УДК 539.3

В. М. Флячок

ВАРІАЦІЙНА ТЕОРЕМА ДИНАМІЧНОЇ ЗАДАЧІ ВЗАЄМОЗВ'ЯЗАНОЇ МЕХАНОТЕРМОДИФУЗІЇ НЕОДНОРІДНИХ АНІЗОТРОПНИХ ОБОЛОНОК З ДИСТОРСІЯМИ

Для неоднорідних анізотропних оболонок з дисторсіями сформульовано і доведено загальну варіаційну теорему динамічної лінійної задачі взаємозв'язаної механотермодифузії з початковими умовами.

Варіаційні принципи широко використовуються як для розвитку нових математичних моделей, так і для побудови наближених методів розв'язування крайових задач теорії пружності [2, 10]. Завдяки працям Біо [1] варіаційні принципи ізотермічної пружності були узагальнені на теорію зв'язаної термопружності для тривимірних задач [6, 7, 9] та задач теорії оболонок [4, 5, 12]. Проте в цих роботах динамічні задачі у варіаційній постановці формулювалися без початкових умов. Підходи до побудови варіаційних принципів, запропоновані у роботах Гуртіна [8], дозволили формулювати крайові динамічні задачі термопружності у варіаційній формі як задачі з початковими умовами [11]. Однак в теорії оболонок такі підходи ще не знайшли широкого застосування.

У цій статті запропоновано варіаційне формулювання динамічної задачі механотермодифузії з початковими умовами для неоднорідних анізотропних оболонок з дисторсіями.

Розглянемо оболонку сталої товщини $2h$. Точки тривимірного простору оболонки віднесемо до нормальної криволінійної координатної системи $\mathbf{x} = \{x^\alpha, z\}$, $\alpha = 1,2$, де $z = 0$ позначає серединну поверхню оболонки G, обмежену контуром g. Матеріал оболонки вважатимемо неоднорідним і анізотропним двокомпонентним твердим розчином, який має в кожній точці лише одну площину симетрії стосовно фізико-механічних властивостей. Нехай у початковий момент часу оболонка перебуває у природному стані з температурою T_0. З моменту часу $\tau > 0$ під дією зовнішнього поверхневого силового навантаження $\mathbf{q} = \{q^\alpha, q^3\}$, $\mathbf{m} = \{m^\alpha, m^3\}$, початкових деформацій $\boldsymbol{\varepsilon}^0 = \{\varepsilon^0_{\alpha\beta}, \varepsilon^0_{\alpha 3}, \varepsilon^0_{33}\}$, $\boldsymbol{æ}^0 = \{æ^0_{\alpha\beta}, æ^0_{\alpha 3}\}$ [3], тепло- і масообміну з зовнішнім середовищем, внутрішніх джерел тепла $W^t_{(n)}$ і маси $W^c_{(n)}$, $n = 1,2$, а також контурних силових і термоконцентраційних факторів в оболонці виникнуть: поле узагальнених переміщень $\mathbf{u} = \{u^\alpha, u^3\}$, $\boldsymbol{\gamma} = \{\gamma^\alpha, \gamma^3\}$, температурне поле $T_{(n)}$ і ентропія $S_{(n)}$, хімічний потенціал $\mathcal{M}_{(n)}$ і концентрація $C_{(n)}$ розчиненої речовини, зусилля-моменти $\mathbf{N} = \{N^{\alpha\beta}, N^{\alpha 3}, N^{33}\}$, $\mathbf{M} = \{M^{\alpha\beta}, M^{\alpha 3}\}$ і деформації $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{\alpha\beta}, \varepsilon_{\alpha 3}, \varepsilon_{33}\}$, $\boldsymbol{æ} = \{æ_{\alpha\beta}, æ_{\alpha 3}\}$, вектори потоків ентропії $\mathbf{H}_{(n)} = \{H^\alpha_{(n)}, H^3_{(n)}\}$ і маси $\mathbf{P}_{(n)} = \{P^\alpha_{(n)}, P^3_{(n)}\}$. У роботі вживаємо загальноприйняті в теорії оболонок позначення [4, 5]. Перелічені величини віднесені до серединної поверхні і є функціями від координат x^α і часу τ. Якщо вважати, що ці функції мають необхідні властивості гладкості, то фізико-механічний стан оболонки з урахуванням процесу термодифузії описується

в області G при $\tau > 0$:

– *рівняннями руху*

$$\nabla_\beta N^{\beta\alpha} - b^\alpha_\beta N^{\beta 3} + q^\alpha = \ddot{I}^\alpha, \qquad \nabla_\beta N^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} N^{\beta\alpha} + q^3 = \ddot{I}^3,$$

$$\nabla_\beta M^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3} + m^\alpha = \ddot{J}^\alpha, \qquad \nabla_\beta M^{\beta 3} + b_{\alpha\beta} M^{\beta\alpha} - N^{33} + m^3 = \ddot{J}^3; \qquad (1)$$

 ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – 57, № 2. – С. 66-72.

– *рівняннями збереження енергії і маси*

$$\dot{S}_{(n)} = -\nabla_\alpha H^\alpha_{(n)} - \frac{2n-1}{2h}\left[H^+_{(3)} + (-1)^{3-n} H^-_{(3)} - 2(n-1)H^3_{(1)}\right] + W^T_{(n)},$$

$$\dot{C}_{(n)} = -\nabla_\alpha P^\alpha_{(n)} - \frac{2n-1}{2h}\left[P^+_{(3)} + (-1)^{3-n} P^-_{(3)} - 2(n-1)P^3_{(1)}\right] + W^C_{(n)}; \qquad (2)$$

– *кінетичними рівняннями*

$$\sum_m^2 T_0 k^{(n,m)}_{\alpha\beta} H^\alpha_{(m)} + \frac{2h}{2n-1}\nabla_\beta T_{(n)} = 0,$$

$$\sum_m^2 T_0 k^{(n,m)}_{33} H^3_{(m)} + 2(2-n)T_{(2)} = 0,$$

$$\sum_m^2 T_0 K^{(n,m)}_{\alpha\beta} P^\alpha_{(m)} + \frac{2h}{2n-1}\nabla_\beta \mathcal{M}_{(n)} = 0,$$

$$\sum_m^2 T_0 K^{(n,m)}_{33} P^3_{(m)} + 2(2-n)\mathcal{M}_{(2)} = 0; \qquad (3)$$

в області $\bar{G} = G \cup g$ при $\tau > 0$:

– *геометричними співвідношеннями*

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta)}{2} - b_{\alpha\beta}u_3, \qquad \varepsilon_{\alpha 3} = \gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b^\beta_\alpha u_\beta,$$

$$æ_{\alpha\beta} = \frac{(\nabla_\beta \gamma_\alpha + \nabla_\alpha \gamma_\beta)}{2} - b_{\alpha\beta}\gamma_3, \qquad æ_{\alpha 3} = \nabla_\alpha \gamma_3, \qquad \varepsilon_{33} = \gamma_3; \qquad (4)$$

– *рівняннями стану*

$$N^{\nu\alpha} = B^{\alpha\nu\delta\gamma}_{(1)}(\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + B^{\alpha\nu\delta\gamma}_{(2)}(æ_{\delta\gamma} - æ^0_{\delta\gamma}) + B^{\alpha\nu 33}_{(1)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) - $$

$$- \sum_m^2 \left(\beta^{\nu\alpha}_{(m)} S_{(m)} + \gamma^{\nu\alpha}_{(m)} C_{(m)}\right),$$

$$N^{33} = B^{33\delta\gamma}_{(1)}(\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + B^{33\delta\gamma}_{(2)}(æ_{\delta\gamma} - æ^0_{\delta\gamma}) + B^{3333}_{(1)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) - $$

$$- \sum_m^2 \left(\beta^{33}_{(m)} S_{(m)} + \gamma^{33}_{(m)} C_{(m)}\right),$$

$$M^{\nu\alpha} = B^{\alpha\nu\delta\gamma}_{(2)}(\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + B^{\alpha\nu\delta\gamma}_{(3)}(æ_{\delta\gamma} - æ^0_{\delta\gamma}) + B^{\alpha\nu 33}_{(2)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) - $$

$$- h\sum_m^2 \left(\beta^{\nu\alpha}_{(m+1)} S_{(m)} + \gamma^{\nu\alpha}_{(m+1)} C_{(m)}\right),$$

$$N^{\alpha 3} = B^{\alpha 3\delta 3}_{(1)}(\varepsilon_{\delta 3} - \varepsilon^0_{\delta 3}) + B^{\alpha 3\delta 3}_{(2)}(æ_{\delta 3} - æ^0_{\delta 3}),$$

$$M^{\alpha 3} = B^{\alpha 3\delta 3}_{(2)}(\varepsilon_{\delta 3} - \varepsilon^0_{\delta\gamma}) + B^{\alpha 3\delta 3}_{(3)}(æ_{\delta 3} - æ^0_{\delta 3}),$$

$$\frac{2h}{2n-1}T_{(n)} = \sum_m^2 \left(b_{(n,m)} S_{(m)} + d^s_{(n,m)} C_{(m)}\right) - \left[\beta^{\alpha\delta}_{(n)}(\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon^0_{\alpha\delta}) + \right.$$

$$\left. + \beta^{33}_{(n)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + h\beta^{\alpha\delta}_{(n+1)}(æ_{\alpha\delta} - æ^0_{\alpha\delta})\right],$$

$$\frac{2h}{2n-1}\mathcal{M}_{(n)} = \sum_m^2 \left(d^s_{(n,m)} S_{(m)} + d^c_{(n,m)} C_{(m)}\right) - \left[\gamma^{\alpha\delta}_{(n)}(\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon^0_{\alpha\delta}) + \right.$$

$$\left. + \gamma^{33}_{(n)}(\varepsilon_{33} - \varepsilon^0_{33}) + h\gamma^{\alpha\delta}_{(n+1)}(æ_{\alpha\delta} - æ^0_{\alpha\delta})\right]; \qquad (5)$$

в області G:

– *початковими умовами при* $\tau = 0$

$$u_i = u_i^0, \quad \gamma_i = \gamma_i^0, \quad \dot{u}_i = \overline{u}_i^0, \quad \dot{\gamma}_i = \overline{\gamma}_i^0,$$

$$S_{(n)} = S_{(n)}^0, \qquad C_{(n)} = C_{(n)}^0; \tag{6}$$

на контурі g $(g = g_N \cup g_u = g_T \cup g_h = g_{\mathcal{M}} \cup g_p)$:

– *граничними умовами*

$$N^{\alpha i}\nu_\alpha = \bar{N}^i, \quad M^{\alpha i}\nu_\alpha = \bar{M}^i, \quad x^\alpha \in g_N,$$

$$u_i = \bar{u}_i, \qquad \gamma_i = \bar{\gamma}_i, \quad x^\alpha \in g_u,$$

$$T_{(n)} = \bar{T}_{(n)}, \qquad x^\alpha \in g_T,$$

$$\mathcal{M}_{(n)} = \bar{\mathcal{M}}_{(n)}, \qquad x^\alpha \in g_{\mathcal{M}},$$

$$H_{(n)}^\alpha \nu_\alpha = \bar{H}_{(n)}, \qquad x^\alpha \in g_h,$$

$$P_{(n)}^\alpha \nu_\alpha = \bar{P}_{(n)}, \qquad x^\alpha \in g_p. \tag{7}$$

Тут

$$\left\{T_{(n)}, H_{(n)}^i, S_{(n)}, \mathcal{M}_{(n)}, P_{(n)}^i, C_{(n)}\right\} = \frac{2n-1}{2h}\int_{-h}^{h}\{t, s^i, s, \tilde{\mu}, p^i, c\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} dz,$$

$$H_3^\pm = s^3\Big|_{z=\pm h}, \qquad P_3^\pm = p^3\Big|_{z=\pm h},$$

$$I^i = \rho_{(1)}u^i + \rho_{(2)}\gamma^i, \qquad J^i = \rho_{(2)}u^i + \rho_{(3)}\gamma^i,$$

$$\left\{k_{ij}^{(n,m)}, K_{ij}^{(n,m)}, b_{(n,m)}, d_{(n,m)}^s, d_{(n,m)}^c\right\} =$$

$$= \int_{-h}^{h}\left\{k_{ij}^T, k_{ij}^C, \frac{T_0}{C^{(e,c)}}, d_s^{(e,c)}, d_c^{(e,s)}\right\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n+m-2} dz, \quad n, m = 1, 2,$$

$$\left\{\beta_{(n)}^{ij}, \gamma_{(n)}^{ij}, W_{(n)}^T, W_{(n)}^C\right\} = \int_{-h}^{h}\{\beta'^{ij}, \gamma'^{ij}, w_t', w_c'\}\left(\frac{z}{h}\right)^{n-1} dz,$$

$$d_c^{(e,s)} = d_c^{(e,T)} + \frac{T_0}{C^{(e,c)}}\left(d_T^{(e,c)}\right)^2, \qquad \beta'^{ij} = \frac{T_0}{C^{(e,c)}}\beta^{ij},$$

$$\gamma'^{ij} = \gamma^{ij} - \frac{T_0 d_T^{(e,c)}}{C^{(e,c)}}\beta^{ij}, \quad w_t' = \frac{w_t}{T_0}, \quad w_c' = \frac{w_c}{T_0}, \quad d_s^{(e,c)} = -\frac{T_0 d_T^{(e,c)}}{C^{(e,c)}},$$

$$B_{(r)}^{ijk\ell} = \int_{-h}^{h} C'^{ipkq}\delta_a^j\delta_b^\ell \mu\mu_p^a\mu_q^b z^{r-1}\, dz,$$

$$B_{(r)}^{ijk\ell} = B_{(r)}^{k\ell ij}, \qquad B_{(r)}^{\alpha\beta\lambda 3} = B_{(r)}^{333\alpha} = 0, \qquad r = 1, 2, 3,$$

$$C'^{ijk\ell} = C^{ijk\ell} + \beta'^{ij}\beta^{k\ell}, \qquad \beta^{\nu\delta} = C^{\nu\delta\gamma\tau}\alpha_{\gamma\tau}^T + C^{\nu\delta 33}\alpha_{33}^T,$$

$$\beta^{33} = C^{33\gamma\tau}\alpha_{\gamma\tau}^T + C^{3333}\alpha_{33}^T, \qquad \gamma^{\nu\delta} = C^{\nu\delta\gamma\tau}\alpha_{\gamma\tau}^c + C^{\nu\delta 33}\alpha_{33}^c,$$

$$\gamma^{33} = C^{33\gamma\tau}\alpha_{\gamma\tau}^c + C^{3333}\alpha_{33}^c, \qquad N^i = N^{\alpha i}\nu_\alpha, \qquad M^i = M^{\alpha i}\nu_\alpha,$$

$$H_{(n)} = H^{\alpha}_{(n)}\nu_{\alpha}, \quad P_{(n)} = P^{\alpha}_{(n)}\nu_{\alpha}, \quad \mu = \det(\mu^{\beta}_{\alpha}), \quad \mu^{\beta}_{\alpha} = \delta^{\beta}_{\alpha} - zb^{\beta}_{\alpha},$$

$$\rho_{(r)} = \int_{-h}^{h} \mu\rho z^{r-1}\,dz, \qquad \{N^{ij}, M^{ij}\} = \int_{-h}^{h} \mu\sigma^{ab}\delta^{i}_{\alpha}\mu^{j}_{b}\{1,z\}\,dz,$$

$$\{q^{i}, m^{i}\} = \int_{-h}^{h} \mu\mu^{i}_{a}F^{a}\{1,z\}\,dz + \left[\mu\mu^{i}_{a}\sigma^{a3}\{1,z\}\right]^{+h}_{-h}, \tag{8}$$

$\sigma^{ij}(\mathbf{x},\tau)$ – компоненти тензора напружень; $F^{\alpha}(\mathbf{x},\tau)$ – компоненти вектора масових сил; $C^{ijk\ell}(\mathbf{x})$ – ізотермічні компоненти тензора жорсткості анізотропного тіла; $\alpha^{T}_{k\ell}(\mathbf{x})$ і $\alpha^{c}_{k\ell}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів температурного і концентраційного лінійного розширення; $k^{T}_{ij}(\mathbf{x})$ і $k^{C}_{ij}(\mathbf{x})$ – компоненти тензорів теплового і концентраційного опору; $C^{(e,c)}(\mathbf{x})$ – питома теплоємність за сталої деформації; $d^{(e,c)}_{T}$ і $d^{(e,T)}_{c}$ – коефіцієнти, які характеризують залежність хімічного потенціалу $\tilde{\mu}(\mathbf{x},\tau)$ від температури $t(\mathbf{x},\tau)$ і концентрації $c(\mathbf{x},\tau)$ розчиненої речовини; $\rho(\mathbf{x})$ – густина матеріалу; $s^{i}(\mathbf{x},\tau)$ і $p^{i}(\mathbf{x},\tau)$ – компоненти векторів потоку ентропії і маси; $w_{t}(\mathbf{x},\tau)$ і $w_{c}(\mathbf{x},\tau)$ – інтенсивність теплових і концентраційних джерел; ν_{α} – компоненти одиничного вектора нормалі до контуру g; ∇_{α} – символ коваріантної похідної в метриці серединної поверхні; b^{β}_{α} – поверхневий тензор кривини; δ^{j}_{i} – символ Кронекера; індекси, позначені грецькими буквами, набувають значень $1, 2$, а латинськими – $1, 2, 3$; індекси n і m у дужках не мають тензорного характеру і набувають значень $1, 2$; використовуємо звичайне правило підсумовування за індексами, що повторюються; крапкою зверху позначено частинну похідну за часом.

Фізико-механічний стан оболонки, що описується множиною функцій $\mathcal{R} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, T_{(n)}, H^{i}_{(n)}, \mathcal{M}_{(n)}, P^{i}_{(n)}, S_{(n)}, C_{(n)}\}$, які визначені в області $\overline{G}$ при $\tau \ge 0$ і мають такі властивості: $u_{i}, \gamma_{i} \in C^{1,2}$; $\varepsilon_{ij}, æ_{ij} \in C^{0,0}$; $N^{ij}, M^{ij} \in C^{1,0}$; $T_{(n)}, \mathcal{M}_{(n)} \in C^{1,0}$; $S_{(n)}, C_{(n)} \in C^{0,1}$; $H^{i}_{(n)}, P^{i}_{(n)} \in C^{1,0}$, будемо називати *допустимим станом.* Тоді розв'язком динамічної зв'язаної задачі термодифузії в неоднорідних анізотропних оболонках буде такий допустимий стан, який задовольняє рівняння (1)–(5), початкові (6) і граничні (7) умови.

З метою врахування початкових умов при формулюванні відповідної варіаційної задачі використаємо методику Гуртіна [8] і за допомогою перетворення Лапласа включимо ці умови у рівняння поля. Безпосередньою перевіркою можна переконатися у правильності такої теореми.

Теорема 1. *Функції* $\mathbf{u}$, $\boldsymbol{\gamma}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{M}$, $H^{i}_{(n)}, P^{i}_{(n)}$, $S_{(n)}, C_{(n)}$ *задовольняють рівняння* (1), (2) *і початкові умови* (6) *тоді й тільки тоді, коли вони в області* G *при* $\tau \ge 0$ *задовольняють систему рівнянь*

$$g * (\nabla_{\beta}N^{\beta\alpha} - b^{\alpha}_{\beta}N^{\beta 3}) + \psi^{\alpha}_{N} = I^{\alpha},$$

$$g * (\nabla_{\beta}N^{\beta 3} + b_{\alpha\beta}N^{\beta\alpha}) + \psi^{3}_{N} = I^{3},$$

$$g * (\nabla_{\beta}M^{\beta\alpha} - N^{\alpha 3}) + \psi^{\alpha}_{M} = J^{\alpha},$$

$$g * (\nabla_{\beta}M^{\beta 3} + b_{\alpha\beta}M^{\beta\alpha} - N^{33}) + \psi^{3}_{M} = J^{3}, \tag{9}$$

$$S_{(n)} = \psi_{(n)}^{T} - g' * \left(\nabla_\alpha H_{(n)}^{\alpha} + \frac{2n-1}{2h}\left[H_{(3)}^{+} + (-1)^{3-n} H_{(3)}^{-} - 2(n-1)H_{(1)}^{3}\right]\right),$$

$$C_{(n)} = \psi_{(n)}^{C} - g' * \left(\nabla_\alpha P_{(n)}^{\alpha} + \frac{2n-1}{2h}\left[P_{(3)}^{+} + (-1)^{3-n} P_{(3)}^{-} - 2(n-1)P_{(1)}^{3}\right]\right), \quad (10)$$

а функції g, g', ψ_N^i, ψ_M^i, $\psi_{(n)}^T$, $\psi_{(n)}^C$ *задані для всіх* $(x^\alpha, \tau) \in \overline{G} \times [0, \infty)$ *співвідношеннями*

$$\psi_N^i = [g * q^i](x^\alpha, \tau) + \tau \dot{I}_0^i(x^\alpha) + I_0^i(x^\alpha)\,,$$

$$\psi_M^i = [g * m^i](x^\alpha, \tau) + \tau \dot{J}_0^i(x^\alpha) + J_0^i(x^\alpha)\,,$$

$$\psi_{(n)}^T = [g' * W_{(n)}'^T](x^\alpha, \tau) + S_{(n)}^0(x^\alpha)\,,$$

$$\psi_{(n)}^C = [g' * W_{(n)}'^C](x^\alpha, \tau) + C_{(n)}^0(x^\alpha)\,,$$

$$g(\tau) = \tau, \qquad g'(\tau) = 1\,.$$

Тут символом «» позначено інтеграл згортки;* I_0^i, J_0^i, $S_{(n)}^0$, $C_{(n)}^0$ *– значення відповідних величин у початковий момент часу.*

Отже, допустимий стан $\mathcal{R} = \left\{\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, T_{(n)}, H_{(n)}^i, \mathcal{M}_{(n)}, P_{(n)}^i, S_{(n)}, C_{(n)}\right\}$ буде розв'язком зв'язаної задачі термодифузії в неоднорідних анізотропних оболонках тоді й тільки тоді, коли він буде задовольняти рівняння (3)–(5), (9), (10) і граничні умови (7).

Покажемо, що сформульована крайова задача допускає еквівалентну варіаційну постановку. Розглянемо функціонал $\Omega\{\mathcal{R}\}$, який на множині $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ ($\mathcal{R} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$) усіх допустимих станів для кожного $\tau \ge 0$ заданий виразом

$$\begin{aligned}
\Omega\{\mathcal{R}\} = &\iint_G g * U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}, S_{(n)}, C_{(n)})\, dG - \\
&- \iint_G g * \Big\{ N^{\beta\alpha} * \left[\varepsilon_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha u_\beta + \nabla_\beta u_\alpha - 2b_{\alpha\beta})\tfrac{1}{2}\right] + N^{\alpha 3} * \big[\varepsilon_{\alpha 3} - \\
&- (\gamma_\alpha + \nabla_\alpha u_3 + b_\alpha^\nu u_\nu)\big] + M^{\beta\alpha} * \Big[æ_{\alpha\beta} - (\nabla_\alpha \gamma_\beta + \nabla_\beta \gamma_\alpha - \\
&- 2b_{\alpha\beta})\tfrac{1}{2}\Big] + M^{\alpha 3} * [æ_{\alpha 3} - \nabla_\alpha \gamma_3] + N^{33} * (\varepsilon_{33} - \gamma_3) \Big\} dG + \\
&+ \frac{1}{2} \iint_G (I^i * u_i + J^i * \gamma_i)\, dG - \iint_G (\psi_N^i * u_i + \psi_M^i * \gamma_i)\, dG - \\
&- \iint_G g * \sum_n^2 \frac{2h}{2n-1}\left(S_{(n)} * T_{(n)} + C_{(n)} * \mathcal{M}_{(n)}\right) dG + \\
&+ \iint_G g * g' * \sum_n^2 \Big[\frac{2h}{2n-1}\left(\nabla_\alpha T_{(n)} * H_{(n)}^\alpha + \nabla_\alpha \mathcal{M}_{(n)} * P_{(n)}^\alpha\right) + \\
&+ 2\left(T_{(2)} * H_{(1)}^3 + \mathcal{M}_{(2)} * P_{(1)}^3\right)\Big] dG + \\
&+ \frac{T_0}{2} \iint_G g * g' * \sum_{n,m}^2 \big[k_{\alpha\beta}^{(n,m)} H_{(n)}^\alpha * H_{(m)}^\beta + k_{33}^{(n,m)} H_{(n)}^3 * H_{(m)}^3 + \\
&+ K_{\alpha\beta}^{(n,m)} P_{(n)}^\alpha * P_{(m)}^\beta + K_{33}^{(n,m)} P_{(n)}^3 * P_{(m)}^3\big] dG +
\end{aligned}$$

$$+\iint_G g*\sum_n^2 \frac{2h}{2n-1}\left(\psi_{(n)}^T * T_{(n)} + \psi_{(n)}^C * \mathcal{M}_{(n)}\right) dG -$$
$$-\iint_G g*g'*\sum_n^2 \left(T_{(n)} * [H_3^+ + (-1)^{3-n} H_3^-] +\right.$$
$$\left.+\mathcal{M}_{(n)} * [P_3^+ + (-1)^{3-n} P_3^-]\right) dG -$$
$$-\int_{g_u} g*[N^i * (u_i - \bar{u}_i) + M^i * (\gamma_i - \bar{\gamma}_i)]\, dg -$$
$$-\int_{g_N} g*(\bar{N}^i * u_i + \bar{M}^i * \gamma_i)\, dg -$$
$$-\sum_n^2 \frac{2h}{2n-1} g*g' \left\{ \int_{g_T} (T_{(n)} - \bar{T}_{(n)}) * H_{(n)}^{\alpha} \nu_\alpha \, dg + \right.$$
$$\left. + \int_{g_h} T_{(n)} * \bar{H}_{(n)}\, dg \right\} -$$
$$-\sum_n^2 \frac{2h}{2n-1} g*g' \left\{ \int_{g_{\mathcal{M}}} (\mathcal{M}_{(n)} - \bar{\mathcal{M}}_{(n)}) * P_{(n)}^{\alpha} \nu_\alpha \, dg + \right.$$
$$\left. + \int_{g_p} \mathcal{M}_{(n)} * \bar{P}_{(n)}\, dg \right\}, \tag{11}$$

де

$$U(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}, S_{(n)}, C_{(n)}) = \frac{1}{2}\{B_{(1)}^{\alpha\beta\delta\gamma} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^0) * (\varepsilon_{\delta\gamma} - \varepsilon_{\delta\gamma}^0) + B_{(1)}^{\alpha 3\delta 3} (\varepsilon_{\alpha 3} -$$
$$- \varepsilon_{\alpha 3}^0) * (\varepsilon_{\delta 3} - \varepsilon_{\delta 3}^0) + 2B_{(1)}^{\alpha\beta 33} (\varepsilon_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}^0) * (\varepsilon_{33} -$$
$$- \varepsilon_{33}^0) + B_{(1)}^{3333} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) * (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + 2B_{(2)}^{\alpha\beta\delta\gamma} (\varepsilon_{\alpha\beta} -$$
$$- \varepsilon_{\alpha\beta}^0) * (æ_{\delta\gamma} - æ_{\delta\gamma}^0) + 2B_{(2)}^{\alpha 3\delta 3} (\varepsilon_{\alpha 3} - \varepsilon_{\alpha 3}^0) * (æ_{\delta 3} - æ_{\delta 3}^0) +$$
$$+ 2B_{(2)}^{\alpha\beta 33} (æ_{\alpha\beta} - æ_{\alpha\beta}^0) * (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + B_{(3)}^{\alpha\beta\delta\gamma} (æ_{\alpha\beta} -$$
$$- æ_{\alpha\beta}^0) * (æ_{\delta\gamma} - æ_{\delta\gamma}^0) + B_{(3)}^{\alpha 3\delta 3} (æ_{\alpha 3} - æ_{\alpha 3}^0) * (æ_{\delta 3} - æ_{\delta 3}^0)\} -$$
$$- \sum_n^2 \{[\beta_{(n)}^{\alpha\delta} (\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon_{\alpha\delta}^0) + \beta_{(n)}^{33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) + h\beta_{(n+1)}^{\alpha\delta} (æ_{\alpha\delta} -$$
$$- æ_{\alpha\delta}^0)] * S_{(n)} + [\gamma_{(n)}^{\alpha\delta} (\varepsilon_{\alpha\delta} - \varepsilon_{\alpha\delta}^0) + \gamma_{(n)}'^{33} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{33}^0) +$$
$$+ h\gamma_{(n+1)}^{\alpha\delta} (æ_{\alpha\delta} - æ_{\alpha\delta}^0)] * C_{(n)}\} + \frac{1}{2} \sum_{n,m}^2 \left(b_{(n,m)} S_{(n)} * S_{(n)} +\right.$$
$$\left. + d_{(n,m)}^c C_{(n)} * C_{(n)} + 2d_{(n,m)}^s S_{(n)} * C_{(n)}\right).$$

Щодо функціонала (11) справджується загальна варіаційна

Теорема 2. *Для того щоб деякий допустимий стан* $\mathcal{R} = \{\mathbf{u}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{æ}, \mathbf{N}, \mathbf{M}, T_{(n)}, H_{(n)}^i, \mathcal{M}_{(n)}, P_{(n)}^i, S_{(n)}, C_{(n)}\}$ *із множини* $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ *усіх допустимих станів,* $\mathcal{R} \in \boldsymbol{\mathcal{R}}$*, був розв'язком задачі* (3)–(5), (7), (9), (10), *необхідно і достатньо, щоб на* $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ *при всіх* $\tau \ge 0$ *виконувалася умова* $\delta\Omega\{\mathcal{R}\} = 0$.

Для доведення теореми потрібно проваріювати функціонал (11) за всіма функціональними аргументами, використовуючи властивості згортки і теорему Ґаусса – Остроградського. Отже, серед усіх допустимих станів дійсно має місце той, за якого функціонал (11) досягає стаціонарного значення.

При відповідних додаткових умовах з наведеного загального функціонала можна одержати ряд часткових варіаційних принципів для задач динаміки механотермодифузії неоднорідних анізотропних оболонок з початковими деформаціями.

Висновки. Сформульовано загальний варіаційний принцип лінійної динамічної зв'язаної задачі механотермодифузії для неоднорідних анізотропних оболонок з дисторсіями, який можна розглядати як аналог принципу Ху-Васідзу у лінійній теорії пружності. За допомогою методики Гуртіна і перетворення Лапласа у функціонал явно включені початкові умови. Використовуючи теорію перетворення варіаційних задач, із загального принципу можна одержати низку часткових варіаційних принципів.

1. *Био М.* Вариационные принципы в теории теплообмена. – Москва: Энергия, 1975. – 208 с.
   Те саме: *Biot M.* Variational principles in heat transfer. – London: Oxford Univ. Press, 1970.
2. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – Москва: Мир, 1987. – 542 с.
   Те саме: *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. – Oxford: Pergamon Press, 1982.
3. *Кушнір Р. М., Николишин М. М., Осадчук В. А.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: СПОЛОМ, 2003. – 320 с.
4. *Подстригач Я. С., Швец Р. Н.* Термоупругость тонких оболочек. – Киев: Наук. думка, 1978. – 344 с.
5. *Флячок В. М.* О вариационных уравнениях термоупругости неоднородных анизотропных оболочек // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1996. – **39**, № 1. – С. 91–96.
   Те саме: *Flyachok V. M.* On the variational equations of thermoelasticity for inhomogeneous anisotropic shells // J. Math. Sci. – 1997. – **86**, No. 2. – P. 2600–2604.
6. *Altay G., Dökmeci M. C.* Variational principles and vibrations of a functionally graded plate // Comput. Struct. – 2005. – **83**, No. 15-16. – P. 1340–1354.
7. *Cannarozzi A. A., Ubertini F.* A mixed variational method for linear coupled thermoelastic analysis // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 4. – P. 717–739.
8. *Gurtin M. E.* Variational principles for linear elastodynamics // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1964. – **16**, No. 1. – P. 34–50.
9. *He J.-H.* Hamilton principle and generalized variational principles of linear thermopiezoelectricity // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2001. – **68**, No. 4. – P. 666–667.
10. *Hetnarski R. B., Ignaczak J.* The mathematical theory of elasticity. – Boca Raton: CRC Press, 2011. – 836 p.
11. *Nickell R. E., Sackman J. L.* Variational principles for linear coupled thermoelasticity // Q. Appl. Math. – 1968. – **26**, No. 1. – P. 11–26.
12. *Ostapski W., Hnativ Y., Zozulyak Y.* Construction of a refined mathematical model of thermoelastic shells by a variational method// J. Therm. Stresses. – 2006. – **29**, No. 3. – P. 217–227.

ВАРИАЦИОННАЯ ТЕОРЕМА ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ВЗАИМОСВЯЗАННОЙ МЕХАНОТЕРМОДИФФУЗИИ НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК С ДИСТОРСИЯМИ

Для неоднородных анизотропных оболочек с дисторсиями сформулирована и доказана общая вариационная теорема динамической задачи линейной взаимосвязанной механотермодиффузии с начальными условиями.

VARIATIONAL THEOREM OF DYNAMIC PROBLEM ON COUPLED MECHANOTHERMODIFFUSION FOR INHOMOGENEOUS ANISOTROPIC SHELLS WITH DISTORTIONS

General variational theorem of dynamic problem on coupled linear mechanothermodiffusion with initial conditions for inhomogeneous anisotropic shells with distortions is formulated and proved.

Укр. акад. друкарства, Львів

Одержано
06.12.12