УДК 536.21

Г. Л. Горынин, Ю. В. Немировский

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ $2D$-ПЕРИОДИЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрен метод ячейковых функций, позволяющий рассчитывать температурные и тепловые поля для $2D$-периодичных композитов. Коэффициенты макротеплопроводности вычисляются как интегралы ячейковых функций, которые находятся путем решения семейства краевых задач на периодической ячейке.

Введение. Номенклатура композиционных материалов, используемых для ограждающих и несущих конструкций как в промышленности, так и в строительстве, постоянно расширяется. Особую роль среди них занимают волокнистые композиционные материалы и материалы, армированные периодическими решетками. При расчете таких конструкций на прочность в условиях теплового нагружения необходимо знать распределение температуры внутри конструкции, т. к. именно изменения температуры являются причиной дополнительных напряжений в конструкции. Решению задачи теплопроводности применительно к волокнистым композитам посвящены многие работы (см., например, монографии [2, 7, 10]). Однако, подходы, используемые в них, базируются на введении гипотез об особенностях процесса теплопроводности, при этом вопрос о правомерности таких гипотез, как правило, остается открытым. То же самое можно сказать относительно решетчатых композитов (см., например, монографии [8, 12–17]). В данной работе используется метод ячейковых функций, который позволяет в явной форме получить коэффициенты теплопроводности для макрооднородной среды [3]. Знание этих коэффициентов в дальнейшем позволяет с помощью стандартных пакетов прикладных программ определить распределение температуры в конкретной конструкции. В литературе известен метод осреднения Бахвалова [1], который также базируется на малости размеров периодической ячейки по сравнению с размерами всей конструкции и не использует гипотез. В первом приближении оба метода дают одинаковый результат. Однако Бахваловым не было получено уравнение макротеплопроводности для произвольного приближения n в общем виде, и применение его метода к приближениям более высокого порядка, чем первый, затруднено из-за слабой проработанности общей теории для приближений высоких порядков.

Основная часть. Рассмотрим тело, материал которого образован связующим и включениями, расположенными периодически в плоскости Oxy (рис. 1), на которое действуют какие-либо тепловые нагрузки. Тогда внутри тела должно выполняться стационарное уравнение теплового равновесия:

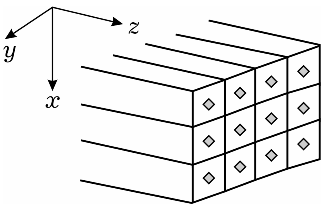


Рис. 1. Волокнистая среда.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = -Q\,, \tag{1}$$

где Q – объемные источники тепла, q_α – компоненты вектора теплового потока внутри среды. На границе перехода от одного материала к другому должны быть непрерывны тепловой поток и температура:

$$[q_n] = 0, \qquad [T] = 0, \qquad \alpha = \{x, y, z\}. \tag{2}$$

Внутри среды действует анизотропный закон теплопроводности Фурье, содержащий шесть независимых коэффициентов теплопроводности $\lambda_{\alpha\beta}$ [14]:

$$q_\alpha = -\sum_{\beta\in\{x,y,z\}} \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial\beta}, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{3}$$

Пусть h – линейный размер периодической ячейки вдоль осей Ox и Oy, L – характерный размер тела, T_* и λ_* – характерные значения температуры и коэффициента теплопроводности. Перейдем к безразмерным переменным и функциям, для простоты не меняя их обозначений:

$$x\leftrightarrow\frac{x}{L},\qquad y\leftrightarrow\frac{y}{L},\qquad z\leftrightarrow\frac{z}{L},\qquad T\leftrightarrow\frac{T}{T_*},\qquad \lambda_{\alpha\beta}\leftrightarrow\frac{\lambda_{\alpha\beta}}{\lambda_*},$$

$$q_\alpha\leftrightarrow\frac{q_\alpha}{q_*},\qquad Q\leftrightarrow\frac{Qh}{q_*},\qquad q_*=\frac{\lambda_* T_*}{h}. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать, что отношение размера периодической ячейки среды к характерному размеру тела является малым параметром, который обозначим буквой ε:

$$\varepsilon=\frac{h}{L}\ll 1. \tag{5}$$

Уравнение (1) и закон теплопроводности (3) в новых переменных примут вид

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}\varepsilon+\frac{\partial q_y}{\partial y}\varepsilon+\frac{\partial q_z}{\partial z}\varepsilon=-Q, \tag{6}$$

$$q_\alpha = -\sum_{\beta\in\{x,y,z\}} \lambda_{\alpha\beta}\frac{\partial T}{\partial\beta}\varepsilon, \qquad \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{7}$$

Внутри каждой периодической ячейки вводятся свои ячейковые координаты ξ_x, ξ_y:

$$x=x_i+\xi_x\varepsilon,\qquad y=y_j+\xi_y\varepsilon,\qquad \xi_x,\xi_y\in[0,1], \tag{8}$$

где x_i, y_i – координаты вершины i-го периодического квадрата. Коэффициенты теплопроводности 2-периодической среды являются функциями только ячейковых координат ξ:

$$\lambda_{\alpha\beta}=\lambda_{\alpha\beta}(\xi_x,\xi_y),\qquad \alpha,\beta\in\{x,y,z\}. \tag{9}$$

С учетом равенств (8) оператор частного дифференцирования запишем как

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}=\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha},\qquad \alpha\in\{x,y\}. \tag{10}$$

Задача (1)–(3) с учетом выражения (10) принимает вид:

– *уравнение теплового равновесия*

$$\frac{\partial q_x}{\partial x}\varepsilon+\frac{\partial q_y}{\partial y}\varepsilon+\frac{\partial q_z}{\partial z}\varepsilon+\frac{\partial q_x}{\partial\xi_x}+\frac{\partial q_y}{\partial\xi_y}=-Q; \tag{11}$$

– *условие на границе перехода от одного материала к другому*

$$[q_n]=0,\qquad [T]=0,\qquad \alpha=\{x,y,z\}; \tag{12}$$

– *закон теплопроводности*

$$q_\alpha = -\sum_{\beta\in\{x,y\}} \lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial T}{\partial\beta}\varepsilon+\frac{\partial T}{\partial\xi_\beta}\right)+\lambda_{\alpha z}\frac{\partial T}{\partial z}\varepsilon,\qquad \alpha\in\{x,y,z\}. \tag{13}$$

Для решения задачи (11)–(13) используем метод асимптотического расщепления, который был разработан в работе [6] и который является результативным для широкого класса задач (см., например, [5]), но применительно к периодическим средам получил название метода ячейковых функций [3, 4]. Для этого представим асимптотические приближения температуры и компонент теплового потока, как суммы частных дифференциальных операторов, коэффициенты которых зависят только от ячейковых переменных:

$$T^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \Psi^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \varepsilon^k\right),$$

$$q_\alpha^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} K_\alpha^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) \frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \varepsilon^k\right), \tag{14}$$

где использованы следующие обозначения:

$$\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}} = \partial x^{k_x} \partial y^{k_y} \partial z^{k_z},$$

$$\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z) = k_x \mathbf{e}_x + k_y \mathbf{e}_y + k_z \mathbf{e}_z, \quad |\mathbf{k}| = k = k_x + k_y + k_z,$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z,$$

$$\boldsymbol{\xi} = (\xi_x, \xi_y) = \xi_x \mathbf{e}_x + \xi_y \mathbf{e}_y.$$

Считаем, что объемные источники тепла имеют расщепленный вид относительно переменных макросреды и ячейковых переменных:

$$Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) = æ(\boldsymbol{\xi}) Q_0(\mathbf{r}), \tag{15}$$

причем равнодействующая сомножителя, зависящего от быстрых переменных, на ячейке равняется единице:

$$\int_0^1\int_0^1 æ(\boldsymbol{\xi})\, d\xi_x\, d\xi_y = 1. \tag{16}$$

В дальнейшем интеграл от какой-то величины по ячейковым переменным, взятый по всей ячейке, будем называть осреднением этой величины по ячейке и обозначать как

$$\langle \_ \rangle = \int_0^1\int_0^1 \_\, d\xi_x\, d\xi_y. \tag{17}$$

Из равенств (15), (16) следует, что функция Q_0 имеет физический смысл среднего значения теплового источника на ячейке, т. е. это тепловой источник макросреды:

$$Q_0(\mathbf{r}) = \langle Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \rangle. \tag{18}$$

Представим тепловой источник макросреды как сумму степеней дифференциальных операторов от температуры макросреды:

$$Q_0(\mathbf{r}) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \Lambda^{\mathbf{k}} \frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}} \varepsilon^k\right), \quad \alpha \in \{x, y, z\}, \tag{19}$$

где $\Lambda^{\mathbf{k}}$ – некоторые константы с векторным верхним индексом, которые будут определены позднее.

Подставив формулы (14), (15) и (19) в равенства (11)–(13) и приравняв коэффициенты при одинаковых дифференциальных операторах, получим систему уравнений в частных производных на неизвестные ячейковые функции:

– *уравнение теплового равновесия ячейки*

$$\frac{\partial K_x^{\mathbf{k}}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial K_y^{\mathbf{k}}}{\partial \xi_y} + K_x^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_x} + K_y^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_y} + K_z^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_z} = -\text{æ}(\boldsymbol{\xi})\Lambda^{\mathbf{k}}; \tag{20}$$

– *закон теплопроводности внутри периодической ячейки*

$$K_\alpha^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{\beta\in\{x,y\}} \lambda_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial \Psi^{\mathbf{k}}}{\partial \xi_\beta} + \Psi^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_\beta}\right) - \lambda_{\alpha z}\Psi^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_z}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}; \tag{21}$$

– *условия сопряжения тепловых потоков и температур внутри ячейки*

$$[K_n^{\mathbf{k}}] = 0, \qquad [\Psi^{\mathbf{k}}] = 0; \tag{22}$$

– *условия периодичности ячейковых функций*

$$\Psi^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha=0} = \Psi^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha=1},$$

$$K_\alpha^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha=0} = K_\alpha^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha=1}, \qquad \alpha \in \{x, y, z\}. \tag{23}$$

Равенства (20)–(23) для каждого фиксированного целочисленного вектора $\mathbf{k}$ представляют собой краевую эллиптическую задачу на нахождение периодических ячейковых функций $\Psi^{\mathbf{k}}$. Необходимое условие разрешимости этой задачи имеет вид:

$$\Lambda^{\mathbf{k}} = -\left\langle K_x^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_x} + K_y^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_y} + K_z^{\mathbf{k}-\mathbf{e}_z} \right\rangle. \tag{24}$$

При $k = 0$ решение задачи (20)–(24) имеет очевидное решение:

$$\Psi^{\mathbf{0}} = 1, \qquad K_\alpha^{\mathbf{0}} = 0, \qquad \alpha = \{x, y, z\}. \tag{25}$$

Тогда из (24) следует равенство

$$\Lambda^{\mathbf{k}} = 0, \qquad |\mathbf{k}| = 1. \tag{26}$$

Равенство (19) с учетом (26) имеет вид

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \Lambda^{\mathbf{k}} \frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}}\varepsilon^k\right) = Q_0(\mathbf{r}). \tag{27}$$

Это равенство представляет собой уравнение макротеплопроводности для $(n-1)$-го приближения температуры макросреды $T_0^{(n)}$. (Первое приближение имеет место при $n = 2$). Оно является уравнением в частных производных порядка n, теория таких уравнений рассмотрена в [6], в частности, из нее следует, что асимптотический смысл имеют не все решения этого уравнения, а только часть из них, регулярно зависящая от малого параметра ε, а это означает, что данное уравнение имеет ноуменальный порядок, равный двум.

Формулы (14) с учетом равенств (25) принимают вид

$$T^{(n)} = T_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} \Psi^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}}\varepsilon^k\right),$$

$$q_\alpha^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{k_x+k_y+k_z=k} K_\alpha^{\mathbf{k}}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^k T_0^{(n)}}{\partial \mathbf{r}^{\mathbf{k}}}\varepsilon^k\right), \tag{28}$$

эти равенства позволяют определять температуру и компоненты теплового потока в периодической среде на основе решений уравнения (27) и краевых задач (20)–(24).

Величина $T_0^{(n)}$ имеет физический смысл среднего значения распределения температуры на ячейке, т. е. эта величина является температурой однородной макросреды:

$$T_0^{(n)} = \left\langle T^{(n)}(\mathbf{r}, \boldsymbol{\xi}) \right\rangle. \tag{29}$$

Наибольший интерес в любой асимптотической теории представляют самые первые приближения, в данном случае это $n = 2$. Осредним вектор теплового потока (28) при $n = 2$ и рассмотрим его первое приближение. В дальнейшем верхние индексы, указывающие на номер асимптотического приближения, в целях упрощения записи опускаем:

$$\tilde{q}_\alpha = \sum_{\varphi \in \{x,z,y\}} \left\langle K_\alpha^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} \varepsilon, \qquad \alpha = \{x, y, z\}. \tag{30}$$

Можно показать, что этот вектор удовлетворяет следующему уравнению теплового баланса:

$$\frac{\partial \tilde{q}_x}{\partial x} \varepsilon + \frac{\partial \tilde{q}_y}{\partial y} \varepsilon + \frac{\partial \tilde{q}_z}{\partial z} \varepsilon = -Q_0. \tag{31}$$

В уравнении (31) справа стоит тепловой источник макросреды, вектор $\tilde{q}_\alpha$ зависит только от переменных макросреды, поэтому можно считать, что вектор $\tilde{q}_\alpha$ – это вектор теплового потока в однородной макросреде, а уравнение (30) – это закон теплопроводности в макросреде. Этот закон может быть переписан в следующем виде:

$$\tilde{q}_\alpha = -\sum_{\varphi \in \{x,z,y\}} \tilde{\lambda}_{\alpha\varphi} \frac{\partial T_0}{\partial \varphi} \varepsilon, \tag{32}$$

где $\tilde{\lambda}_{\alpha\varphi}$ – коэффициенты теплопроводности макросреды (коэффициенты макротеплопроводности), они рассчитываются на основе решений данных ячейковых краевых задач:

$$\tilde{\lambda}_{\alpha\varphi} = -\left\langle K_\alpha^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi}) \right\rangle, \qquad \alpha, \varphi \in \{x, y, z\}. \tag{33}$$

Для расчета коэффициентов теплопроводности макросреды необходимо решить следующие три краевые задачи на ячейке:

– *уравнение*

$$\frac{\partial K_x^{\mathbf{e}_\varphi}}{\partial \xi_x} + \frac{\partial K_y^{\mathbf{e}_\varphi}}{\partial \xi_y} = 0, \qquad \varphi = \{x, y, z\}; \tag{34}$$

– *закон теплопроводности на ячейке*

$$K_\alpha^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{\beta \in \{x,y\}} \lambda_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial \Psi^{\mathbf{e}_\varphi}}{\partial \xi_\beta} + \delta_\beta^\varphi \right) - \lambda_{\alpha z} \delta_\alpha^\varphi, \qquad \alpha \in \{x, y\}; \tag{35}$$

– *условие непрерывности на границах раздела матрицы и включений*

$$[K_n^{\mathbf{e}_\varphi}] = 0, \qquad [\Psi^{\mathbf{e}_\varphi}] = 0, \qquad \varphi = \{x, y, z\}; \tag{36}$$

– *условие периодичности ячейковых функций*

$$\Psi^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha = 0} = \Psi^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha = 1},$$

$$K_\alpha^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha = 0} = K_\alpha^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi})\Big|_{\xi_\alpha = 1}, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{37}$$

Ячейковая функция $K_z^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi})$ находится прямым вычислением на основе решения краевых задач (34)–(37):

$$K_z^{\mathbf{e}_\varphi}(\boldsymbol{\xi}) = -\sum_{\beta\in\{x,y\}} \lambda_{z\beta}\left(\frac{\partial\Psi^{\mathbf{e}_\varphi}}{\partial\xi_\beta} + \delta_\beta^\varphi\right) - \lambda_{zz}\delta_\alpha^\varphi, \qquad \alpha \in \{x, y\}. \tag{38}$$

В частном и наиболее распространенном случае, когда и связующее и включения являются ортотропными средами, причем одна из осей ортотропии направлена перпендикулярно плоскости периодичности, краевая задача (34)–(37) при $\varphi = z$ имеет тождественно нулевое решение и выражение для коэффициента теплопроводности макросреды $\tilde{\lambda}_{zz}$ (33) с учетом равенства (38) принимает вид вычислительной формулы:

$$\tilde{\lambda}_{zz} = \langle \lambda_{zz} \rangle. \tag{39}$$

Формула (39) означает, что в направлении, перпендикулярном плоскости периодичности ячеек, коэффициент теплопроводности макросреды равен среднему значению коэффициентов на периодической ячейке. Такое правило вычисления макрохарактеристики называют правилом простой смеси. Формула (39) для двухсоставных материалов может быть переписана в другом виде:

$$\tilde{\lambda}_{zz} = \frac{\lambda_B S_B + \lambda_C S_C}{S_B + S_C}, \tag{40}$$

где λ_B, λ_C – коэффициенты теплопроводности волокна и связующего; S_B, S_C – площадь включения и связующего в ячейке. Другим распространенным правилом вычисления макрохарактеристики для двухфазных сред является правило обратной смеси [3, 7]

$$\lambda_{\mathrm{rm}} = \frac{\lambda_B \lambda_C (S_B + S_C)}{\lambda_C S_B + \lambda_B S_C}. \tag{41}$$

Это правило будет использовано для сравнения при анализе полученных результатов.

Расчеты и их анализ.

Волокнистые среды. Для определения коэффициентов теплопроводности волокнистой макросреды решается краевая задача (34)–(37) с помощью метода конечных элементов. Расчеты производятся для ячейки, заполненной двумя материалами с разными значениями коэффициента теплопроводности: материалом связующего и материалом волокна. Теплопроводность связующего равна 1, а теплопроводность включения (волокна) равна 0.01 в безразмерных единицах, этим цифрам примерно соответствуют железо и керамика. Для исследования влияния формы поперечного сечения волокна на значение макрохарактеристики в расчетах использовались волокна разной поперечной формы: квадрат, крестовина, трубчатое, круг (рис. 2). Значения макротеплопроводности в направлении осей OX и OY, лежащих в плоскости перпендикулярной волокну, совпадают и определяются посредством численного счета, макротеплопроводность в направлении оси OZ определяется по формуле простой смеси (40).

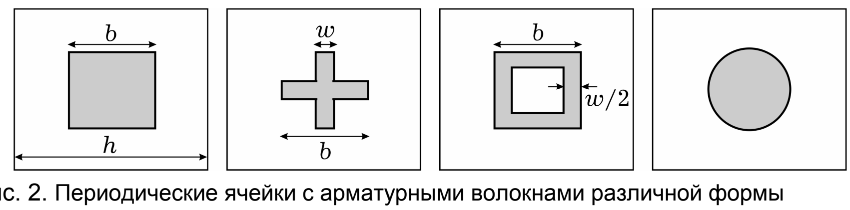


Рис. 2. Периодические ячейки с арматурными волокнами различной формы поперечных сечений.

На рис. 3 представлены графики зависимости макротеплопроводности от отношения площади включения к площади ячейки. Кривая *1* вычислена по правилу смеси (40), *2* – по правилу обратной смеси (41), *3* – график для квадратного сечения, кривая *4* – для трубчатого сечения, *5* – для крестовины. Кривые для всех включений лежат в промежутке между кривыми *1* и *2*. Расчеты для волокна круглого сечения не приведены, т. к. они с точностью до 1 % совпадают с расчетами для волокна квадратного сечения.

Отклонения численных расчетов от расчетов по правилу смеси весьма существенны: в случае квадрата – до 40 %, в случае трубчатого сечения – до 60 %. При одинаковой площади волокна разница между макротеплопроводностями для трубчатого и квадратного волокон весьма существенна. Макротеплопроводность зависит от площади нелинейно, например, в случае трубчатого сечения при относительной площади, равной 0.3, дальнейшее её увеличение не приводит к изменению макротеплопроводности.

На рис. 4 сравниваются численные расчеты с имеющимися аналитическими формулами расчета макрохарактеристик, формулами Хашина – Штрикмана и формулами Ванина для круглых волокон:

$$\lambda_{\text{Cha-Sht}} = \lambda_C \left[1 + \frac{c}{\lambda_C/(\lambda_B + \lambda_C) + (1-c)/2} \right], \qquad c = \frac{S_B}{S}, \tag{42}$$

где S – площадь всей ячейки;

$$\lambda_{\text{Van}} = \lambda_0 \left[1 - 48 \frac{\lambda_0}{\lambda_C} \left(\frac{1 - \lambda_B/\lambda_C}{(1-c) + (1+c)\lambda_B/\lambda_C} \right)^2 \times \right.$$

$$\left. \times \frac{\sin^2(\pi/2)}{\pi^4} \left(c^2 - c^8 \left\{ \frac{1 - \lambda_B/\lambda_C}{1 + \lambda_B/\lambda_C} \right\}^2 \right) \right],$$

$$\lambda_0 = \lambda_C \left[\frac{1 + c + (1-c)\lambda_C/\lambda_B}{1 - c + (1+c)\lambda_C/\lambda_B} \right]. \tag{43}$$

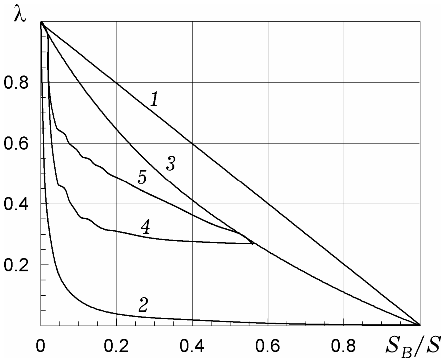


Рис. 3. Сравнение макротеплопроводностей для включений различной формы.

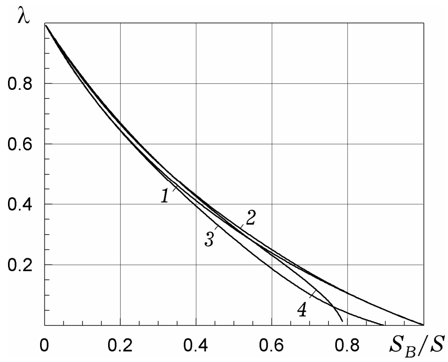


Рис. 4. Сравнение численного решения (кривая *1* – для квадратного сечения, *4* – для круглого) и по аналитическим формулам (42) и (43) (кривая *2* и кривая *3*).

При относительной площади, меньше 0.4, отклонение не превосходит 10 % и фактически может использоваться для подсчета характеристик любая из этих формул. Дальнейшее увеличение площади включения приводит к существенному росту разницы: для формулы Ванина вплоть до 30 %, а для формулы Хашина – Штрикмана – до 100 %.

Окончательно можно сделать следующий вывод. При небольшой разнице между теплопроводностями волокна и связующего или при достаточно малом размере волокна значения макротеплопроводности в поперечном направлении могут быть рассчитаны при помощи правила простой смеси. Если же размеры включения велики или разность теплопроводностей велика, то в этих случаях правило смеси дает ошибки, превышающие 100 %.

Решетчатые структуры. Рассмотрим 2-периодическую среду, состоящую из решетки, выполненной из одного материала, и связующего, заполняющим собой все оставшееся пространство (рис. 5). Решетка выполнена из изотропного алюминиевого сплава $\lambda = 146.538$ Вт/(мК), а в качестве связующего применяется пенопластмасса марки ПХВ-1 $\lambda = 0.030238$ Вт/(мК). Этот пример взят из работы А. П. Янковского [11], который рассчитывает макрохарактеристики теплопроводности с помощью двух методов: статического и кинематического. Каждый из методов является гипотетическим и базируется на введении своих шести гипотез. Оказалось, что по обеим моделям Янковского коэффициенты λ_{xx} и λ_{yy} не равны друг другу.

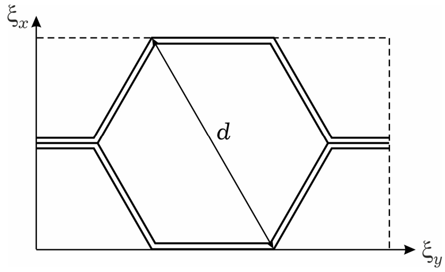
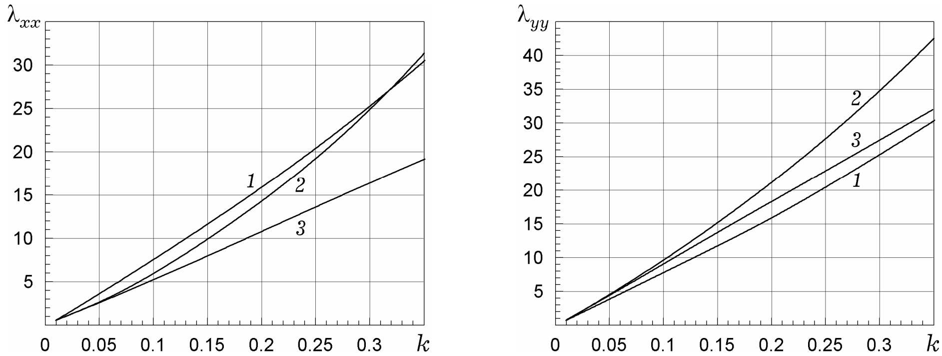


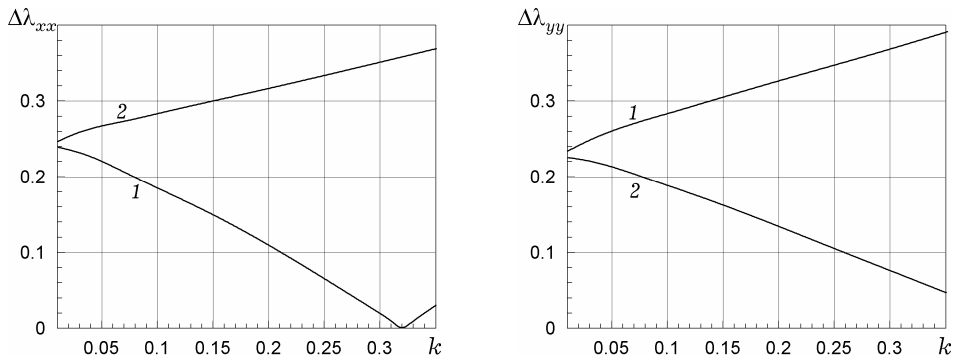
Рис. 5. Ячейка периодической решетки.

Однако расчеты, выполненные по методу ячейковых функций, представленному в данной работе, показали, что эти коэффициенты для данной решетки в точности совпадают. Результаты представлены на рис. 6 в зависимости от процента армирования периодической решетки. Относительное отклонение указанных коэффициентов макротеплопроводности от соответствующих коэффициентов, рассчитанных по методу ячейковых функций, представлены на рис. 7.



а) *б*)

Рис. 6. Зависимости коэффициентов макротеплопроводности λ_{xx} и λ_{yy} от коэффициента (процента) армирования для периодической решетки (рис. 5), рассчитанные: по методу данной работы – кривые *1*, по статическому методу из [11] – кривые *2*, по кинематическому методу из [11] – кривые *3*.



а) *б*)

Рис. 7. Зависимости относительных отклонений коэффициентов макротеплопроводности $\Delta\lambda_{xx}$ и $\Delta\lambda_{yy}$ в сравнении с коэффициентами, вычисленными по методу данной работы, от коэффициента (процента) армирования периодической решетки (рис. 5), рассчитанные: по статическому методу из [11] – кривые *1*, по кинематическому методу из [11] – кривые *2*.

При малом коэффициенте армирования (а Янковский рассматривал свой пример при величине этого коэффициента, равной 0.019) разница по обоим методам составляет $23-25\,\%$. Причем оказалось, что при увеличении коэффициента армирования ошибка, даваемая статическим методом, для коэффициента λ_{xx} уменьшается, а ошибка, даваемая кинематическим методом, возрастает. Для коэффициента же λ_{yy} все обстоит наоборот: при увеличении коэффициента армирования ошибка, даваемая статическим методом, возрастает, а ошибка, даваемая кинематическим методом, убывает. Следует сказать, что для структур армирования, которые не замкнуты, т. е. которые можно условно назвать разорванными решетками, методы работы [11] дают результаты, погрешность которых составляет сотни процентов, и, следовательно, являются неприменимыми.

Заключение. Разработанный авторами метод ячейковых функций для анализа разнообразных процессов в периодических средах применён для исследования теплопроводности $2D$-периодических композитных анизотропных материалов. Метод позволяет с единых позиций без использования каких-либо дополнительных гипотез определять осредненные характеристики теплопроводности и исследовать особенности распределения тепловых полей в комбинированных композитных структурах с различными геометрическими формами включений. Изучено влияние относительной площади и геометрической формы поперечных сечений включения на осредненные характеристики теплопроводности композита. Приведены сравнительные расчеты с характеристиками, получаемыми на основе иных теоретических подходов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14-01-90400 Укр_а.

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Ванин Г. А.* Микромеханика композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1985. – 304 с.
3. *Горынин Г. Л., Власко А. Ф.* Математическое моделирование упругих макрохарактеристик для волокнистых материалов при расчете конструкций транспортных сооружений // Вестн. Сиб. гос. автомоб.-дорожн. акад. – 2013. – Вып. 1 (29). – С. 58–64.
4. *Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.* Метод асимптотического расщепления для упругой 3-периодической среды // Современные проблемы прикладной математики и механики: теория, эксперимент и практика [Электронный ресурс] / Междунар. конф, посвященная 90-летию со дня рождения акад. Н. Н. Яненко (Новосибирск, Россия, 30 мая – 4 июня 2011), Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2011.
5. *Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.* Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках // Мат. методи та фiз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 2. – С. 144–155.
   То же: *Gorynin G. L., Nemirovskii Yu. V.* Method of rigidity functions in problems of computation of multilayer bars under temperature loads // J. Math. Sci. – 2013. – **192**, No. 6. – P. 650–663.
6. *Горынин Г. Л., Немировский Ю. В.* Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления. – Новосибирск: Наука, 2004. – 408 с.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов / Под. ред. Ю. М. Тарнопольского. – Москва: Мир, 1982. – 334 с.
   То же: *Christensen R. M.* Mechanics of composite materials. – New York: Wiley, 1979. – 348 p.
8. *Немировский Ю. В., Янковский А. П.* Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций. – Новосибирск: Арт-Авеню, 2008. – 511 с.
9. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
   То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
10. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – Москва: Наука, 1977. – 400 с.

11. *Янковский А. П.* Определение эффективных коэффициентов теплопроводности ребристо-армированных пенопластмасс на основе энергетического критерия эквивалентности // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2011. – **54,** № 1. – С. 220–231.

    То же: *Yankovskii A. P.* Determination of the effective coefficients of thermal conductivity of rib-reinforced polyfoams on the basis of the energy criterion of equivalence // J. Math. Sci. – 2012. – **183**, No. 2. – P. 261–273.
12. *Dasgupta A., Agarwal R. K.* Orthotropic thermal conductivity of plain-weave fabric composites using a homogenization technique // J. Compos. Mater. – 1992. – **26**, No. 18. – P. 2736–2758.
13. *Hasselman D. P. H., Donaldson K. Y., Thomas J. R.* Effective thermal conductivity of uniaxial composites with cylindrically orthotropic carbon fibers and interfacial thermal barrier // J. Compos. Mater. – 1993. – **27**, No. 6. – P. 637–644.
14. *Hasselman D. P. H., Johnson L. F.* Effective thermal conductivity of composites with interfacial thermal barrier resistance // J. Compos. Mater. – 1987. – **21**, No. 6. – P. 508–515.
15. *Schuster J., Heider D., Sharp K., Glowania M.* Measuring and modeling the thermal conductivities of three-dimensionally woven fabric composites // Mech. Compos. Mater. – 2009. – **45**, No. 2. – P. 165–174.
16. *Thomann U. I., Sauter M., Ermanni P.* A combined impregnation and heat transfer model for stamp forming of unconsolidated commingled yarn performs // Compos. Sci. Technol. – 2004. – **64**, No. 10–11. – P. 1637–1651.
17. *Turias I. J., Guttiérrez J. M., Galindo P. L.* Modelling the effective conductivity of a unidirectional composite by the use artificial neural networks // Compos. Sci. Technol. – 2005. – **65**, No. 3–4. – P. 609–619.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДЛЯ $2D$-ПЕРІОДИЧНИХ АНІЗОТРОПНИХ КОМПОЗИТНИХ МАТЕРІАЛІВ

Розглянуто метод коміркових функцій, який дозволяє розраховувати температурні і теплові поля для $2D$-періодичних композитів. Коефіцієнти макротеплопровідності обчислюються як інтеграли коміркових функцій, які знаходяться шляхом розв'язання сім'ї крайових задач на періодичній комірці.

MATHEMATICAL MODELING OF HEAT CONDUCTION PROCESS FOR $2D$-PERIODIC ANISOTROPIC COMPOSITE MATERIALS

The method of cell functions, which allows to calculate the temperature and thermal field for $2D$-periodic composites is considered. The coefficients of macro-thermal conductivity are calculated as integrals of cell functions which are found by solving the family of boundary problems on the periodic cell.

[1] Сургут. гос. ун-т, Сургут, Россия,
[2] Ин-т теорет. и прикл. механики им. С. А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено 27.12.13