int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{2r}^{(k)}(\eta)\varphi'(\eta)\,d\eta\right]\chi_1^{(j)}(\rho)\Bigg\},$$

$$\gamma_{00}^{(j)}(\rho) = \frac{1}{\psi^{(j)}(\rho)} \Bigg\{ [-\delta_{1j} p_1 + (1-\delta_{1j})\gamma_{0r}^{(j-1)}(\rho_j)]\chi_2^{(j)}(\rho) -$$

$$- \frac{\rho - \rho_j}{2\rho^2} \varphi'(\rho) \int_{\rho_j}^{\rho} \eta^2 f(\eta)\, d\eta +$$

$$+ \Bigg[(1-\delta_{j1}) \sum_{k=1}^{j-1} \int_{\rho_k}^{\rho_{k+1}} \gamma_{0r}^{(k)}(\eta)\varphi'(\eta)\, d\eta -$$

$$- F(\rho_j) \Bigg] \chi_1^{(j)}(\rho) - F(\rho) + F(\rho_j) \Bigg\},$$

де

$$\chi_1^{(j)}(\rho) = 1 + \frac{(\rho - \rho_j)^2 \rho_j}{4\rho^2} \varphi'(\rho) \frac{E(\rho_j)}{1 - (\nu(\rho_j))^2},$$

$$\chi_2^{(j)}(\rho) = \frac{\rho - \rho_j}{2} \left[\frac{\rho_j^2}{\rho^2} \varphi'(\rho) + \varphi'(\rho_j) \right],$$

$$\psi^{(j)}(\rho) = \frac{1 - (\nu(\rho))^2}{E(\rho)} - \frac{(\rho - \rho_j)^2}{4\rho} \varphi'(\rho),$$

$$\varphi(\rho) = \frac{1 + \nu(\rho)}{E(\rho)}, \qquad \varphi'(\eta) = \frac{d}{d\rho} \left(\frac{1 + \nu(\rho)}{E(\rho)} \right) \Bigg|_{\rho=\eta},$$

$$F(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho} \eta f(\eta) \varphi(\eta)\, d\eta + (1 + \nu(\rho))\Phi(T(\rho)) - (1 + \nu(\rho_1))\Phi(T(\rho_1)),$$

а вирази $\gamma_{\alpha r}^{(j)}(\rho)$, $\alpha = 0,1,2$, зберігають вигляд (58).

Якщо ж ***циліндр складений із тонких і товстих шарів*** з різних матеріалів, то сумарні і радіальні напруження в ньому обчислюємо також за формулами (56), (57), ставлячи при цьому кожному із товстих шарів у відповідність певну кількість тонких шарів з одного і того ж матеріалу.

Висновки. Розроблено методику визначення стаціонарного теплового та компонент статичного чи квазістатичного напружено-деформованого станів довгих порожнистих багатошарових циліндрів із термочутливих матеріалів, яка передбачає:

− методику побудови розв’язку нелінійної задачі теплопровідності при заданні на обмежувальних поверхнях температур, теплових потоків чи умов конвективно-променевого теплообміну у будь-яких їх комбінаціях та наявності тепловиділень/теплопоглинань у шарах і на поверхнях їх контакту. При цьому коефіцієнти теплопровідності шарів, коефіцієнти теплообміну на обмежувальних поверхнях і ступені чорноти цих поверхонь залежать від шуканої температури. В кінцевому результаті проблему зведено до розв’язання одного нелінійного алгебричного рівняння для визначення сталої інтегрування, через яку виражені всі інші невідомі сталі інтегрування. Вказано спосіб вибору початкового наближення розв’язку цього рівняння при його числовому розв’язанні. У випадку задання на одній обмежувальній поверхні температури, а на іншій − теплового потоку, отримано точні аналітичні розв’язки таких нелінійних задач теплопровідності;

− визначення компонент напружено-деформованого стану, спричиненого знайденим розподілом температури, заданими залежними від радіальної координати масовими силами та сталими нормальними навантаженнями на обмежувальних поверхнях за умов ідеального механічного контакту на поверхнях контакту сусідніх шарів зведено до розв’язання системи інтегральних рівнянь Вольтерра з інтегральними умовами для визначення невідомих сумарних напружень на внутрішній обмежувальній поверхні та сталої осьової деформації. Запропонована методика розв'язання отриманої системи інтегральних рівнянь дозволила знайти аналітичні вирази для обчислення всіх компонент напружено-деформованого стану (напружень, деформацій, переміщень) у шарах циліндра, які можуть бути як усі тонкі, так тонкі і товсті, розташовані у будь-якому порядку. Формули для обчислення компонент напружено-деформованого стану містять вирази для розподілів температури та масових сил у шарах циліндра, їх товщини, силові навантаження та функціональні залежності механічних характеристик (модулів Юнга, коефіцієнтів Пуассона та температурних коефіцієнтів лінійного розширення) матеріалів шарів від температури.

Методика застосовна також до знаходження теплового та напружено-деформованого станів багатошарових термочутливих куль, що буде змістом наступної публікації авторів.

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках наукового проекту за спільним конкурсом НАН України і РФФД (№ держреєстрації 0114U005081).

1. *Вигак В. М.* Управление температурными напряжениями и перемещениями. – Киев: Наук. думка, 1988. – 312 с.
2. *Вігак В. М.* Розв'язки одновимірних задач пружності та термопружності для циліндричних кусково-однорідних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – **40**, № 4. – С. 139–148.
   Те саме: *Vigak V. M.* Solutions of one-dimensional problems of elasticity and thermoelasticity for cylindrical piecewise-homogeneous bodies // J. Math. Sci. – 1999. – **96**, No. 2. – P. 3057–3064.
3. *Калиняк Б. М.* Аналітичні вирази для напружень і термонапружень у довгому порожнистому неоднорідному термочутливому циліндрі // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – **50**, № 2. – С. 79–86.
4. *Карслоу Г., Егер Д.* Теплопроводность твердых тел. – Москва: Наука, 1964. – 488 с.
5. *Кушнір Р. М., Попович В. С.* Про визначення усталеного термопружного стану багатошарових структур за високотемпературного нагрівання // Вісн. Київ. нац. ун-ту імені Тараса Шевченка. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2013. – № 3. – С. 42–47.
6. *Кушнір Р. М., Попович. В. С.* Термопружність термочутливих тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2009. – 412 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 3.
7. *Кушнір Р. М., Попович В. С., Ясінський А. В.* Оптимізація та ідентифікація в термомеханіці неоднорідних тіл. – Львів: СПОЛОМ, 2011. – 256 с. – Моделювання та оптимізація в термомеханіці електропровідних неоднорідних тіл / Під заг. ред. Я. Й. Бурака, Р. М. Кушніра: В 5 т. – Т. 5.
8. *Кушнір Р. М., Процюк Ю. Б.* Термопружний стан шаруватих термочутливих тіл обертання за квадратичної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 1. – С. 7–18.
   Те саме: *Kushnir R. M., Protsyuk Yu. B.* Thermoelastic state of layered thermosensitive bodies of revolution for the quadratic dependence of the heat-conduction coefficients // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 1. – P. 1–15.
9. *Кушнір Р., Процюк Ю.* Температурні поля в шаруватих тілах канонічної форми за лінійної температурної залежності коефіцієнтів теплопровідності // Машинознавство. – 2009. – № 1. – С. 13–18.
10. *Кушнір Р., Процюк Ю.* Термопружний стан шаруватих термочутливих циліндрів і куль за конвективно-променевого теплооoбіну // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 8. – С. 103–112.
11. *Попович В. С., Калиняк Б. М.* Термонапружений стан термочутливого циліндра при конвективному нагріванні // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2005. – **48**, № 2. – С. 126–136.
12. *Шевчук В. А., Калиняк Б. М.* Напружений стан циліндричних тіл з багатошаровими неоднорідними покривами // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2010. – **46**, № 6. – С. 35–41.
    Те саме: *Shevchuk V. A., Kalynyak B. M.* Stressed state of cylindrical bodies with multilayer inhomogeneous coatings // Mater Sci. – 2011. – **46**, No. 6. – P. 747–756.

13. *Azadi Mohammad, Azadi Mahboobeh.* Thermoelastic stresses in FG-cylinders // In: Heat transfer – Mathematical modelling, Numerical Methods and Information Technology / Aziz Belmiloudi (ed.). – Vienna: InTech, 2011. – 654 p. – (Chap. 11. – P. 253–270.)
14. *Ching H. K., Chen J. K.* Thermal stress analysis of functionally graded composites with temperature-dependent material properties // J. Mech. Mater. Struct. – 2007. – **2**, No. 4. – P. 633–653.
15. *Kushnir R. M., Popovych V. S.* Heat conduction problems of thermosensitive solids under complex heat exchange // In: Heat conduction – Basic research / V. S. Vikhrenko (ed.). – Rijeka: InTech (Croatia), 2011. – 350 p. – (Chap. 6. – P. 131–154.)
16. *Noda N.* Thermal stresses in materials with temperature-dependent properties // In: Thermal Stresses I / R. B. Hetnarski (ed.). – Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1986. – P. 391–483.
17. *Popovych V.* Methods for determination of the thermo-stressed state of thermosensitive solids under complex heat exchange conditions // In: R. B. Hetnarski (ed.). Encyclopedia of Thermal Stresses. – Springer, 2014. – Vol. 6. – P. 2997–3008.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИЧЕСКОГО ТЕРМОУПРУГОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ТЕРМОЧУВСТВИТЕЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ

Разработана методика получения аналитических выражений для описания осесимметричных стационарного теплового и статического или квазистатического полей напряжений и деформаций в длинных полых многослойных цилиндрах из термочувствительных материалов, на ограничивающих поверхностях которых заданы постоянные нормальные нагрузки и произвольные классические условия теплообмена. Проблема построения решения задачи теплопроводности сведена к определению одной постоянной интегрирования, через которую определяются все остальные такие же постоянные из нелинейного алгебраического уравнения, а задача термоупругости сведена к решению системы интегральных уравнений Вольтерра второго рода с соответствующими интегральными условиями. В результате применения предложенной методики решения системы интегральных уравнений получены формулы для вычисления характеристик напряженно-деформированного состояния в виде функциональных зависимостей от температуры, массовых сил, толщин слоев, поверхностных нагрузок и зависимостей механических характеристик материалов слоев от температуры.

MATHEMATICAL MODELING AND METHOD FOR DETERMINING THE STEADY THERMOELASTIC STATE IN MULTI-LAYERED THERMAL SENSITIVE CYLINDERS

The method for obtaining analytical expressions for description of axial-symmetric steady temperature field and steady or quasi-steady fields of stresses and strains in long hollow multilayered cylinders of thermal sensitive materials on the bounding surfaces of which the constant normal loading and arbitrary classical heat exchange conditions are given is developed. The construction of the solution of heat conduction problem is reduced to the determining one constant of integration via which the other constants are determined from nonlinear algebraic equation. The thermoelasticity problem is reduced to solving a system of Volterra integral equations of the second kind with corresponding integral conditions. As a result of applying the proposed method for solving the system of integral equations, formulas for calculation of the characteristics of the stress-strain state as a function of temperature, mass forces, layer thickness, surface loads and dependencies of mechanical properties of materials layers on temperature are obtained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
13.03.13