УДК 539.3

Д. М. Лила

ПОТЕРЯ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО РАДИАЛЬНО НЕОДНОРОДНОГО СТУПЕНЧАТОГО КОЛЬЦЕВОГО ДИСКА

Предложен способ исследования методом малого параметра возможной потери устойчивости вращающегося радиально неоднородного ступенчатого кольцевого кругового диска. Получено в первом приближении характеристическое уравнение относительно критического радиуса пластической зоны. Численно определены значения критической угловой скорости вращения при различных параметрах диска.

Введение. Стремление к уменьшению массы машин при улучшении их качества и экономичности вызывает необходимость рассматривать деформацию деталей за пределом упругости [11]. После наступления текучести [12] в локальной зоне деталь еще может сопротивляться увеличению внешних сил до тех пор, пока пластические деформации [8] не охватят значительного ее объема. Это позволяет выявить дополнительные прочностные ресурсы конструкции [19]. Для вычисления предельных нагрузок требуется умение производить расчеты за пределом упругости.

Для установления наиболее эффективных условий пластического деформирования такие расчеты необходимы и в технологических процессах производства некоторых конструкций. Предусмотрены специальные операции, позволяющие путем пластического деформирования повысить несущую способность [4] деталей в пределах упругости [2]. Благоприятное поле остаточных напряжений, снижающих рабочие напряжения в эксплуатационных условиях, в турбинных дисках, к примеру, создается автоскреплением (автофретированием) [18]. Автофретирование заключается в том, что перед эксплуатацией диски на разгонных стендах приводятся во вращение с такими угловыми скоростями, при которых в них возникают пластические деформации. Поскольку при вращении диска зоной концентрации напряжений являются точки внутреннего контура, пластические деформации начинают развиваться с внутренней расточки [21]. С повышением числа оборотов пластическая область, примыкающая к внутреннему контуру, увеличивается. В результате постепенного снижения числа оборотов и остановки диска, деформированного указанным способом, он полностью разгружается и в нем возникают остаточные напряжения. Радиальные остаточные напряжения будут сжимающими во всех точках, а окружные − сжимающими в области, примыкающей к внутренней расточке, и растягивающими − в остальной части диска.

Вращающиеся диски являются важнейшим элементом многих машин. Возможность получения высоких параметров работы таких машин определяется прочностью и долговечностью дисков. Основными нагрузками, действующими на диски, являются центробежные силы, возникающие при вращении. В большинстве современных турбомашин диски работают в условиях повышенной нагруженности, приводящей к возникновению пластических деформаций. Если не учитывать воздействие высоких температур и возникновение температурных напряжений, симметричные относительно плоской срединной поверхности турбинные диски и диски компрессоров высокого давления достаточно рассчитать только на растяжение. Для дисков сложной формы с изогнутой срединной поверхностью при осевых нагрузках и моментах во время расчета следует учитывать изгиб. При упругопластическом расчете центробежных колес турбомашин (крыльчаток) необходимо учитывать взаимодействие лопаток и несущих дисков и т. д. [3, 6]. Большинство указанных и подобных проблем подробно освещены в литературе [13, 20, 24, 25 и др.] с использованием преимущественно группы вариационно-разностных методов решения упругопластических задач [1]. При этом указывается, что аналитические приемы, используемые при решении упругопластических задач, опираются в основном на методы теории функций комплексного переменного и метод малого параметра [10], позволяющий находить решение, близкое к уже известному точному решению. Первые результаты в применении к плоским упругопластическим задачам самоуравновешенной и неуравновешенной форм потери устойчивости сплошных вращающихся дисков, основанные на методе малого параметра, получены в работах [7, 9]. Исходя из возможности подвергать возмущению как форму тела, так и граничные условия, и с учетом универсальности и эффективности метода возмущения формы границы [5] при решении многочисленных конкретных краевых задач из различных разделов механики сплошных сред вообще, упомянутые исследования были продолжены в работах [14–17, 22, 23]. Полученные в этих работах приближенные решения могут использоваться для контроля расчетов, для упрощенных оценок и обоснования результатов применения численных методов.

В предлагаемой статье метод малого параметра применен к расчету самоуравновешенной формы потери устойчивости вращающегося радиально неоднородного ступенчатого кольцевого кругового диска, нагруженного по контуру в своей срединной плоскости. Возмущению подлежит контурная окружность сечения диска его плоской срединной поверхностью. Контурное давление зависит от скорости вращения диска. Критические значения размеров пластической зоны и скорости вращения получены при решении плоской упругопластической задачи в первом приближении. Предполагается, что материал дисковых секций (с условием пластичности Сен-Венана) не обладает упрочнением.

1. Постановка задачи. Объектом исследования является быстровращающийся радиально неоднородный по материалу ступенчатый кольцевой круговой диск $\mathcal{D}$. Диск $\mathcal{D}$ выполнен в виде единого целого диска путем жесткого соединения n_0 однородных и изотропных кольцевых дисков $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_{n_0}$ с внешними радиусами $r_1, r_2, \ldots, r_{n_0} = b$ соответственно. Внутренний радиус диска $\mathcal{D}$ равен a. Предел текучести материала кольцевых секций $\mathcal{D}_j$, $j = 1,\ldots,n_0$, обозначим через σ_{sj}, модуль упругости – через E_j, плотность – через γ_j, коэффициент Пуассона – через ν_j, постоянную угловую скорость вращения – через ω, текущий радиус пластической зоны невозмущенного диска – через r_0.

Предмет исследования составляет механизм и характерные критические величины самоуравновешенной формы потери устойчивости диска $\mathcal{D}$, когда уравнение внешней его границы в срединной плоскости, являющейся плоскостью симметрии диска, с точностью до бесконечно малых первого порядка представлено в виде

$$r = b + d\cos n\theta, \qquad d = \text{const}, \qquad n \ge 2, \qquad n \in \mathbb{N},$$

или

$$\rho = 1 + \delta\cos n\theta, \tag{1}$$

где $\rho = r/b$ – безразмерный текущий радиус, δ – малый параметр, θ – полярный угол. Внутренняя кольцевая область $a \le r < r_{0*}$ диска $\mathcal{D}$ пластическая, тогда как внешняя его область в момент потери устойчивости пребывает в упругом состоянии (такой сценарий развития неустойчивости в работах [14, 16] рассмотрен как механизм ***2°*** или особый ***02°***). Предполагается, что максимальная из толщин $2h_1,\ldots,2h_{n_0}$ кольцевых зон $\mathcal{D}_1,\ldots,\mathcal{D}_{n_0}$ мала по сравнению с остальными размерами диска $\mathcal{D}$. Наличие распределенных по внутреннему и внешнему контурах диска радиальных нагрузок

$p_i = p_{i0} + \tilde{p}_i$ и $p_e = p_{e0} + \tilde{p}_e$ будем считать результатом определенных усилий, действующих на диск в его срединной плоскости. Здесь слагаемые p_{i0} и p_{e0} имеют постоянную величину, а слагаемые $\tilde{p}_i$ и $\tilde{p}_e$, равные нулю при $\omega = 0$, отображают изменение контурных нагрузок в динамике. Такая постановка соответствует, к примеру, насадке на вал с натягом исследуемого диска, по ободу которого смонтированы с обжатием лопатки, и учету при вращении сжимающего действия вала и растягивающего действия лопаток.

Требуется для описываемой зависимостью (1) формы границы диска получить в первом приближении характеристическое уравнение для критического радиуса пластической зоны $r_0 = r_{0*}$ и определить соответствующую величину критической угловой скорости вращения $\omega = \omega_*$. Напомним [10], что для этого нужно установить условие существования нетривиальных решений системы линейных однородных уравнений

$$\sigma'_{rr} + \frac{d\sigma^0_{rr}}{dr} u' = 0, \qquad \sigma'_{r\theta} - \frac{\sigma^0_{\theta\theta} - \sigma^0_{rr}}{b} \frac{du'}{d\theta} = 0, \qquad r = b\,,$$

$$\sigma'_{rr} = 0, \qquad \sigma'_{r\theta} = 0, \qquad r = r_0\,,$$

относительно произвольных постоянных, входящих в выражения для компонент напряжений и перемещений σ'_{rr}, $\sigma'_{r\theta}$ и u', определяющих возмущенное напряженно-деформированное состояние вращающегося диска $\mathcal{D}$. Указанные линеаризованные возмущения первого порядка малости удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия плоской задачи и уравнениям связи между напряжениями и перемещениями [2] в частных производных, тогда как невозмущенное напряженное состояние (с верхним индексом «0») определено обыкновенными дифференциальными уравнениями квазистатического равновесия [21] и уравнениями связи в упругой зоне или условием текучести Сен-Венана − в пластической зоне.

2. Невозмущенное упругопластическое состояние. Предположим, что упругопластическая граница невозмущенного вращающегося диска $\mathcal{D}$ находится в j-й кольцевой зоне $\rho \in (\rho_{j-1}, \rho_j)$, где $j \in \{1, \dots, n_0\}$, $\rho_0 = a/b = \beta$, $\rho_1 = r_1/b$, …, $\rho_{n_0} = r_{n_0}/b = 1$. С учетом условия текучести из уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = -\frac{\sigma_k}{b^2} r, \qquad \sigma_k = \gamma_k b^2 \omega^2, \qquad k = 1, \dots, j\,, \tag{2}$$

для отнесенных к σ_{sn_0} касательного и радиального напряжений соответственно получим

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma_{sk}}{\sigma_{sn_0}}, \qquad \sigma_{rr} = \frac{\sigma_{sk}}{\sigma_{sn_0}} - \frac{\sigma_k}{3\sigma_{sn_0}} \rho^2 + \frac{C_k}{\rho}\,. \tag{3}$$

Обозначив $\sigma_{sk}/\sigma_{sn_0} = \Sigma_k$, $k = 1, \dots, n_0$, на основе (3) и начального условия $\sigma_{rr}(\beta) = -p_i/\sigma_{sn_0}$ учтем непрерывность радиального усилия $h\sigma_{rr}$ в местах скачкообразного изменения толщины диска:

$$-\frac{p_i}{\sigma_s} = \Sigma_1 - \frac{\sigma_1}{3\sigma_{sn_0}} \beta^2 + \frac{C_1}{\beta}\,,$$

$$h_1 \left(\Sigma_1 - \frac{\sigma_1}{3\sigma_{sn_0}} \rho_1^2 + \frac{C_1}{\rho_1} \right) = h_2 \left(\Sigma_2 - \frac{\sigma_2}{3\sigma_{sn_0}} \rho_1^2 + \frac{C_2}{\rho_1} \right),$$

$$h_2\left(\Sigma_2-\frac{\sigma_2}{3\sigma_{sn_0}}\rho_2^2+\frac{C_2}{\rho_2}\right)=h_3\left(\Sigma_3-\frac{\sigma_3}{3\sigma_{sn_0}}\rho_2^2+\frac{C_3}{\rho_2}\right),$$

$$\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots,$$

$$h_{j-1}\left(\Sigma_{j-1}-\frac{\sigma_{j-1}}{3\sigma_{sn_0}}\rho_{j-1}^2+\frac{C_{j-1}}{\rho_{j-1}}\right)=h_j\left(\Sigma_j-\frac{\sigma_j}{3\sigma_{sn_0}}\rho_{j-1}^2+\frac{C_j}{\rho_{j-1}}\right).$$

Исключая из этих равенств постоянные $C_1,\ldots,C_{j-1}$ и обозначая $\sigma_{n_0}/(24\sigma_{sn_0})=y$, $\gamma_k/\gamma_{n_0}=\Gamma_k$, $k=1,\ldots,n_0$, приходим к соотношению

$$C_j=\delta_1 p_i/\sigma_{sn_0}+\delta_2 y+\delta_3, \tag{4}$$

где

$$\delta_1=-\frac{\beta h_1}{h_j},\qquad \delta_2=-\left(\frac{8}{h_j}\right)\sum_{k=1}^{j}(h_{k-1}\Gamma_{k-1}-h_k\Gamma_k)\rho_{k-1}^3,$$

$$\delta_3=\left(\frac{1}{h_j}\right)\sum_{k=1}^{j}(h_{k-1}\Sigma_{k-1}-h_k\Sigma_k)\rho_{k-1},\qquad h_0:=0,\quad \Gamma_0:=0,\quad \Sigma_0:=0.$$

Вычисляя теперь последовательно $C_{j-1},\ldots,C_1$, получим радиальное напряжение невозмущенного диска во всей пластической области:

$$\sigma_{rr}^{0p}=\begin{cases}\Sigma_1-8\Gamma_1 y\rho^2+C_1\rho^{-1}, & \rho\in[\beta,\rho_1),\\ \Sigma_2-8\Gamma_2 y\rho^2+C_2\rho^{-1}, & \rho\in(\rho_1,\rho_2),\\ \ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots\;\ldots & \ldots\;\ldots\\ \Sigma_j-8\Gamma_j y\rho^2+C_j\rho^{-1}, & \rho\in(\rho_{j-1},\beta_0),\end{cases} \tag{5}$$

где $\beta_0=r_0/b$. Таким образом, с учетом выражения (4) имеем

$$\sigma_{rr}^{0p}(\beta_0-0)=\Sigma_j-8\Gamma_j y\beta_0^2+C_j\beta_0^{-1}. \tag{6}$$

В упругой области диска $\mathcal{D}$ радиальное перемещение u (отнесенное к $r_{n_0}=b$) связано с напряжениями σ_{rr} и $\sigma_{\theta\theta}$ соотношением

$$\frac{Eu}{\rho}=\sigma_{sn_0}(\sigma_{\theta\theta}-\nu\sigma_{rr}),$$

из которого получаем условие сохранения связи между соседними частичными дисками ступенчатого диска:

$$\Delta\left(\frac{\sigma_{\theta\theta}-\nu\sigma_{rr}}{E}\right)=0,$$

где $\Delta(\cdot)$ − скачок соответствующей функции. Учитывая это и исходя из непрерывности радиального усилия, а также опираясь на соотношение (6), сформулируем следующую задачу: определить посредством сопряжения решений невозмущенное напряженное состояние упругой зоны диска $\mathcal{D}$ и величину y в зависимости от радиуса пластической зоны β_0.

Заменой переменных [3]

$$s=\sigma_{rr}+\alpha_k'\rho^2,\qquad t=\sigma_{\theta\theta}+\beta_k'\rho^2,\qquad x=1/\rho^2,\qquad k=j,\ldots,n_0, \tag{7}$$

$$\alpha_k'=\frac{\sigma_k(\nu_k+3)}{8\sigma_{sn_0}}=3(\nu_k+3)\Gamma_k y,\qquad \beta_k'=\frac{\sigma_k(3\nu_k+1)}{8\sigma_{sn_0}}=3(3\nu_k+1)\Gamma_k y,$$

обезразмеренное основное дифференциальное уравнение (2) преобразуем в уравнение

$$\frac{ds}{dx} = \frac{s - t}{2x} \tag{8}$$
с общим решением
$$s = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x, \qquad t = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x\,. \tag{9}$$
Приведем далее правила сопряжения функций (9) на произвольной окружности $\rho = 1/\sqrt{x}$, разделяющей соседние кольцевые секции (им припишем символы «$-$» и «$+$» соответственно) в упругой зоне ступенчатого неоднородного диска $\mathcal{D}$. Поскольку
$$h^- \sigma_{rr}^- = h^+ \sigma_{rr}^+ = h^+ (\sigma_{rr}^- + \Delta\sigma_{rr}) = h^+ (\sigma_{rr}^- + \Delta s - \Delta\alpha'/x)\,,$$
то
$$\Delta s = -\frac{h^+ - h^-}{h^+} s^- + \frac{1}{x}\left[\alpha'^+ - \frac{h^-}{h^+}\alpha'^-\right]$$
(ср. с [3, с. 24]) и
$$s^+ = \frac{h^-}{h^+} s^- + \frac{1}{x}\left[\alpha'^+ - \frac{h^-}{h^+}\alpha'^-\right]. \tag{10}$$
Кроме этого, имеем
$$t^+ = \left[\frac{h^-}{h^+}\nu^+ - \frac{E^+}{E^-}\nu^-\right] s^- + \frac{E^+}{E^-} t^- + \frac{1}{x}\left(\beta'^+ - \frac{E^+}{E^-}\beta'^- - \left[\frac{h^-}{h^+}\nu^+ - \frac{E^+}{E^-}\nu^-\right]\alpha'^-\right). \tag{11}$$
Обозначим
$$a_k := h_k/h_{k+1}, \qquad b_k := (\alpha'_{k+1} - a_k\alpha'_k)/x_k, \qquad e_k := E_{k+1}/E_k\,,$$
$$c_k := a_k\nu_{k+1} - e_k\nu_k, \quad d_k := (x_k + x_{k+1})/(2x_k), \quad f_k := (x_{k+1} - x_k)/(2x_k)\,,$$
$$\ell_k := (\beta'_{k+1} - e_k\beta'_k - c_k\alpha'_k)/x_k, \qquad x_{k^*} = 1/\rho^2_{k^*}, \qquad k^* = k, k+1\,,$$
$$k = j, \ldots, n_0 - 1\,.$$

Предположим далее, что известны левосторонние пределы s_j^- и t_j^- функций (9) в точке $\rho = \rho_j$ (на первой после упругопластической границы окружности, разделяющей ступени $\mathcal{D}_j$ и $\mathcal{D}_{j+1}$). Тогда согласно правилам сопряжения (10) и (11) соответствующие правосторонние пределы получим в виде
$$s_j^+ = a_j s_j^- + b_j, \qquad t_j^+ = c_j s_j^- + e_j t_j^- + \ell_j\,.$$
Это дает возможность определить вначале константы в формулах (9), а затем и s_{j+1}^-, t_{j+1}^-:
$$s_{j+1}^- = d_j s_j^+ - f_j t_j^+ = A_{j+1} s_j^- - B_{j+1} t_j^- + C_{j+1}\,,$$
$$t_{j+1}^- = -f_j s_j^+ + d_j t_j^+ = A^*_{j+1} s_j^- - B^*_{j+1} t_j^- + C^*_{j+1}\,, \tag{12}$$
где
$$A_{j+1} = d_j a_j - f_j c_j, \qquad B_{j+1} = f_j e_j, \qquad C_{j+1} = d_j b_j - f_j \ell_j\,,$$
$$A^*_{j+1} = -f_j a_j + d_j c_j, \qquad B^*_{j+1} = -d_j e_j, \qquad C^*_{j+1} = -f_j b_j + d_j \ell_j\,.$$
Зная левосторонние пределы рассматриваемых функций в точке ρ_{j+1} и повторяя предыдущие рассуждения, теперь нетрудно получить и соответствующие правосторонние пределы:

$$s_{j+1}^{+} = a_{j+1}s_{j+1}^{-} + b_{j+1} = a_{j+1}(d_j a_j - f_j c_j)s_j^{-} - a_{j+1}f_j e_j t_j^{-} +$$
$$+ a_{j+1}(d_j b_j - f_j \ell_j) + b_{j+1},$$
$$t_{j+1}^{+} = c_{j+1}s_{j+1}^{-} + e_{j+1}t_{j+1}^{-} + \ell_{j+1} = [c_{j+1}(d_j a_j - f_j c_j) + e_{j+1}(-f_j a_j + d_j c_j)]s_j^{-} +$$
$$+ [-c_{j+1}f_j e_j + e_{j+1}d_j e_j]t_j^{-} + c_{j+1}(d_j b_j - f_j \ell_j) +$$
$$+ e_{j+1}(-f_j b_j + d_j \ell_j) + \ell_{j+1}.$$

Вслед за этим находим

$$s_{j+2}^{-} = A_{j+2}s_j^{-} - B_{j+2}t_j^{-} + C_{j+2}, \qquad t_{j+2}^{-} = A_{j+2}^{*}s_j^{-} - B_{j+2}^{*}t_j^{-} + C_{j+2}^{*}, \tag{13}$$

где

$$A_{j+2} = d_{j+1}a_{j+1}A_{j+1} - f_{j+1}(c_{j+1}A_{j+1} + e_{j+1}A_{j+1}^{*}),$$
$$B_{j+2} = d_{j+1}a_{j+1}B_{j+1} - f_{j+1}(c_{j+1}B_{j+1} + e_{j+1}B_{j+1}^{*}),$$
$$C_{j+2} = d_{j+1}(a_{j+1}C_{j+1} + b_{j+1}) - f_{j+1}(c_{j+1}C_{j+1} + e_{j+1}C_{j+1}^{*} + \ell_{j+1}),$$
$$A_{j+2}^{*} = -f_{j+1}a_{j+1}A_{j+1} + d_{j+1}(c_{j+1}A_{j+1} + e_{j+1}A_{j+1}^{*}),$$
$$B_{j+2}^{*} = -f_{j+1}a_{j+1}B_{j+1} + d_{j+1}(c_{j+1}B_{j+1} + e_{j+1}B_{j+1}^{*}),$$
$$C_{j+2}^{*} = -f_{j+1}(a_{j+1}C_{j+1} + b_{j+1}) + d_{j+1}(c_{j+1}C_{j+1} + e_{j+1}C_{j+1}^{*} + \ell_{j+1}).$$

Аналогично получаем

$$s_{j+3}^{-} = A_{j+3}s_j^{-} - B_{j+3}t_j^{-} + C_{j+3}, \qquad t_{j+3}^{-} = A_{j+3}^{*}s_j^{-} - B_{j+3}^{*}t_j^{-} + C_{j+3}^{*}, \tag{14}$$

где

$$A_{j+3} = d_{j+2}a_{j+2}A_{j+2} - f_{j+2}(c_{j+2}A_{j+2} + e_{j+2}A_{j+2}^{*}),$$
$$B_{j+3} = d_{j+2}a_{j+2}B_{j+2} - f_{j+2}(c_{j+2}B_{j+2} + e_{j+2}B_{j+2}^{*}),$$
$$C_{j+3} = d_{j+2}(a_{j+2}C_{j+2} + b_{j+2}) - f_{j+2}(c_{j+2}C_{j+2} + e_{j+2}C_{j+2}^{*} + \ell_{j+2}),$$
$$A_{j+3}^{*} = -f_{j+2}a_{j+2}A_{j+2} + d_{j+2}(c_{j+2}A_{j+2} + e_{j+2}A_{j+2}^{*}),$$
$$B_{j+3}^{*} = -f_{j+2}a_{j+2}B_{j+2} + d_{j+2}(c_{j+2}B_{j+2} + e_{j+2}B_{j+2}^{*}),$$
$$C_{j+3}^{*} = -f_{j+2}(a_{j+2}C_{j+2} + b_{j+2}) + d_{j+2}(c_{j+2}C_{j+2} + e_{j+2}C_{j+2}^{*} + \ell_{j+2}),$$

и т. д. Наконец,

$$s_{n_0}^{-} = s_{n_0} = A_{n_0}s_j^{-} - B_{n_0}t_j^{-} + C_{n_0}, \quad t_{n_0}^{-} = t_{n_0} = A_{n_0}^{*}s_j^{-} - B_{n_0}^{*}t_j^{-} + C_{n_0}^{*}, \tag{15}$$

где

$$A_{n_0} = d_{n_0-1}a_{n_0-1}A_{n_0-1} - f_{n_0-1}(c_{n_0-1}A_{n_0-1} + e_{n_0-1}A_{n_0-1}^{*}),$$
$$B_{n_0} = d_{n_0-1}a_{n_0-1}B_{n_0-1} - f_{n_0-1}(c_{n_0-1}B_{n_0-1} + e_{n_0-1}B_{n_0-1}^{*}),$$
$$C_{n_0} = d_{n_0-1}(a_{n_0-1}C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) - f_{n_0-1}(c_{n_0-1}C_{n_0-1} + e_{n_0-1}C_{n_0-1}^{*} + \ell_{n_0-1}),$$
$$A_{n_0}^{*} = -f_{n_0-1}a_{n_0-1}A_{n_0-1} + d_{n_0-1}(c_{n_0-1}A_{n_0-1} + e_{n_0-1}A_{n_0-1}^{*}),$$
$$B_{n_0}^{*} = -f_{n_0-1}a_{n_0-1}B_{n_0-1} + d_{n_0-1}(c_{n_0-1}B_{n_0-1} + e_{n_0-1}B_{n_0-1}^{*}),$$
$$C_{n_0}^{*} = -f_{n_0-1}(a_{n_0-1}C_{n_0-1} + b_{n_0-1}) + d_{n_0-1}(c_{n_0-1}C_{n_0-1} + e_{n_0-1}C_{n_0-1}^{*} + \ell_{n_0-1}).$$

Поскольку

$$b_k = g_k y, \qquad \ell_k = m_k y,$$

где

$$g_k = 3[(\nu_{k+1} + 3)\Gamma_{k+1} - a_k(\nu_k + 3)\Gamma_k]/x_k,$$
$$m_k = 3[(3\nu_{k+1} + 1)\Gamma_{k+1} - e_k(3\nu_k + 1)\Gamma_k - c_k(\nu_k + 3)\Gamma_k]/x_k,$$

то в соотношениях (12)–(15)

$$C_k = D_k y, \qquad k = j+1,\ldots,n_0, \tag{16}$$

где

$$D_{j+1} = d_j g_j - f_j m_j, \qquad D^*_{j+1} = -f_j g_j + d_j m_j,$$

$$D_{j^*} = d_{j^*-1}\left(a_{j^*-1}D_{j^*-1} + g_{j^*-1}\right) - f_{j^*-1}\left(c_{j^*-1}D_{j^*-1} + e_{j^*-1}D^*_{j^*-1} + m_{j^*-1}\right),$$

$$D^*_{j^*} = -f_{j^*-1}\left(a_{j^*-1}D_{j^*-1} + g_{j^*-1}\right) + d_{j^*-1}\left(c_{j^*-1}D_{j^*-1} + e_{j^*-1}D^*_{j^*-1} + m_{j^*-1}\right),$$

$$j^* = j+2,\ldots,n_0.$$

Чтобы получить величины s_j^- и t_j^-, далее рассмотрим интервал (β_0, ρ_j). Определив вначале из системы уравнений

$$s_0 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x_0, \qquad t_0 = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x_0$$

(здесь $x_0 = 1/\beta_0^2$) постоянные $\tilde{C}_1$, $\tilde{C}_2$, найдем

$$s_j^- = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 x_j = d_0 s_0 - f_0 t_0, \qquad t_j^- = \tilde{C}_1 - \tilde{C}_2 x_j = -f_0 s_0 + d_0 t_0,$$

где $d_0 = (x_0 + x_j)/(2x_0)$, $f_0 = (x_j - x_0)/(2x_0)$. Используя непрерывность компонент напряженииий при переходе через упругопластическую границу, на основании соотношений (4) и (6) приходим к заключению, что

$$s_0 = [(3\nu_j + 1)\Gamma_j/x_0 + \delta_2\beta_0^{-1}]y + \delta_1\beta_0^{-1}p_i/\sigma_{sn_0} + \delta_3\beta_0^{-1} + \Sigma_j,$$

$$t_0 = 3(3\nu_j + 1)\Gamma_j y/x_0 + \Sigma_j$$

и

$$s_j^- = Qy + Rp_i/\sigma_{sn_0} + S, \tag{17}$$

$$t_j^- = Q^* y + R^* p_i/\sigma_{sn_0} + S^*, \tag{18}$$

где

$$Q = d_0\delta_2\beta_0^{-1} + (1 - 2f_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j/x_0, \quad R = d_0\delta_1\beta_0^{-1}, \quad S = d_0\delta_3\beta_0^{-1} + \Sigma_j,$$

$$Q^* = -f_0\delta_2\beta_0^{-1} + (1 + 2d_0)(3\nu_j + 1)\Gamma_j/x_0, \qquad R^* = -f_0\delta_1\beta_0^{-1},$$

$$S^* = -f_0\delta_3\beta_0^{-1} + \Sigma_j.$$

По условию задачи

$$s(1) = s_{n_0} = p_e/\sigma_{sn_0} + 3(\nu_{n_0} + 3)y,$$

поэтому из (15), (17) и (18) получаем

$$y = \frac{\omega^2}{24q^2} = \frac{p_e/\sigma_{sn_0} - \left(RA_{n_0} - R^*B_{n_0}\right)p_i/\sigma_{sn_0} - \left(SA_{n_0} - S^*B_{n_0}\right)}{QA_{n_0} - Q^*B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3)}, \tag{19}$$

где

$$q = b^{-1}\sqrt{\sigma_{sn_0}/\gamma_{n_0}}.$$

Напряженное состояние в упругой зоне

$$\sigma_{rr}^{0e} = \begin{cases} \tilde{C}_{1,j} + \tilde{C}_{2,j}\rho^{-2} - \alpha'_j\rho^2, & \rho \in (\beta_0, \rho_j), \\ \tilde{C}_{1,j+1} + \tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2} - \alpha'_{j+1}\rho^2, & \rho \in (\rho_j, \rho_{j+1}), \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots \\ \tilde{C}_{1,n_0} + \tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2} - \alpha'_{n_0}\rho^2, & \rho \in (\rho_{n_0-1}, \rho_{n_0}], \end{cases} \tag{20}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{0e}=\begin{cases}\tilde{C}_{1,j}-\tilde{C}_{2,j}\rho^{-2}-\beta_j'\rho^2, & \rho\in(\beta_0,\rho_j),\\ \tilde{C}_{1,j+1}-\tilde{C}_{2,j+1}\rho^{-2}-\beta_{j+1}'\rho^2, & \rho\in(\rho_j,\rho_{j+1}),\\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots & \dots\ \dots\ \dots\\ \tilde{C}_{1,n_0}-\tilde{C}_{2,n_0}\rho^{-2}-\beta_{n_0}'\rho^2, & \rho\in(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0}],\end{cases} \tag{21}$$

становится известным после определения $2(n_0-j+1)$ постоянных $\tilde{C}_{1,j}$, $\tilde{C}_{2,j}$, …, $\tilde{C}_{1,n_0}$, $\tilde{C}_{2,n_0}$ из системы уравнений

$$\begin{aligned}&\tilde{C}_{1,j}+\tilde{C}_{2,j}x_j=s_j^-, && \tilde{C}_{1,j}-\tilde{C}_{2,j}x_j=t_j^-,\\ &\tilde{C}_{1,j+1}+\tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1}=s_{j+1}^-, && \tilde{C}_{1,j+1}-\tilde{C}_{2,j+1}x_{j+1}=t_{j+1}^-,\\ &\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\\ &\tilde{C}_{1,n_0}+\tilde{C}_{2,n_0}=s_{n_0}, && \tilde{C}_{1,n_0}-\tilde{C}_{2,n_0}=t_{n_0}.\end{aligned}$$

Зависимости (20), (21), а также (3) и (5) задают нулевое приближение к решению задачи о пластическом равновесии, определяющему положение упругопластической границы:

$$\sigma_{rr}=\sigma_{rr}^0+\delta\sigma_{rr}'+\delta^2\dots,\qquad \sigma_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}^0+\delta\sigma_{\theta\theta}'+\delta^2\dots,$$

$$\sigma_{\rho\theta}=\sigma_{\rho\theta}^0+\delta\sigma_{\rho\theta}'+\delta^2\dots,\qquad u=u^0+\delta u'+\delta^2\dots,\qquad v=v^0+\delta v'+\delta^2\dots.$$

3. Возмущенное состояние диска. Отнесенные к σ_{sn_0} возмущения первого порядка малости $\sigma_{rr}'^e$, $\sigma_{\theta\theta}'^e$, $\sigma_{r\theta}'^e$ соответствующих компонент напряжения и отнесенные к b возмущения радиального u'^e и тангенциального v'^e смещений в первом приближении для крайней кольцевой секции $\mathcal{D}_{n_0}$ имеют следующий вид [2]:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}'^e=&\big[a_I(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0}+a_{II}(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0-1}+a_{III}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0}+\\ &+a_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0-1}\big]\cos n\theta,\\ \sigma_{\theta\theta}'^e=&\big[b_I(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0}+b_{II}(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0-1}+b_{III}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0}+\\ &+b_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0-1}\big]\cos n\theta,\\ \sigma_{r\theta}'^e=&\big[c_I(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0}+c_{II}(\rho_{n_0-1},\rho)\Phi_{n_0-1}+c_{III}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0}+\\ &+c_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho)\Psi_{n_0-1}\big]\sin n\theta,\\ u'^e=&\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}}\big[d_I(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Phi_{n_0}+d_{II}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Phi_{n_0-1}+\\ &+d_{III}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Psi_{n_0}+d_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}\big]\cos n\theta,\\ v'^e=&\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0}}\big[e_I(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Phi_{n_0}+e_{II}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Phi_{n_0-1}+\\ &+e_{III}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Psi_{n_0}+e_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho,\nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}\big]\sin n\theta.\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь известные рациональные функции $a_I(\cdot),\dots,e_{IV}(\cdot)$ [2] отображают влияние распределенных по внешнему контуру $\rho=1$ и внутреннему контуру $\rho=\rho_{n_0-1}$ периодических нагрузок $\sigma_{rr}'^e=\Phi_{n_0}\cos n\theta$, $\sigma_{r\theta}'^e=\Psi_{n_0}\sin n\theta$ и $\sigma_{rr}'^e=\Phi_{n_0-1}\cos n\theta$, $\sigma_{r\theta}'^e=\Psi_{n_0-1}\sin n\theta$ соответственно (с неопределенными амплитудами Φ_{n_0}, Ψ_{n_0}, Φ_{n_0-1} и Ψ_{n_0-1}). Приведенные зависимости следует переопределить для каждого частичного диска $\mathcal{D}_{n_0-1},\ldots,\mathcal{D}_j$, используя условия в точке разрыва: непрерывность радиального усилия $h\sigma_{rr}'^e$ и радиального смещения u'^e и непрерывность соответствующих тангенциальных величин $h\sigma_{r\theta}'^e$ и v'^e [3].

На основании непрерывности радиального и тангенциального усилий действующие на внешнем контуре $\rho=\rho_{n_0-1}$ кольцевой секции $\mathcal{D}_{n_0-1}$ соответствующие нагрузки получаем в виде

$$\sigma_{rr}'^e=(h_{n_0}/h_{n_0-1})\Phi_{n_0-1}\cos n\theta,\qquad \sigma_{r\theta}'^e=(h_{n_0}/h_{n_0-1})\Psi_{n_0-1}\sin n\theta. \tag{23}$$

Принимая, что на внутреннем контуре $\rho=\rho_{n_0-2}$ этой секции

$$\sigma_{rr}'^e=\Phi_{n_0-2}\cos n\theta,\qquad \sigma_{r\theta}'^e=\Psi_{n_0-2}\sin n\theta,$$

согласно (22), (23) определяем напряжения и смещения в ней:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}'^e=\Bigg[&a_I\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Phi_{n_0-1}+a_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\Phi_{n_0-2}+\\&+a_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Psi_{n_0-1}+\\&+a_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}}\right)\Psi_{n_0-2}\Bigg]\cos n\theta,\end{aligned}$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\begin{aligned}v'^e=\rho_{n_0-1}\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-1}}\Bigg[&e_I\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Phi_{n_0-1}+\\&+e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\Phi_{n_0-2}+\\&+e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\frac{h_{n_0}}{h_{n_0-1}}\Psi_{n_0-1}+\\&+e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-1}},\nu_{n_0-1}\right)\Psi_{n_0-2}\Bigg]\sin n\theta.\end{aligned} \tag{24}$$

Для того чтобы выразить неизвестные амплитуды Φ_{n_0-2} и Ψ_{n_0-2} через неопределенные коэффициенты Φ_{n_0}, Φ_{n_0-1}, Ψ_{n_0} и Ψ_{n_0-1}, воспользуемся непрерывностью u'^e и v'^e на окружности $\rho=\rho_{n_0-1}$. Приравнивая правые части соответствующих выражений в формулах для смещений (22) и (24) при $\rho=\rho_{n_0-1}$, получим линейную систему двух уравнений относительно Φ_{n_0-2} и Ψ_{n_0-2} с отличным от нуля определителем

$$\begin{aligned}\Delta_{n_0-2}=e_{n_0-1}^2\rho_{n_0-1}^2\Bigg[&d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)-\\&-d_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{25}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}\Phi_{n_0-2}&=q_{1,n_0-2}\Phi_{n_0}+q_{2,n_0-2}\Phi_{n_0-1}+q_{3,n_0-2}\Psi_{n_0}+q_{4,n_0-2}\Psi_{n_0-1},\\\Psi_{n_0-2}&=q_{5,n_0-2}\Phi_{n_0}+q_{6,n_0-2}\Phi_{n_0-1}+q_{7,n_0-2}\Psi_{n_0}+q_{8,n_0-2}\Psi_{n_0-1},\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$q_{1,n_0-2} = \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}}\left[d_I(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)-\right.$$

$$\left.-e_I(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})d_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right],$$

… … … … … … … … … … … …

$$q_{8,n_0-2} = \frac{\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}}{\Delta_{n_0-2}}\left[\left\{e_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})-\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1}\times\right.\right.$$

$$\left.\times e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}}1,\nu_{n_0-1}\right)\right\}d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)-$$

$$-\left\{d_{IV}(\rho_{n_0-1},\rho_{n_0-1},\nu_{n_0})-\rho_{n_0-1}e_{n_0-1}a_{n_0-1}^{-1}\times\right.$$

$$\left.\left.\times d_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right\}e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-2}}{\rho_{n_0-1}},1,\nu_{n_0-1}\right)\right].$$

Рассматривая далее кольцевую секцию $\mathcal{D}_{n_0-2}$ с контурными нагрузками

$$\sigma_{rr}'^{e} = \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}}\Phi_{n_0-2}\cos n\theta, \qquad \sigma_{r\theta}'^{e} = \frac{h_{n_0-1}}{h_{n_0-2}}\Psi_{n_0-2}\sin n\theta, \qquad \rho=\rho_{n_0-2},$$

$$\sigma_{rr}'^{e} = \Phi_{n_0-3}\cos n\theta, \qquad \sigma_{r\theta}'^{e} = \Psi_{n_0-3}\sin n\theta, \qquad \rho=\rho_{n_0-3},$$

методом математической индукции можно доказать, что при любом $k\in\in\{3,\dots,n_0-(j-1)\}$ напряженно-деформированное состояние соответствующей секции $\mathcal{D}_{n_0-(k-1)}$ описывается функциями

$$\sigma_{rr}'^{e} = \left[a_I\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Phi_{n_0-(k-1)}+\right.$$

$$+a_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\Phi_{n_0-k}+$$

$$+a_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Psi_{n_0-(k-1)}+$$

$$\left.+a_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}}\right)\Psi_{n_0-k}\right]\cos n\theta,$$

… … … … … … … … … … … …

$$v'^{e} = \rho_{n_0-(k-1)}\frac{\sigma_{sn_0}}{E_{n_0-(k-1)}}\left[e_I\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\times\right.$$

$$\times\Phi_{n_0-(k-1)}+e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\Phi_{n_0-k}+$$

$$+e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\frac{h_{n_0-(k-2)}}{h_{n_0-(k-1)}}\Psi_{n_0-(k-1)}+$$

$$\left.+e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},\frac{\rho}{\rho_{n_0-(k-1)}},\nu_{n_0-(k-1)}\right)\Psi_{n_0-k}\right]\sin n\theta, \tag{27}$$

где

$$\Phi_{n_0-k}=q_{1,n_0-k}\Phi_{n_0}+q_{2,n_0-k}\Phi_{n_0-1}+q_{3,n_0-k}\Psi_{n_0}+q_{4,n_0-k}\Psi_{n_0-1},$$

$$\Psi_{n_0-k}=q_{5,n_0-k}\Phi_{n_0}+q_{6,n_0-k}\Phi_{n_0-1}+q_{7,n_0-k}\Psi_{n_0}+q_{8,n_0-k}\Psi_{n_0-1},$$

$$q_{1,n_0-k}=\gamma_{2,n_0-k}q_{1,n_0-(k-1)}+\gamma_{4,n_0-k}q_{5,n_0-(k-1)},$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$q_{8,n_0-k}=\gamma_{7,n_0-k}+\gamma_{6,n_0-k}q_{4,n_0-(k-1)}+\gamma_{8,n_0-k}q_{8,n_0-(k-1)},$$

$$\gamma_{1,n_0-k}=\frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-2)}\Delta_{n_0-k}}\left[d_I\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\nu_{n_0-(k-2)}\right)\times\right.$$
$$\times e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)-e_I\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\right.$$
$$\left.\left.\nu_{n_0-(k-2)}\right)d_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\right],$$

$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$\gamma_{8,n_0-k}=\frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}\Delta_{n_0-k}}\left[\left\{e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\nu_{n_0-(k-2)}\right)-\right.\right.$$
$$\left.-\frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-1)}}e_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\right\}\times$$
$$\times d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)-\left\{d_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}},\right.\right.$$
$$\left.\left.\nu_{n_0-(k-2)}\right)-\frac{\rho_{n_0-(k-1)}e_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}a_{n_0-(k-1)}}d_{III}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\right\}\times$$
$$\left.\times e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\right],$$

$$\Delta_{n_0-k}=e^2_{n_0-(k-1)}\left(\frac{\rho_{n_0-(k-1)}}{\rho_{n_0-(k-2)}}\right)^2\left[d_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\times\right.$$
$$\times e_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)-d_{IV}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\times$$
$$\left.\times e_{II}\left(\frac{\rho_{n_0-k}}{\rho_{n_0-(k-1)}},1,\nu_{n_0-(k-1)}\right)\right].$$

Заметим, что при $k=n_0-(j-1)$ по определению $\rho_{n_0-k}:=\beta_0$.

4. Характеристическое уравнение. Функции (22), (24), (27) должны удовлетворять условиям

$$\sigma'^e_{rr}+A_1u'^e=0,\qquad \rho=1,\qquad \sigma'^e_{rr}=0,\qquad \rho=\beta_0,$$
$$\sigma'^e_{r\theta}-A_2\frac{du'^e}{d\theta}=0,\qquad \rho=1,\qquad \sigma'^e_{r\theta}=0,\qquad \rho=\beta_0, \tag{28}$$

где

$$A_1=d\sigma^{0e}_{rr}(1)/d\rho,\qquad A_2=\sigma^{0e}_{\theta\theta}(1)-\sigma^{0e}_{rr}(1).$$

Для получения A_1 и A_2 последовательно воспользуемся соотношениями (20), (21), (15), (17) и (18):

$$A_1=\left[A^*_{n_0}Q-B^*_{n_0}Q^*-9(\nu_{n_0}+3)\right]y+\left[A^*_{n_0}R-B^*_{n_0}R^*\right]p_i/\sigma_{sn_0}-p_e/\sigma_{sn_0}+$$
$$+\left[A^*_{n_0}S-B^*_{n_0}S^*+C^*_{n_0}\right],$$

$$A_2 = A_1 + 24y. \tag{29}$$

Остается конкретизировать вид каждого слагаемого p_{i0}, p_{e0}, $\tilde{p}_i$ и $\tilde{p}_e$ в выражениях для контурных давлений p_i и p_e и установить их зависимость от радиуса пластической зоны β_0. Предполагая, что

$$p_{i0} = \varepsilon_i \sigma_{sn_0}, \qquad p_{e0} = \varepsilon_e \sigma_{sn_0},$$

$$\tilde{p}_i = æ_i \gamma_{n_0} b^2 \omega^2, \qquad \tilde{p}_e = æ_e \gamma_{n_0} b^2 \omega^2,$$

где ε_i, ε_e, $æ_i$ и $æ_e$ – известные коэффициенты, с учетом (19) получим

$$\frac{p_i}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_i + 24æ_i \tilde{y}, \qquad \frac{p_e}{\sigma_{sn_0}} = \varepsilon_e + 24æ_e \tilde{y}, \tag{30}$$

где

$$\tilde{y} = \frac{\varepsilon_e - \varepsilon_i (RA_{n_0} - R^* B_{n_0}) - (SA_{n_0} - S^* B_{n_0})}{QA_{n_0} - Q^* B_{n_0} + D_{n_0} - 3(\nu_{n_0} + 3) - 24æ_e + 24æ_i (RA_{n_0} - R^* B_{n_0})}.$$

Удовлетворение функциями (22), (24), (27) граничным условиям (28) приводит к системе линейных однородных уравнений относительно Φ_{n_0}, Φ_{n_0-1}, Ψ_{n_0} и Ψ_{n_0-1}:

$$\Phi_{n_0} + A_1(\sigma_{sn_0}/E_{n_0})\{d_I(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} +$$
$$+ d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}\} = 0,$$

$$\Psi_{n_0} + nA_2(\sigma_{sn_0}/E_{n_0})\{d_I(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Phi_{n_0} + d_{II}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Phi_{n_0-1} +$$
$$+ d_{III}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Psi_{n_0} + d_{IV}(\rho_{n_0-1}, 1, \nu_{n_0})\Psi_{n_0-1}\} = 0,$$

$$q_{1,j-1}\Phi_{n_0} + q_{2,j-1}\Phi_{n_0-1} + q_{3,j-1}\Psi_{n_0} + q_{4,j-1}\Psi_{n_0-1} = 0,$$

$$q_{5,j-1}\Phi_{n_0} + q_{6,j-1}\Phi_{n_0-1} + q_{7,j-1}\Psi_{n_0} + q_{8,j-1}\Psi_{n_0-1} = 0. \tag{31}$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\det A(\beta_0) = 0, \tag{32}$$

где $A(\beta_0)$ – матрица системы (31). Критическое значение квадрата угловой скорости, соответствующее критическому значению радиуса пластической области β_{0*}, $\beta_{0*} \in (\beta, 1)$, получаем по формулам (19), (30) при $\beta_0 = \beta_{0*}$.

5. Числовые примеры и обсуждение результатов. Влияние неоднородности геометрических параметров и физических свойств на устойчивость проследим на примере кольцевого диска с тремя ($n_0 = 3$) кольцевыми секциями одинаковой ширины ($\rho_m = \beta + m(1-\beta)/3$, $\beta = 0.2$, $m = 0, 1, 2, 3$). Исходить будем из однородного диска ($\Sigma_1 = \Sigma_2 = 1$, $e_1 = e_2 = 1$, $\sigma_{sn_0}/E_{n_0} = 0.01$, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$) постоянной толщины ($a_1 = a_2 = 1$), свободного от контурных усилий ($\varepsilon_i = \varepsilon_e = æ_i = æ_e = 0$). Критические значения радиуса пластической зоны β_{0*} и относительной угловой скорости ω_*/q приведены в табл. 1. Каждая пара этих значений соответствует указанному в крайнем левом столбце единственному изменению исходной конфигурации параметров и определенному значению параметра возмущения n, указанному в первой строке.

Числовые результаты убеждают в «чувствительности» и «гибкости» предложенного в статье аналитического способа расчета возможной неустойчивости вращающегося упругопластического радиально неоднородного ступенчатого кольцевого диска. Возможность учета толщины и ширины составляющих кольцевых секций $\mathcal{D}_1, \ldots, \mathcal{D}_{n_0}$, их плотности и параметров упругости, а также параметров нагружения позволяет говорить об эффективности метода возмущения формы границы применительно к упругопластическим задачам рассматриваемого класса. Кроме самостоятельного значения, полученный результат в сочетании с методом разложения [3, 6, 23] имеет особую важность при расчете составных дисков произвольного профиля.

Таблица 1

	n	2	3	4	5
	β_{0*}	0.7333	0.8561	0.9053	0.9314
	ω_*/q	1.5081	1.5400	1.5484	1.5517
$\varepsilon_i = 0.1$	β_{0*}	0.7373	0.8575	0.9062	0.9322
	ω_*/q	1.4893	1.5206	1.5290	1.5322
$\varepsilon_e = 0.1$	β_{0*}	0.7453	0.8620	0.9092	0.9343
	ω_*/q	1.4131	1.4413	1.4488	1.4517
$æ_i = 0.1$	β_{0*}	0.7401	0.8592	0.9075	0.9331
	ω_*/q	1.4666	1.4962	1.5040	1.5070
$æ_e = -0.1$	β_{0*}	0.7078	0.8395	0.8941	0.9233
	ω_*/q	1.7745	1.8317	1.8482	1.8547
$\Sigma_1 = 0.9$	β_{0*}	0.7381	0.8579	0.9066	0.9324
	ω_*/q	1.4827	1.5141	1.5224	1.5256
$\Sigma_2 = 1.1$	β_{0*}	0.7333	0.8543	0.9040	0.9305
	ω_*/q	1.5561	1.5655	1.5740	1.5773
$e_1 = 1.1$	β_{0*}	0.7333	0.8561	0.9053	0.9314
	ω_*/q	1.5081	1.5400	1.5484	1.5517
$e_2 = 1.1$	β_{0*}	0.7333	0.8561	0.9053	0.9314
	ω_*/q	1.5279	1.5400	1.5484	1.5517
$\Gamma_1 = 1.1$	β_{0*}	0.7385	0.8566	0.9056	0.9317
	ω_*/q	1.5019	1.5329	1.5412	1.5444
$\Gamma_2 = 1.1$	β_{0*}	0.7375	0.8576	0.9064	0.9323
	ω_*/q	1.4877	1.5182	1.5263	1.5294
$\nu_1 = 0.5$	β_{0*}	0.7333	0.8561	0.9053	0.9314
	ω_*/q	1.5081	1.5400	1.5484	1.5517
$\nu_2 = 0.5$	β_{0*}	0.7333	0.8561	0.9053	0.9314
	ω_*/q	1.4932	1.5400	1.5484	1.5517
$\nu_3 = 0.5$	β_{0*}	0.7333	0.8555	0.9048	0.9311
	ω_*/q	1.5109	1.5385	1.5465	1.5506
$a_1 = 0.9$	β_{0*}	0.7373	0.8574	0.9062	0.9322
	ω_*/q	1.4895	1.5212	1.5296	1.5328
$a_2 = 0.9$	β_{0*}	0.7379	0.8577	0.9064	0.9323
	ω_*/q	1.4844	1.5170	1.5257	1.5290

1. *Аннин Б. Д., Черепанов Г. П.* Упруго-пластическая задача. – Новосибирск: Наука, 1983. – 240 с.
2. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1950. – Т. 1. – 900 с.
3. *Бицено К. Б., Граммель Р.* Техническая динамика: В 2 т. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1952. – Т. 2. – 640 с.
4. *Гузь А. Н., Бабич И. Ю.* Трехмерная теория устойчивости деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1985. – 280 с. – Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В 6 т. / Под общ. ред. А. Н. Гузя. – Т. 4.
5. *Гузь А. Н., Немиш Ю. Н.* Метод возмущения формы границы в механике сплошных сред. – Киев: Вища шк., 1989. – 352 с.
6. *Демьянушко И. В., Биргер И. А.* Расчет на прочность вращающихся дисков. – Москва: Машиностроение, 1978. – 247 с.
7. *Ершов Л. В., Ивлев Д. Д.* О потере устойчивости вращающихся дисков // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1958. – № 1. – С. 124–125.
8. *Ивлев Д. Д.* Механика пластических сред: В 2 т. – Т. 2: Общие вопросы. Жесткопластическое и упругопластическое состояние тел. Упрочнение. Деформационные теории. Сложные среды. – Москва: Физматлит, 2002. – 448 с.
9. *Ивлев Д. Д.* О потере несущей способности вращающихся дисков, близких к круговому // Изв. АН СССР. Отд. техн. наук. – 1957. – № 1. – С. 141–144.
10. *Ивлев Д. Д., Ершов Л. В.* Метод возмущений в теории упругопластического тела. – Москва: Наука, 1978. – 208 с.
11. *Ильюшин А. А.* Пластичность: В 2 ч. – Ч. 1: Упруго-пластические деформации. – Москва–Ленинград: Гостехтеориздат, 1948. – 378 с.
12. *Ишлинский А. Ю., Ивлев Д. Д.* Математическая теория пластичности. – Москва: Физматлит, 2001. – 704 с.
13. *Кинасошвили Р. С.* Расчет на прочность дисков турбомашин. – Москва: Оборонгиз, 1954. – 144 с.
14. *Лила Д. М.* Механизм потери устойчивости вращающегося составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 3. – С. 111–120.
    То же: *Lila D. M.* Mechanism of the loss of stability of a rotating composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – **194,** No. 3. – P. 257–269.
15. *Лила Д. М.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кольцевого диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56,** № 3. – С. 81–94.
16. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* О неустойчивости вращающегося упругопластического составного плоского кругового диска // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2012. – **55,** № 1. – С. 145–158.
    То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A.* On instability of a rotating elastoplastic composite plane circular disk // J. Math. Sci. – 2013. – **190,** No. 6. – P. 804–822.
17. *Лила Д. М., Мартынюк А. А.* Развитие неустойчивости вращающегося упругопластического кольцевого диска // Прикл. механика. – 2012. – **48,** № 2. – С. 127–136.
    То же: *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Development of instability in a rotating elastoplastic annular disk // Int. Appl. Mech. – 2012. – **48**, No. 2. – P. 224–233.
18. *Малинин Н. Н.* Прикладная теория пластичности и ползучести. – Москва: Машиностроение, 1975. – 400 с.
19. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел: В 2 т. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1954. – Т. 1. – 648 с.
20. *Рабинович В. П.* Прочность турбинных дисков. – Москва: Машиностроение, 1966. – 151 с.
21. *Соколовский В. В.* Теория пластичности. – Москва: Высш. шк., 1969. – 608 с.
22. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Analysis of dynamics of boundary shape perturbation of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous plane circular disk: Analytical approach // Appl. Math. – 2012. – **3**, No. 5. – P. 451–456.
23. *Lila D. M., Martynyuk A. A.* Stability loss of rotating elastoplastic discs of the specific form // Appl. Math. – 2011. – **2**, No. 5. – P. 579–585.
24. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks – Part I: Analytical and numerical stability analyses // Eur. J. Mech. **A**/Solid. – 2009. – **28**, No. 1. – P. 36–44.
25. *Mazière M., Besson J., Forest S., Tanguy B., Chalons H., Vogel F.* Overspeed burst of elastoviscoplastic rotating disks: Part II – Burst of a superalloy turbine disk // Eur. J. Mech. **A**/Solid. – 2009. – **28**, No. 3. – P. 428–432.

ВТРАТА СТІЙКОСТІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО РАДІАЛЬНО НЕОДНОРІДНОГО СТУПІНЧАСТОГО КІЛЬЦЕВОГО ДИСКА, ЩО ОБЕРТАЄТЬСЯ

Запропоновано спосіб дослідження методом малого параметра можливої втрати стійкості радіально неоднорідного ступінчастого кільцевого кругового диска, що обертається. Одержано у першому наближенні характеристичне рівняння відносно критичного радіуса пластичної зони. Чисельно знайдено значення критичної кутової швидкості обертання при різних параметрах диска.

STABILITY LOSS OF ROTATING ELASTOPLASTIC RADIALLY INHOMOGENEOUS STEPPED ANNULAR DISK

A way of investigation the possible stability loss of a rotating elastoplastic radially inhomogeneous stepped annular circular disk by using small parameter method is proposed. A characteristic equation for a critical radius of a plastic zone is obtained in the first approximation. The values of critical angular rotational velocity for different disk parameters are determined numerically.

Черкасск. нац. ун-т
им. Б. Хмельницкого, Черкассы

Получено
09.03.12