

**ПРОДОЛЬНО-ИЗГИБНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ.  
УТОЧНЕННАЯ МОДЕЛЬ**

*Решена задача о связанных колебаниях клеевого нахлесточного соединения двух стержней. Соединительный слой моделируется многопараметрическим упругим основанием, внешние слои рассматриваются как балки Тимошенко. Этот подход с высокой точностью описывает напряженное состояние соединительного слоя и позволяет удовлетворить краевым условиям на его свободной границе. Решена модельная задача и проведено сравнение с расчетами по классической методике.*

**Введение.** Существует несколько математических моделей нахлесточного клеевого соединения, позволяющих получить аналитическое решение задачи [2]. Математические модели соединений развиты на произвольное число слоев, на соединения с законцовками, с трещинами в клее. Модель трехслойной балки с двумя несущими слоями и соединительным слоем применяется также для расчета подкрепленных балок в строительных конструкциях [14] и для расчета сэндвич-панелей [11].

В классических моделях нахлесточного соединения Фолькерсена, Голанда и Рейсснера касательные напряжения в клее достигают максимума на краях соединения, что физически невозможно, поскольку внешний край соединительного слоя имеет свободную границу. Чтобы исключить такое противоречие, в работе [1] предложено считать нормальные напряжения в клее линейно изменяющимися по толщине шва, а касательные напряжения – постоянными по толщине. В работе [15] для исключения описанного выше противоречия предложено для описания напряженного состояния соединительного слоя использовать трехпараметрическую модель упругого основания. Теория упругих оснований разработана в работах В. З. Власова, П. Л. Пастернака [3], М. М. Филоненко-Бородича. Исследовать напряженное состояние в клеевом слое экспериментальными методами затруднительно ввиду малой толщины клея, однако известно, что разрушение начинается у концов соединения. Поэтому уточнение напряженного состояния в клеевом слое в окрестности этой зоны является актуальной задачей.

Естественным развитием задачи о напряженном состоянии соединения являются задачи динамики. Решения задачи о собственных продольно-изгибных колебаниях соединения, построенные по модели Голанда – Рейсснера и ее модификаций, представлены в работах [5–8, 10, 13].

Динамическая модель Голанда – Рейсснера может быть упрощена. Если, например, допустить, что соединительный слой абсолютно податлив на сдвиг, то вследствие этого продольные и поперечные колебания балок станут независимыми. Следовательно, требуется рассмотреть только поперечные колебания упруго- (или вязкоупруго-) связанных балок. Этот подход реализован, в частности, в работе [9], где также приведен обширный обзор литературы по указанной модели. Еще один способ упростить задачу состоит в том, что соединительный слой полагается абсолютно жестким на растяжение-сжатие и податливым только на сдвиг [4]. Вследствие этого поперечные перемещения несущих слоев станут одинаковыми. Следовательно, краевые условия для обоих слоев в этом случае также должны накладываться одинаковыми, что сужает область применения этого подхода.

Напряженное состояние соединения при динамических нагрузках исследуется также экспериментальными [12] и численными методами.

Целью данной работы является развитие и уточнение модели [15] и её обобщение на динамические задачи. Отличие рассматриваемого подхода от описанных в литературе, посвященной решению динамических задач для

нахлесточных соединений, состоит в том, что для описания несущих слоев используется модель балки Тимошенко (а не Эйлера – Бернулли), а для описания клеевого слоя – многопараметрическая модель упругого основания (а не основания Винклера). В работе решена модельная задача и проведено сравнение результатов вычислений с расчетом по классической модели Голанда – Рейсснера и экспериментом [5]. Показано, что модель Голанда – Рейсснера [5, 6, 10, 12] дает заниженные значения максимальных нормальных напряжений в клее по сравнению с предложенной моделью.

**Постановка задачи.** Рассмотрим составную балку, изображенную на рис. 1. Цифрами 1–4 на рис. 1 обозначены номера участков. Начало координат находится в середине области склейки.

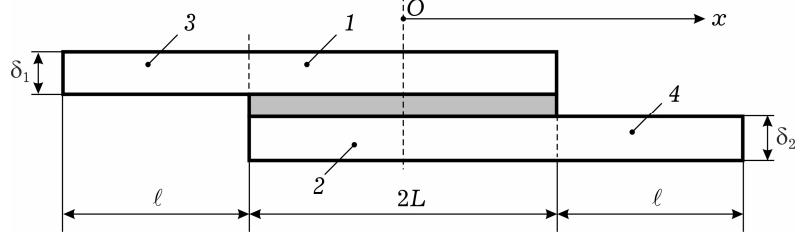


Рис. 1

Добавив силы инерции в уравнения равновесия [15], получим

$$\frac{\partial N_k}{\partial x} + (-1)^k \tau = \rho_k \delta_k \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial Q_k}{\partial x} + (-1)^k \sigma_k = \rho_k \delta_k \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial M_k}{\partial x} + \frac{\delta_k}{2} \tau - Q_k = J_k \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\delta_0}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Здесь  $N_k$ ,  $Q_k$ ,  $M_k$  – продольные, поперечные усилия и погонный изгибающий момент в  $k$ -м несущем слое;  $\tau$  – касательные напряжения в клеевом слое (постоянные по толщине клея);  $\sigma_k$  – нормальные напряжения на границе между клеем и  $k$ -м несущим слоем;  $\rho_k$  – плотность  $k$ -го несущего слоя;  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  – толщина первого и второго несущего слоев;  $\delta_0$  – толщина клеевого слоя;  $u_k$ ,  $w_k$ ,  $\varphi_k$  – соответственно продольные, поперечные перемещения и угол поворота сечения  $k$ -го несущего слоя;  $J_k$  – момент инерции поперечного сечения  $k$ -го несущего слоя для однородного по толщине материала,  $J_k = \delta_k^3 \rho_k / 12$ .

Запишем соотношения теории упругости для балок

$$\frac{\partial u_k}{\partial x} = \frac{N_k}{B_k}, \quad D_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = M_k, \quad \frac{\partial w_k}{\partial x} + \varphi_k = \frac{Q_k}{H_k}. \quad (3)$$

Здесь  $B_k$ ,  $D_k$ ,  $H_k$  – соответственно жесткости на растяжение-сжатие, изгиб и сдвиг, которые для однородных по толщине слоев определяются как  $B_k = E_k \delta_k$ ,  $D_k = \delta_k^3 E_k / 12$ ,  $H_k = 5G_k \delta_k / 6$ , где  $E_k$  – модули упругости,  $G_k$  – модули сдвига внешних слоев.

Соединительный слой моделируем многопараметрическим упругим основанием с использованием мембранной интерпретации М. М. Филоненко-Бородича, т. е. клеевой слой рассматриваем как мембрану, которая проходит в серединной плоскости клеевого слоя (поперечные перемещения  $w_0$ ), между которой и несущими слоями расположены упругие элементы [15]. Касательные напряжения в клеевом слое определяем как

$$\tau = \frac{G_0}{\delta_0} \left( u_1 - u_2 - \frac{\delta_1}{2} \varphi_1 - \frac{\delta_2}{2} \varphi_2 \right) + G_0 \frac{\partial w_0}{\partial x}, \quad (4)$$

где  $G_0$  – модуль сдвига клея.

Нормальные напряжения на границе несущих слоев вычисляем по двухпараметрической модели упругого основания [3]:

$$\sigma_k = (-1)^k K_1 (w_0 - w_k) - (-1)^k K_2 \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_k}{\partial x^2} \right), \quad (5)$$

где  $K_1$ ,  $K_2$  – первый и второй коэффициенты постели,  $K_1 = 2E_0[\delta_0(1 - \mu_0^2)]^{-1}$ ;  $K_2 = E_0\delta_0[12(1 + \mu_0)]^{-1}$  [3]. Здесь  $E_0$  и  $\mu_0$  – модуль упругости и коэффициент Пуассона клеевого слоя. В отличие от работы [14], второй коэффициент постели,  $K_2$ , полагаем отличным от нуля, а в формуле для  $K_1$  учитываем влияние коэффициента Пуассона  $\mu_0$ , что отсутствует в работах [5–8, 10, 13]. Это позволяет более точно описать напряженное состояние клея в окрестности концов соединения, т. е. в тех местах, где возникает наиболее опасное напряженное состояние.

Для описания колебаний консольных участков  $x \in [-\ell - L, -L]$  и  $x \in [L, L + \ell]$  воспользуемся уравнениями динамики балки Тимошенко:

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} = \frac{\rho_j \delta_j}{B_j} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} = \frac{\rho_j \delta_j}{H_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2}, \quad D_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} - H_j \frac{\partial w_j}{\partial x} - H_j \varphi_j = J_j \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial t^2}, \quad j = 3, 4. \quad (7)$$

Чтобы сравнить результаты вычислений с результатами эксперимента и расчетами по другой методике, примем, что все края свободны от нагрузки – как в работе [5].

**Построение решения.** Исключив усилия и моменты в уравнениях (1), (2), получим систему семи дифференциальных уравнений относительно перемещений  $u_k$ ,  $w_k$ ,  $\varphi_k$ ,  $k = 1, 2$ , и  $w_0$ . В матричном виде эта система имеет вид

$$\mathbf{A}_2 \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} + \mathbf{A}_0 \mathbf{V} = \mathbf{M} \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2}, \quad (8)$$

где  $\mathbf{V} = (u_1 \ u_2 \ w_1 \ w_2 \ \varphi_1 \ \varphi_2 \ w_0)^\top$ , а матрицы имеют вид

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} \frac{G_0}{\delta_0} & -\frac{G_0}{\delta_0} & 0 & 0 & -\frac{\delta_1}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & -\frac{\delta_2}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & 0 \\ -\frac{G_0}{\delta_0} & \frac{G_0}{\delta_0} & 0 & 0 & \frac{\delta_1}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & \frac{\delta_2}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & 0 \\ 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & 0 & K_1 \\ 0 & 0 & 0 & -K_1 & 0 & 0 & K_1 \\ -\frac{\delta_1}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & \frac{\delta_1}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & 0 & 0 & H_1 + \frac{G_0 \delta_1^2}{4\delta_0} & \frac{G_0 \delta_1 \delta_2}{4\delta_0} & 0 \\ -\frac{\delta_2}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & \frac{\delta_2}{2} \frac{G_0}{\delta_0} & 0 & 0 & \frac{G_0 \delta_1 \delta_2}{4\delta_0} & H_2 + \frac{G_0 \delta_2^2}{4\delta_0} & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & K_1 & 0 & 0 & -2K_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -B_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 + H_1 & 0 & 0 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 + H_2 & 0 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -D_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -D_2 & 0 \\ 0 & 0 & -K_2 & -K_2 & 0 & 0 & 2K_2 + G_0\delta_0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -G_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 \\ 0 & 0 & H_1 & 0 & 0 & 0 & -0.5G_0\delta_1 \\ 0 & 0 & 0 & H_2 & 0 & 0 & -0.5G_0\delta_2 \\ G_0 & -G_0 & 0 & 0 & -0.5G_0\delta_1 & -0.5G_0\delta_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\rho_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_1\delta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho_2\delta_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -J_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение системы (8) ищем в виде гармонических колебаний:  $\mathbf{V} = (X^{(1)}, \dots, X^{(7)})^\top e^{i\omega t} = \mathbf{X}(x)e^{i\omega t}$  ( $i$  – мнимая единица). При подстановке в (8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathbf{A}_2 \frac{d^2 \mathbf{X}}{dx^2} + \mathbf{A}_1 \frac{d\mathbf{X}}{dx} + (\mathbf{A}_0 + \mathbf{M}\omega^2)\mathbf{X} = 0. \quad (9)$$

Частное решение системы (9), соответствующее некоторой частоте  $\omega$ , ищем в виде  $\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{h}e^{\lambda x}$ , где  $C$  – произвольная постоянная;  $\mathbf{h}$  – неизвестный вектор. Подставив это представление  $\mathbf{X}$  в (9), получим

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{h} = 0, \quad (10)$$

где

$$\mathbf{A} = \lambda^2 \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \lambda + (\mathbf{A}_0 + \omega^2 \mathbf{M}).$$

Однородная система линейных уравнений (10) имеет нетривиальное решение, если  $\det \mathbf{A} = 0$ . Приравняв нулю определитель матрицы  $\mathbf{A}$ , получим дисперсионное соотношение, связывающее волновые числа  $\lambda$  и частоту колебаний  $\omega$ . Это соотношение имеет вид многочлена 14-й степени по  $\lambda$  (четные степени). Вектор  $\mathbf{h}$  представляет собой нетривиальное решение системы линейных уравнений (8), соответствующее одному из значений  $\lambda_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, 14$ . Дефект матрицы  $\mathbf{A}(\lambda_n)$  равен единице, поэтому вектор  $\mathbf{h}_n$  определяется с точностью до произвольного множителя  $C_n$ . Таким образом, общее решение системы (9) имеет вид

$$\mathbf{X} = \sum_{n=1}^{14} C_n \mathbf{h}_n e^{\lambda_n(\omega)x}. \quad (11)$$

Решение уравнения (6) и системы (7) на участках 3 и 4 имеет вид

$$\begin{aligned} u_3 &= X^{(8)} e^{i\omega t}, & w_3 &= X^{(9)} e^{i\omega t}, & \varphi_3 &= X^{(10)} e^{i\omega t}, \\ u_4 &= X^{(11)} e^{i\omega t}, & w_4 &= X^{(12)} e^{i\omega t}, & \varphi_4 &= X^{(13)} e^{i\omega t}, \end{aligned}$$

где

$$X^{(8)} = \sum_{n=15}^{16} C_n e^{\lambda_n(\omega)x}, \quad X^{(11)} = \sum_{n=21}^{22} C_n e^{\lambda_n(\omega)x},$$

$$\lambda_{15,16} = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho_3 \delta_3}{B_3}}, \quad \lambda_{21,22} = \pm i\omega \sqrt{\frac{\rho_4 \delta_4}{B_4}}, \quad (12)$$

$$\begin{pmatrix} X^{(9)} \\ X^{(10)} \end{pmatrix} = \sum_{n=17}^{20} C_n \mathbf{g}_{n-16}^{(3)} e^{\lambda_n(\omega)x}, \quad \begin{pmatrix} X^{(12)} \\ X^{(13)} \end{pmatrix} = \sum_{n=23}^{26} C_n \mathbf{g}_{n-22}^{(4)} e^{\lambda_n(\omega)x}, \quad (13)$$

где корни  $\lambda_n(\omega)$ ,  $n = 17, \dots, 20$  и  $n = 23, \dots, 26$ , являются решениями уравнения четвертой степени

$$\det \mathbf{A}_j^{(c)}(\lambda) = 0,$$

$$\mathbf{A}_j^{(c)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D_j \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -H_j & 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} \frac{\rho_j \delta_j}{H_j} \omega^2 & 0 \\ 0 & \omega^2 J_j - H_j \end{pmatrix}.$$

Векторы  $\mathbf{g}_1^{(j)}, \dots, \mathbf{g}_4^{(j)}$  – нетривиальные решения системы однородных линейных уравнений  $\mathbf{A}_j^{(c)} \mathbf{g}^{(j)} = 0$ ,  $j = 3, 4$ , которые соответствуют четырем значениям  $\lambda_n(\omega)$  при частоте колебаний  $\omega$ .

Для поиска собственных частот колебаний  $\omega$  (и, соответственно, связанных с ними волновых чисел  $\lambda_n(\omega)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 26$ ) необходимо удовлетворить краевым условиям и условиям сопряжения (равенство перемещений и усилий) на границе соединения и консольных участков. В случае свободных границ (именно эта задача рассмотрена в [5]) краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} M_3(-\ell - L, t) &= N_3(-\ell - L, t) = Q_3(-\ell - L, t) = 0, \\ u_3(-L, t) &= u_1(-L, t), \quad w_3(-L, t) = w_1(-L, t), \quad \varphi_3(-L, t) = \varphi_1(-L, t), \\ Q_3(-L, t) &= Q_1(-L, t), \quad N_3(-L, t) = N_1(-L, t), \quad M_3(-L, t) = M_1(-L, t), \\ Q_2(-L, t) &= N_2(-L, t) = M_2(-L, t) = 0, \quad \tau(-L, t) = \tau(L, t) = 0, \\ Q_1(L, t) &= N_1(L, t) = M_1(L, t) = 0, \quad \varphi_4(L, t) = \varphi_2(L, t), \\ u_4(L, t) &= u_2(L, t), \quad w_4(L, t) = w_2(L, t), \\ Q_4(L, t) &= Q_2(L, t), \quad N_4(L, t) = N_2(L, t), \\ M_4(L, t) &= M_2(L, t), \quad M_4(\ell + L, t) = N_4(\ell + L, t) = Q_4(\ell + L, t) = 0. \end{aligned}$$

Эта система сводится к системе однородных линейных уравнений относительно  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{26})^T$ , коэффициенты которой зависят от частоты  $\omega$ :

$$\mathbf{V}(\omega) \cdot \mathbf{C} = 0. \quad (14)$$

Система (14) имеет нетривиальное решение, если

$$\det \mathbf{V}(\omega) = 0. \quad (15)$$

Для решения уравнения (15) целесообразно применить численный метод. Например, при помощи перебора значений  $\omega$  и вычислений  $\det \mathbf{V}(\omega)$  найти интервалы  $\omega$ , на которых действительная и мнимая части значений определителя изменяют знак (совместно). А затем на этих интервалах для

нахождения собственных частот  $\omega_m$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$ , использовать метод секущих. В итоге получим ряд собственных частот  $\{\omega_m\}$  и соответствующих им собственных функций. Дефект матрицы  $\mathbf{B}(\omega_m)$  равен единице, следовательно вектор  $\mathbf{C} = (C_1, C_2, \dots, C_{26})^\top$  определяем из (14) с точностью до произвольного множителя.

Таким образом, перемещения в области соединения имеют вид

$$\mathbf{V} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{X}_m (S_m \sin \omega_m t + R_m \cos \omega_m t),$$

$$\mathbf{X}_m = \sum_{n=1}^{14} c_{nm} \mathbf{h}_{nm} e^{\lambda_{nm} x},$$

где  $\mathbf{X}_m$  – вектор собственных функций (11), соответствующих собственной частоте  $\omega_m$ ;  $\mathbf{h}_{nm}$  – нетривиальные решения системы (10), соответствующие корням дисперсионного соотношения  $\lambda_{nm} = \lambda_n(\omega_m)$ ;  $c_{nm}$  –  $n$ -я компонента вектора  $\mathbf{C}$  нетривиального решения системы (14), соответствующего собственной частоте  $\omega_m$ ;  $S_m, R_m$  – константы, определяемые из начальных условий. В рассматриваемом случае начально-краевую задачу не решаем.

Перемещения консольных участков могут быть вычислены аналогичным образом, используя формулы (12), (13).

**Численный пример.** В работе [5] приведены результаты расчетов и экспериментов по определению частот собственных колебаний свободно подвешенной составной балки, которая имеет следующие параметры:  $L = 50$  мм,  $\ell = 250$  мм,  $\delta = 5$  мм,  $E_1 = E_2 = 207$  ГПа (сталь),  $G_1 = G_2 = 80$  ГПа,  $\rho_1 = \rho_2 = 7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $E_0 = 2.46$  ГПа,  $G_0 = 0.83$  ГПа (эпоксидная смола),  $\mu_0 = 0.482$ ,  $\delta_0 = 0.5$  мм.

На участке соединения балка имеет симметричную структуру и вследствие этого дефект матрицы  $\mathbf{A}(\lambda_n)$  системы (10) больше единицы. Выделим симметричную ( $u_1 = u_2$ ,  $w_1 = -w_2$ ,  $\varphi_1 = -\varphi_2$ ,  $w_0 = 0$ ) и антисимметричную ( $u_1 = -u_2$ ,  $w_1 = w_2$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2$ ) формы колебаний [11]. За счет сокращения числа переменных вместо систем (8)–(10) получим системы меньших размерностей.

Массу клеевого слоя распределим между несущими слоями, введя в области склейки редуцированные плотности несущих слоев

$$\rho_k^* = \rho_k + 0.5 \delta_0 \rho_0 / \delta_k, \quad k = 1, 2.$$

Первые частоты  $\omega_m$ , вычисленные по предложенной модели, результаты расчетов и экспериментов из работы [5], а также результаты собственных вычислений автора по модели Голанда и Рейсснера (изложенной в работах [5, 6, 13]) приведены ниже в табл. 1.

Таблица 1. Частоты собственных колебаний  $\omega_m/2\pi$ .

| $m$ | Эксперимент [5] | Расчет [5] | Расчет автора по методике [5, 6, 13] | Предложенный подход |
|-----|-----------------|------------|--------------------------------------|---------------------|
| 1   | 80.795          | 83.56      | 81.63                                | 81.90               |
| 2   | 201.325         | 205.48     | 200.37                               | 200.75              |
| 3   | 431.788         | 436.29     | 434.20                               | 435.15              |
| 4   | 660.680         | 665.37     | 648.08                               | 647.74              |

Собственные частоты, рассчитанные по обеим моделям, отличаются незначительно. Обусловлено это тем, что основное влияние на частоты оказывают длинные консольные части, для которых (в т. ч. в силу высокого модуля сдвига стали) модели балки Тимошенко и Эйлера – Бернулли дают близкие результаты. Формы колебаний показаны в работе [5].

Чтобы сравнить напряженное состояние клеевого слоя при собственных колебаниях, рассчитанное по предложенной методике, с рассчитанным по классической модели, будем считать амплитуду поперечных колебаний конца консольной части ( $x = \pm(L + \ell)$ ) равной 1 мм и рассмотрим возникающие при этом напряжения в клее. На рис. 2 показаны графики касательных напряжений в окрестности конца соединения, рассчитанные с помощью методики [5, 6, 13] (штриховая линия) и по предложенной модели (сплошная линия) при собственных частотах колебаний  $\omega_1$  (кривая 1) и  $\omega_2$  (кривая 2).

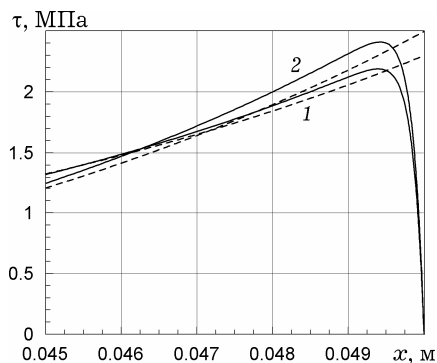


Рис. 2

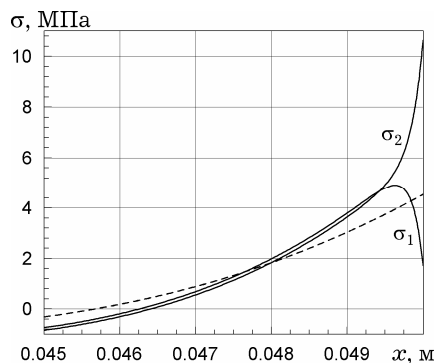


Рис. 3

Касательные напряжения, вычисленные по обоим методикам, на большей части соединения практически не отличаются друг от друга. Отличие имеется лишь в малой зоне (порядка толщины клея) в окрестности конца соединения.

Графики нормальных напряжений в клее, которые возникают при частоте  $\omega_1$  и указанной выше амплитуде колебаний, показаны на рис. 3. Штриховой линией показаны результаты расчета нормальных напряжений при аналогичных условиях согласно модели Голанда и Рейсснера [5, 6, 13].

При других частотах  $\omega_m$  получены аналогичные результаты – нормальные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  на концах соединения значительно отличаются от нормальных напряжений, вычисленных по методике [5] (и аналогичных ей), но практически совпадают с указанными напряжениями (и друг с другом) во внутренней области клеевого шва. Однако максимальные значения нормальных напряжений в клее, которые получены согласно предложенному подходу, значительно превышают результаты расчета по классической модели.

**Выводы.** Математическая модель клеевого соединения, в которой для описания клеевого слоя используется многопараметрическая модель упругого основания, развита на решение задач динамики.

На примере решенной модельной задачи показано, что при собственных колебаниях нормальные напряжения, рассчитанные по предложенной модели, на большей части соединения близки к напряжениям, полученным согласно классической модели Голанда и Рейсснера или ее модификаций, но значительно отличаются от них в малой зоне в окрестности края клеевого шва.

Разработанный подход может быть использован для решения задач о вынужденных колебаниях соединений, для идентификации упругих параметров клея, расширен на большее число слоев и т. д.

1. Артюхин Ю. П. Модифицированная теория Голанда–Рейсснера склеенных пластин // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1975. – Вып. 11. – С. 136–148.
2. Артюхин Ю. П. Напряжения в клеевых соединениях // Исследования по теории пластин и оболочек. – 1973. – Вып. 10. – С. 3–27.
3. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. – Москва: Стройиздат, 1954. – 56 с.
4. Ржаницын А. Р. Составные стержни и пластины. – Москва: Стройиздат, 1986. – 316 с.
5. Ingole S. B., Chatterjee A. Vibration analysis of single lap adhesive joint: Experimental and analytical investigation // J. Vib. Control. – 2011. – **17**, No. 10. – P. 1547–1556.
6. He S., Rao M. D. Vibration analysis of adhesively bonded lap joint. Part I: Theory // J. Sound Vib. – 1992. – **152**, No. 3. – P. 405–416.
7. Lenci S., Clementi F. Effects of shear stiffness, rotatory and axial inertia, and interface stiffness on free vibrations of a two-layer beam // J. Sound Vib. – 2012. – **331**, No. 24. – P. 5247–5267.
8. Nwankwo E., Soleiman Fallah A., Louca L. A. An investigation of interfacial stresses in adhesively-bonded single lap joints subject to transverse pulse loading // J. Sound Vib. – 2013. – **332**, No. 7. – P. 1843–1858.
9. Oniszczuk Z. Free transverse vibrations of elastically connected simply supported double-beam complex system // J. Sound Vib. – 2000. – **232**, No. 2. – P. 387–403.
10. Saito H., Tani H. Vibrations of bonded beams with a single lap adhesive joint // J. Sound Vib. – 1984. – **92**, No. 2. – P. 299–309.
11. Sokolinsky V. S., Nutt S. R., Frostig Y. Boundary condition effects in free vibrations of higher-order soft sandwich beams // AIAA Journal. – 2002. – **40**, No. 6. – P. 1220–1227.
12. Vaidya U. K., Gautam A. R. S., Hosur M., Dutta P. Experimental-numerical studies of transverse impact response of adhesively bonded lap joints in composite structures // Int. J. Adhes. Adhes. – 2006. – **26**, No. 3. – P. 184–198.
13. Vaziri A., Nayeb-Hashemi H., Hamidzadeh H. R. Experimental and analytical investigations of the dynamic response of adhesively bonded single lap joints // J. Vib. Acoust. – 2004. – **126**, No. 1. – P. 84–91.
14. Wang J. Cohesive zone model of intermediate crack-induced debonding of FRP-plated concrete beam // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, No. 21. – P. 6630–6648.
15. Wang J., Zhang Ch. Three-parameter elastic foundation model for analysis of adhesively bonded joints // Int. J. Adhes. Adhes. – 2009. – **29**, No. 5. – P. 495–502.

#### ПОЗДОВЖНЬО-ЗГІННІ КОЛИВАННЯ ТРИШАРОВОГО СТЕРЖНЯ. УТОЧНЕНА МОДЕЛЬ

*Розв'язано задачу про зв'язані коливання клейового напускного з'єднання двох стержнів. З'єднувальний шар моделюється багатопараметричною пружною основою, зовнішні шари розглядаються як балки Тимошенко. Цей підхід з високою точністю описує напружений стан з'єднувального шару і дозволяє задовольнити крайові умови на його вільній границі. Розв'язано модельну задачу і проведено порівняння з розрахунками за класичною методикою.*

#### LONGITUDINAL-FLEXURAL VIBRATIONS OF A THREE-LAYERED ROD. A REFINED MODEL

*The problem of coupled vibrations for the adhesive lap joint of two bars is solved. The connective layer is simulated by the multi-parameter elastic foundation, the outer layers are considered as Timoshenko beams. This approach with high accuracy describes the stressed state of adhesive layer and allows to satisfy the boundary conditions at its free ends. The model problem is solved and the comparison with the calculations based on the classical method is performed.*

Нац. аерокосм. ун-т ім. Н. Е. Жуковського  
«Харьков. авиац. ин-т», Харьков

Получено  
19.10.13