УДК 519.751

О. О. Булацик

ПРО ВЗАЄМНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПІВ РОЗВ'ЯЗКІВ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ГАММЕРШТЕЙНА

Розглядається клас нелінійних інтегральних рівнянь, які виникають в оптимізаційних фазових задачах (наприклад, у задачах синтезу антен, оптимізації ліній передачі енергії тощо) та мають аналітичні розв'язки. Ці розв'язки можуть мати або не мати нулів в області їх визначення. Досліджено питання можливості взаємного перетворення одного типу розв'язків в інший.

Вступ. Теорія і числові методи дослідження нелінійних інтегральних рівнянь інтенсивно розвиваються упродовж останніх років (див., наприклад. [3, 8, 10, 11] і цитовану там літературу). У цій роботі розглядаються нелінійні інтегральні рівняння типу Гаммерштейна, які виникають в задачах фазової оптимізації, зокрема при синтезі антен за заданою амплітудною діаграмою напрямленості та оптимізації ліній передачі енергії [1, 12, 13]. Нелінійність у цих рівняннях полягає у наявності під інтегралом «фазового множника» (невідомої функції, поділеної на її модуль). Розв'язки таких рівнянь мають скінченно-параметричне подання через поліноми скінченних степенів. Наявність нелінійного фазового множника під інтегралом зумовлює якісну відмінність між розв'язками, які не переходять через нуль в області інтегрування (підінтегральна функція є гладкою), і такими, що переходять через нуль (підінтегральна функція є розривною). Для згаданого подання розв'язків через поліноми ця відмінність є принциповою. У вказаних вище роботах розглядались лише розв'язки першого типу.

Дослідження розв'язків, які переходять через нуль, у конкретних задачах згаданого типу бере свій початок з праць [2, 9]. Використанню концепції породжуючих поліномів для їх опису присвячені роботи [4–7]. Отримані раніше числові результати показують, що розв'язки обох типів можуть існувати одночасно. Залишається недослідженим питання про зв'язок множин розв'язків двох згаданих типів і їх взаємне галуження.

Питання взаємного перетворення розв'язків різних типів розглядалось чисельно в [7]. Одержані там числові результати давали підстави припустити можливість перетворення комплексного розв'язку, породженого поліномом першого степеня, що не має нулів в області визначення, у дійсний розв'язок, що переходить через нуль. Проте, оскільки перехід комплекснозначної функції через нуль складно встановити чисельно, цих результатів недостатньо для остаточного висновку. У цій роботі теоретично встановлюється, у яких випадках такий зв'язок між двома вказаними множинами розв'язків є можливим, а в яких випадках ці множини не можуть мати спільних точок, хоча віддаль між ними може бути дуже малою (такою, що чисельно її тяжко виявити). Така ситуація спостерігалася в одному із прикладів, розглянутих у [7].

З використанням отриманих теоретичних результатів будуть розглянуті та детально проаналізовані на конкретних прикладах розв'язки, породжені поліномами як першого, так і вищих степенів, а також буде досліджено процес їх взаємного галуження. Зокрема, будуть розвинуті результати, анонсовані у [4].

Розглянемо нелінійне інтегральне рівняння [7]

$$f(\xi) = \int_a^b F(\xi')\mathcal{K}(\xi,\xi')e^{i\arg f(\xi')}\,d\xi', \tag{1}$$

де

$$\mathcal{K}(\xi,\xi') = \frac{s(\xi)q(\xi') - s(\xi')q(\xi)}{\tau(\xi) - \tau(\xi')}, \qquad (2)$$

$s(\xi)$, $q(\xi)$, $\tau(\xi)$ – дійсні неперервні функції такі, що системи функцій $\{\tau^n(\xi)s(\xi)\}$ і $\{\tau^n(\xi)q(\xi)\}$, $n = 0,1,\ldots$, є лінійно незалежними; $F(\xi) \in L_2(a,b)$ – задана дійсна додатна функція.

Згідно з [1, 12, 13], розв'язки рівняння (1), які не мають нулів на інтервалі $[a,b]$, можна подати у вигляді

$$f(\xi) = \beta \int_a^b F(\xi')\mathcal{K}(\xi,\xi') \frac{P_N(\tau')}{|P_N(\tau')|} d\xi'. \qquad (3)$$

Тут β – довільна комплексна константа, така що $|\beta| = 1$ (надалі покладаємо $\beta = 1$); $\tau' = \tau(\xi')$; $P_N(\tau)$ – поліном N-го степеня змінної τ:

$$P_N(\tau) = \prod_{k=1}^{N} (1 - \eta_{Nk}\tau) \qquad (4)$$

з комплексними, попарно не спряженими нулями η_{Nk}^{-1}:

$$\eta_{Nk} - \bar{\eta}_{Nm} \neq 0, \qquad k,m = 1,2,\ldots,N. \qquad (5)$$

Параметри η_{Nk} задовольняють таку систему трансцендентних рівнянь:

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1}s(\xi)F(\xi)}{|P_N(\tau)|} d\xi = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N, \qquad (6')$$

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1}q(\xi)F(\xi)}{|P_N(\tau)|} d\xi = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N. \qquad (6'')$$

Степінь N полінома $P_N(\tau)$ не перевищує кількості нулів кожної з функцій $s(\xi)$ та $q(\xi)$ на інтервалі $[a,b]$.

У випадку, коли розв'язки рівняння (1) мають нулі в точках $\xi_i \in [a,b]$, $i = 1,\ldots,M$, ці точки також впливають на фазовий множник $e^{i \arg f(\xi)}$ в (1), але не описуються поліномом (4) внаслідок умови (5). Ці розв'язки подаватимемо у вигляді [5, 6]

$$f(\xi) = \beta \int_a^b F(\xi')\mathcal{K}(\xi,\xi') \frac{P_N(\tau')}{|P_N(\tau')|} \prod_{i=1}^{M} \operatorname{sgn}(\xi' - \xi_i)\, d\xi', \qquad (7)$$

а параметри η_{Nk} та ξ_i будуть задовольняти таку систему трансцендентних рівнянь:

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1}s(\xi)F(\xi)}{|P_N(\tau)|} \prod_{i=1}^{M} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i)\, d\xi = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N, \qquad (8')$$

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1}q(\xi)F(\xi)}{|P_N(\tau)|} \prod_{j=1}^{M} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_j)\, d\xi = 0, \qquad k = 1,2,\ldots,N, \qquad (8'')$$

$$\int_a^b \frac{\mathcal{K}(\xi,\xi_\ell)F(\xi)P_N(\tau)}{|P_N(\tau)|} \prod_{i=1}^{M} \operatorname{sgn}(\xi - \xi_i)\, d\xi = 0, \qquad \ell = 1,2,\ldots,M. \qquad (8''')$$

Якщо ядро (2) рівняння (1) залежить від деякого дійсного параметра c, то розв'язки рівняння (1) можуть галузитись зі зміною цього параметра, а точки галуження визначаємо із відповідних систем трансцендентних рівнянь. У цій роботі встановимо умови, за яких можлива зміна типу розв'язків при певних значеннях параметра c.

1. Теоретичні результати. Для того щоб з'ясувати, чи може певний розв'язок типу (3) при зміні параметра c перетворюватись у розв'язок типу (7), необхідно розв'язати систему рівнянь (6) у певному діапазоні зміни параметра c при фіксованому N і з'ясувати, при якому значенні c появляється нуль у функції (3). Якщо таке значення $c = c_1$ існує, то в цій точці один із комплексних параметрів η, скажімо η_1, стає дійсним: $\eta_{N1}^{-1} = \tau_{N1} \in$ $\in [\tau(a), \tau(b)]$. Тоді підінтегральні функції в рівняннях (6) набувають неінтегровної особливості типу $|\tau - \tau_{N1}|^{-1}$. Згідно з (4), такий множник міститься у знаменнику систем трансцендентних рівнянь (6), і у першому наближенні за розвиненням у ряд Тейлора він має вигляд

$$|\tau - \tau_1| = \left|\frac{d\tau}{d\xi}\bigg|_{\xi=\xi_1}\right| \cdot |\xi - \xi_1| .$$

Це означає, що в загальному випадку перетворення в точці $\xi_1 \in [a, b]$ комплексного параметра η_1 у дійсний неможливе.

Вказаної особливості вдається уникнути лише у випадку, коли функція $F(\xi)$ має нуль у точці $\xi = \xi_1$. Тоді можна ввести нову функцію

$$\tilde{F}(\xi) = \frac{F(\xi)}{|1 - \eta_1 \tau(\xi)|} = \frac{|\eta_1| F(\xi)}{|\tau_1 - \tau(\xi)|}$$

і виконати в системі (6) таку заміну:

$$\frac{F(\xi)}{|P_N(\tau)|} = \frac{\tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\tau)|} , \tag{9}$$

де $P_{N-1}(\tau) = P_N(\tau)[\eta_1(\tau_1 - \tau)]^{-1}$ – поліном степеня $N-1$, що зберігає всі нулі полінома $P_N(\tau)$, крім τ_1. Внаслідок заміни (9) система (6) набуде вигляду

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1} s(\xi) \tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\tau)|} d\xi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N , \tag{10$'$}$$

$$\int_a^b \frac{\tau^{k-1} q(\xi) \tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\tau)|} d\xi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, N . \tag{10$''$}$$

Твердження. *Розв'язок* (3) *рівняння* (1) *може перетворитись у розв'язок* (7) *при деякому* $c = c_1$, *якщо в системі* (10) *межі інтегрування симетричні* $(a = -b)$, *функції* $\tilde{F}(\xi)$, $|P_{N-1}(\tau)|$ *– парні, а одна з функцій* $s(\xi)$ *або* $q(\xi)$ *є парною, а інша – непарною. При цьому* $\eta_1 = 1/\xi_1$, *а параметри* η_{Nk}, $n = 2, \ldots, N$, *та* c_1 *визначаються із системи трансцендентних рівнянь*

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^{2k-1} s(\xi) \tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\xi)|} d\xi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, [N/2] , \tag{11$'$}$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\xi^{2k-2} q(\xi) \tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\xi)|} d\xi = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, [(N+1)/2] . \tag{11$''$}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки точка $\xi = \xi_1$ є нулем функції $f(\xi)$, то при $c = c_1$, згідно з (3), крім системи (10), повинна виконуватись рівність

$$\int_a^b \tilde{F}(\xi) \mathcal{K}(\xi, \xi_1) \frac{P_{N-1}(\tau)(\tau - \tau_1)}{|P_{N-1}(\tau)|} d\xi = 0 . \tag{12}$$

Покажемо, що ця рівність задовольняється автоматично, якщо виконуються перші $N-1$ рівняння системи (10). Для цього, враховуючи (2), перепишемо (12) у вигляді

$$\int_a^b [s(\xi)q(\xi_1)-s(\xi_1)q(\xi)]P_{N-1}(\tau)\frac{\tilde{F}(\xi)}{|P_{N-1}(\tau)|}d\xi = 0\,. \tag{13}$$

Після підстановки в (13) полінома $P_{N-1}(\tau)$ у явному вигляді за степенями τ і врахування лінійної незалежності систем функцій $\{\tau^n(\xi)s(\xi)\}$ і $\{\tau^n(\xi)q(\xi)\}$, $n=1,\ldots,N-1$, рівняння (13) розпадається на систему рівнянь, яка співпадає з першими $N-1$ рівняннями системи (10).

Таким чином, система (10) складається з $2N$ рівнянь на визначення $2N-1$ дійсних невідомих: $2N-2$ дійсних та уявних частин параметрів η_{Nk}, $k=2,\ldots,N$, та дійсного параметра c. У загальному випадку така система є перевизначеною.

Врахування умов зменшує кількість рівнянь і невідомих вдвічі. Справді, N рівнянь системи (10) перетворюються у тотожності внаслідок симетрії. Умова парності функції $|P_{N-1}(\tau)|$ зменшує вдвічі кількість дійсних невідомих у параметрах η_{Nk}, які перетворюються в чисто уявні або фігурують парами з різними знаками (див., наприклад, [1, с. 123]). В результаті система (10) набуває вигляду (11). ♦

2. Числовий аналіз. Проілюструємо одержані результати на прикладі рівняння типу (1), пов'язаного з інтегральним перетворенням Фур'є фінітної функції [12]. У цьому випадку $s(\xi)=\sin(c\xi)$, $q(\xi)=\cos(c\xi)$, $\tau=\xi$, $[a,b]=[-1,1]$.

Виберемо спочатку задану функцію у рівнянні (1) у вигляді

$$F(\xi)=|\xi-t|, \qquad t=0.7\,.$$

Для цього випадку маємо $\xi_1=t$, $\tilde{F}(\xi)\equiv 1$, і система (11) зводиться до такої:

$$\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2k-1}\sin(c\xi)}{|P_{N-1}(\xi)|}d\xi = 0, \qquad k=1,2,\ldots,[N/2]\,, \tag{14'}$$

$$\int_{-1}^{1}\frac{\xi^{2k-2}\cos(c\xi)}{|P_{N-1}(\xi)|}d\xi = 0, \qquad k=1,2,\ldots,[(N+1)/2]\,. \tag{14''}$$

Проведемо аналіз розв'язків рівняння (1) для цього випадку та дослідимо процес перетворення розв'язків з одного типу в інший. На рис. 1 наведено параметри η_{Nk} всіх знайдених розв'язків. Криві позначено індексами Nk відповідних параметрів η_{Nk}.

Розглянемо дійсний розв'язок $f_0(\xi)$ рівняння (1):

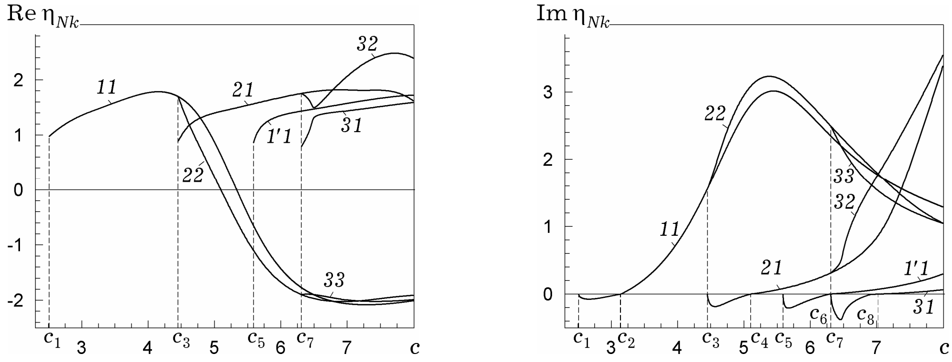
$$f_0(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}F(\xi')\frac{\sin(c(\xi-\xi'))}{\xi-\xi'}d\xi'\,,$$

який не має нулів на проміжку інтегрування. У точці $c=c_1$ від нього відгалужується комплексний розв'язок $f_{11}(\xi)$, породжений поліномом степеня $N=1$ (криві *11* на рис. 1). У точці $c=c_2$ цей розв'язок перетворюється у дійсний, що має нуль в точці $\xi_1=\eta_{11}^{-1}(c_2)$. Тут можна ввести заміну (9) з $\tilde{F}(\xi)=1$, після якої перше рівняння системи (14) з $N=1$ зникає (оскільки

$[1/2] = 0$), а друге записується у вигляді

$$\int_{-1}^{1} \cos(c\xi)\, d\xi = 0 .$$

Подібна ситуація спостерігається також для розв'язку $f_{12}(\xi)$, відгалуженого від $f_0(\xi)$ у точці $c = c_5$ (криві *1'1* на рис. 1): комплексний розв'язок з $N = 1$, що не має нулів на проміжку інтегрування, перетворюється в точці $c = c_6$ у дійсний розв'язок, який має нуль у точці $\xi_1 = 0.7 \in [-1, 1]$.



а)   *б*)

Рис. 1

У точці $c = c_3$ від комплексного розв'язку $f_{11}(\xi)$ з $N = 1$ відгалужується комплексний розв'язок $f_{21}(\xi)$ з $N = 2$ (криві *21*, *22* на рис. 1). Цей розв'язок у точці $c = c_4$ перетворюється в комплексний з $N = 1$, який має нуль на проміжку інтегрування в точці $\xi = \xi_1$.

У точці $c = c_7$ від комплексного розв'язку $f_{21}(\xi)$ з $N = 2$ відгалужується комплексний розв'язок $f_{31}(\xi)$ з $N = 3$ (криві *31*, *32*, *33* на рис. 1). У точці $c = c_8$ цей розв'язок перетворюється у комплексний з $N = 2$, що має нуль у точці $\xi = \xi_1$.

Таким чином, наведені вище числові результати підтверджують існування функцій, у яких комплексні розв'язки, що не мають нулів на проміжку інтегрування, перетворюються у розв'язки, що переходять через нуль. Зауважимо, що у розглянутому випадку функції $F(\xi) = |\xi - t|$ система (14) співпадає, очевидно, з системою трансцендентних рівнянь для точок галуження розв'язків рівняння (1) з $F(\xi) \equiv 1$, які описуються поліномами степеня $N - 1$. Детальний аналіз цього випадку наведено в [12]. Відповідно, всі результати, описані вище для точок $c = c_i$ переходу комплексних розв'язків в розв'язки, що мають перехід через нуль, узгоджуються з відповідними результатами із вказаної роботи. Ця аналогія стосується лише вказаних точок $c = c_i$ і порушується при $c \neq c_i$.

Тепер дослідимо розв'язки рівняння (1) із функцією

$$F(\xi) = \sin \frac{\pi |\xi - t|}{1 + t}, \qquad t = 0.7 ,$$

для якої $\tilde{F}(\xi)$ не є парною. Тому в цьому випадку систему рівнянь (10) не можна звести до системи (14). Таким чином, для цієї заданої функції розв'язок типу (3) не може перетворюватись у розв'язок типу (7).

Систему (10), яка містить $2N$ рівнянь на визначення $2N$ дійсних невідомих (N дійсних та уявних частин параметрів η_{Nk}), розв'язуємо на всьому інтервалі зміни параметра c. На рис. 2 наведено параметри η_{Nk} всіх знайдених розв'язків для цієї функції.

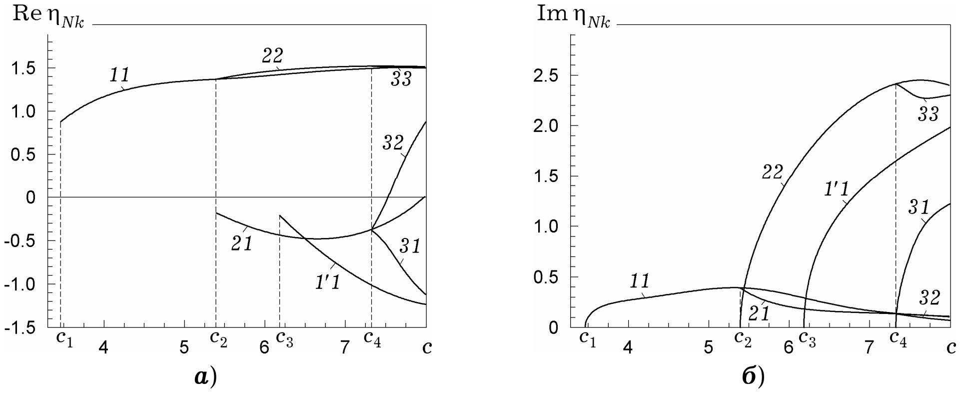


Рис. 2

На рис. 3 наведено поведінку функцій $|f(\xi)|$ для заданої функції $F(\xi) = |\xi - t|$, $t = 0.1$ (рис. 3*а*) та $t = 0.7$ (рис. 3*б*). Поза інтервалом $\xi \in [-1,1]$ функції $|f_0(\xi)|$ при $c = c_1$ (криві *0*) та $|f_{11}(\xi)|$ при $c = c_1 + 0.01$ (криві *1*) обчислюються за формулою (1). Нулі функції $f_0(\xi)$ позначено через ξ_{01}, ξ_{02}, ξ_{03} (рис. 3*а*). Після точки галуження всі нулі ξ_{1i} відгалуженого розв'язку, за винятком ξ_{13}, залишаються дійсними. Нуль ξ_{13} відривається від дійсної осі і рухається від ξ_{03} в комплексну площину. При $t = 0.7$ (рис. 3*б*) після точки галуження нуль ξ_{11} відривається від дійсної осі і рухається від ξ_{01} в комплексну площину. Штриховою лінією наведено траєкторії рухів цих нулів при збільшенні параметра c від c_1 до c_2.

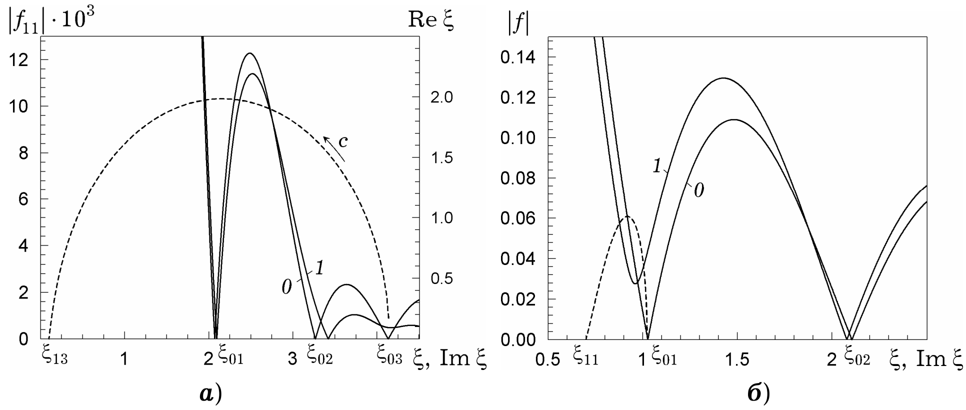


Рис. 3

На рис. 4*а* наведено поведінку функції $|f_{11}(\xi)|$ при наближенні до точки галуження $c_2 = 3.1305$. Значення параметра c вибрано таким чином, щоб показати характер зміни поведінки функції: $c = 2.4$ (крива *1*), $c = 2.5$ (крива *2*), $c = 2.7$ (крива *3*), $c = c_2$ (крива *4*). Аналогічна поведінка функції $|f_{21}(\xi)|$ наведена на рис. 4*б*.

У роботах [4, 5] наведено деякі числові результати для цієї задачі з $t = 0.1$. У цьому випадку на певному інтервалі зміни параметра c уявна частина η_{11} розв'язку, що перейшов через нуль, має значення, близькі до нуля. Зауважимо, що у роботі [5] при числовому аналізі функції $F(\xi) = \sin \dfrac{\pi|\xi - t|}{1+t}$ з параметром $t = 0.1$ були зроблені хибні висновки.

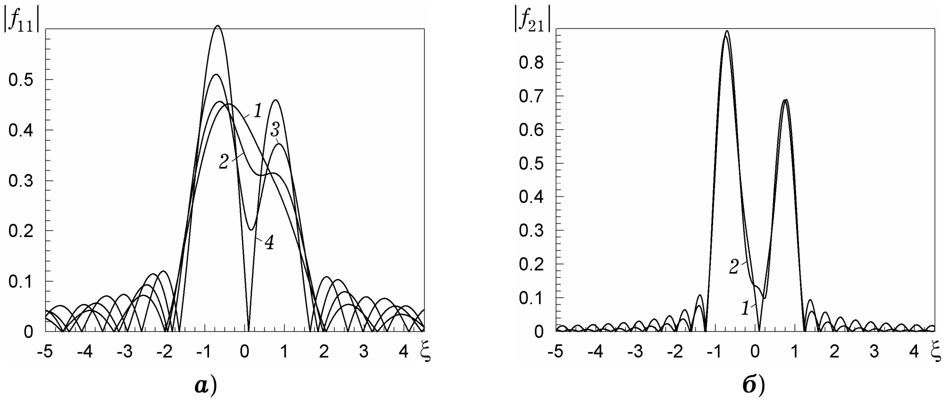


Рис. 4

1. *Булацик О. О., Войтович М. М., Каценеленбаум Б. З., Тополюк Ю. П.* Фазові оптимізаційні задачі. – Київ: Наук. думка, 2012. – 317 с.
2. *Гісь О. М., Тополюк Ю. П.* Середньоквадратичне наближення невід'ємних фінітних функцій модулем функцій з фінітним спектром (випадок занулення апроксиманти на носії фінітної функції) // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – **44,** № 2. – С. 48–54.
3. *Bauschke H. H., Combettes P. L., Luke D. R.* Phase retrieval, error reduction algorithm, and Fienup variants: A view from convex optimization // J. Optical Soc. Amer. – 2002. – **19**, No. 7. – P. 1334–1345.
4. *Bulatsyk O. O.* System of integro-transcendental equation in case vanishing solution of free phase problem // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2012): Proc. 17th Int. Seminar/Workshop. – Lviv–Tbilisi, 2012. – P. 170–174.
5. *Bulatsyk O. O., Topolyuk Yu. P., Tupychak I. V.* Complex vanishing solutions to nonlinear equation related to modified phase problem // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2010): Proc. 15th Int. Seminar/Workshop DIPED-2010. – Lviv–Tbilisi, 2010. – P. 183–186.
6. *Bulatsyk O. O., Topolyuk Yu. P., Tupychak I. V.* Rigorous vanishing solutions of a nonlinear Hammerstein integral equation related to problems free phase // J. Numer. Appl. Math. – 2012. – No. 3(109). –P. 11–22.
7. *Bulatsyk O. O., Topolyuk Yu. P., Tupychak I. V.* System of integro-transcendental equation in case vanishing solution of free phase problem // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2011): Proc. 16th Int. Seminar/Workshop. – Lviv–Tbilisi, 2011. – P. 200–204.
8. *Fienup J. R.* Phase retrieval algorithm: a comparison // Appl. Optics. – 1982. – **21**, No. 15. – P. 2758–2769.
9. *Gis O. M., Topolyuk Yu. P.* Closed vanishing solution of the nonlinear problems of the antenna synthesis // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-99): Proc. 4th Int. Seminar/Workshop. – Lviv, 1999. – P. 75–79.
10. *Masujima M.* Applied mathematical methods in theoretical physics. – Weinheim: Wiley-VCH, 2005. – xi+377 p.
11. *Precup R.* Methods in nonlinear integral equation. – Dordrecht: Kluver Acad. Publ, 2002. – 232 p.
12. *Voitovich N. N.* Appendix: Antenna synthesis by amplitude radiation pattern and modified phase problem // In: *Katselenlenbaum B. Z.* Electromagnetic fields – Restrictions and approximation. – Weinheim: Wiley-VCH, 2003. – P. 195–233.
13. *Voitovich N. N., Topolyuk Yu. P., Reshnyak O. O.* Approximation of compactly supported functions with free phase by functions witch bounded spectrum // Fields Inst. Commun. – 2000. – **25**. –P. 531–541.

О ВЗАИМНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ТИПОВ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАММЕРШТЕЙНА

Рассматривается класс нелинейных интегральных уравнений, возникающих в оптимизационных фазовых задачах (например, в задачах синтеза антенн, оптимизации линий передач энергии и т.п.) и имеющих аналитические решения. Эти решения могут иметь или не иметь нулей в области их определения. Исследован вопрос возможности взаимного преобразования одного типа решений в иной.

ON THE RECIPROCAL CONVERSION OF THE TYPES OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLINEAR HAMMERSTEIN INTEGRAL EQUATIONS

The class of nonlinear integral equations arising in the optimization phase problem (for example, in the problems of synthesis of antennas, optimization of energy transmissions lines etc.), and which have analytical solutions, is considered. These solutions may or may not have zeros in their definition domains. The possibilities of reciprocal (mutual) conversion of one type of solution into another are investigated.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
14.02.14