УДК 517.95

Б. Й. Пташник[1,2], С. М. Репетило[2]

ЗАДАЧА ДІРІХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМ ГІПЕРБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

В області, яка є декартовим добутком відрізка на коло одиничного радіуса, досліджено крайову задачу з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною для системи гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі у просторах Соболєва та побудовано її розв'язок у вигляді векторного ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли під час побудови розв'язку задачі, використано метричний підхід.

Вступ. Крайові задачі з локальними умовами на всій межі області для гіперболічних та безтипних рівнянь і систем рівнянь з частинними похідними є, взагалі, умовно коректними; їхня розв'язність в обмежених областях у більшості випадків пов'язана з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [1, 2, 4–7] та бібліографію в них). Коректність таких задач вивчалась у працях різних авторів; зокрема, у роботах [2, 4, 6, 9, 11] досліджено задачі з умовами типу Діріхле та змішаними умовами (Діріхле–Неймана) для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь, а у працях [1, 4, 5, 7, 10] – для систем безтипних рівнянь.

У цій статті результати праці [6] частково поширено на задачу з умовами Діріхле – Неймана за часовою змінною для системи гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами, яка вивчається в області, що є декартовим добутком відрізка на коло одиничного радіуса. Встановлено умови однозначної розв'язності задачі у просторах Соболєва та побудовано її розв'язок у вигляді векторного ряду за системою ортогональних функцій. Для оцінок знизу малих знаменників, що виникли при побудові розв'язку задачі, використано метричний підхід [4].

1. Основні позначення. Надалі використовуємо такі позначення: $\mathbb{R}$ – множина дійсних чисел; $\mathbb{Z}$ – множина цілих чисел; $\mathbb{Z}_+$ – множина цілих невід'ємних чисел; $k \in \mathbb{Z}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$; i – уявна одиниця; E – одинична матриця; Ω – коло одиничного радіуса; $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 : 0 < t < T,\ x \in \Omega\}$; $K_T = \{(t,\tau) : 0 \le t,\ \tau \le T\}$; c_1, c_2, c_3 – додатні сталі, які не залежить від k; $H_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір 2π-періодичних комплекснозначних функцій $v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} v_k \exp(ikx)$ з нормою $\|v; H_q(\Omega)\|^2 := 2\pi \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^q |v_k|^2$; $\bar{H}_q(\Omega)$, $q \in \mathbb{R}$, – простір вектор-функцій $v(x) = (v_1(x), \ldots, v_m(x))$ таких, що $v_j \in H_q(\Omega)$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, з нормою $\|v; \bar{H}_q(\Omega)\|^2 := \sum_{j=1}^{m} \|v_j; H_q(\Omega)\|^2$; $C^p([0,T], H_q(\Omega))$, $q \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, – простір функцій $v(t,x)$ таких, що для кожного $t \in [0,T]$ функції $\dfrac{\partial^r v(t,x)}{\partial t^r}$, $r \in \{0,1,\ldots,p\}$, належать простору $H_{q-r}(\Omega)$ і є неперервними за t у нормі цього простору $\|v; C^p([0,T], H_q(\Omega))\| := \sum_{r=0}^{p} \max_{0\le t\le T} \left\| \dfrac{\partial^r v}{\partial t^r}; H_{q-r}(\Omega) \right\|$; $\bar{C}^p([0,T], H_q(\Omega))$, $q \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, – простір вектор-функцій $v(t,x) = (v_1(t,x), \ldots, v_m(t,x))$, для яких $v_j \in C^p([0,T], H_q(\Omega))$, $j \in \{1,\ldots,m\}$, з нормою $\|v; \bar{C}^p([0,T], H_q(\Omega))\|^2 := \sum_{j=1}^{m} \|v_j; C^p([0,T], H_q(\Omega))\|^2$.

2. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу

$$L[u] := \sum_{s=0}^{n} A_s \frac{\partial^{2n} u(t,x)}{\partial t^{2(n-s)} \partial x^{2s}} = f(t,x), \qquad (t,x) \in D, \tag{1}$$

$$U_r[u] := \left. \frac{\partial^{2r-2} u(t,x)}{\partial t^{2r-2}} \right|_{t=0} = 0, \; U_{n+r}[u] := \left. \frac{\partial^{2r-1} u(t,x)}{\partial t^{2r-1}} \right|_{t=T} = 0, \; x \in \Omega, \tag{2}$$

де $r \in \{1, \ldots, n\}$; $A_s = \left[a_{pq}^s\right]_{p,q=1}^m$ – матриці з дійсними сталими елементами, $A_0 = E$; $u(t,x) = \mathrm{col}\left(u_1(t,x), \ldots, u_m(t,x)\right)$, $f(t,x) = \mathrm{col}\left(f_1(t,x), \ldots, f_m(t,x)\right)$.

Припустимо, що система рівнянь (1) є гіперболічною за Петровським у вузькому сенсі, тобто всі корені рівняння

$$\delta(\lambda) := \det\left[\sum_{s=0}^{n} a_{pj}^s \lambda^{2n-2s}\right]_{p,j=1}^m = 0 \tag{3}$$

є дійсними і різними, отже, відмінними від нуля. Вигляд області D накладає умови 2π-періодичності за змінною x на функції u і f.

Припустимо, що

$$f(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(t) \exp(ikx),$$

де

$$f_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t,x) \exp(-ikx)\, dx,$$

$$f_k = \mathrm{col}(f_{k1}, \ldots, f_{km}).$$

Означення. Розв'язком задачі (1), (2) з простору $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))$, $q \in \mathbb{R}$, називатимемо вектор-функцію u з цього простору, для якої справджуються такі умови:

$$\left\| L[u] - f; \overline{C}([0,T], H_{q-2n}(\Omega)) \right\| = 0,$$

$$\left\| U_r[u]; \overline{H}_{q-2r+2}(\Omega) \right\| = 0,$$

$$\left\| U_{n+r}[u]; \overline{H}_{q-2r+1}(\Omega) \right\| = 0, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}.$$

3. Єдиність розв'язку. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді векторного ряду

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) \exp(ikx), \tag{4}$$

де $u_k = \mathrm{col}(u_{k1}, \ldots, u_{km})$. Кожна вектор-функція $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$, із (4) є розв'язком, відповідно, такої крайової задачі для системи звичайних диференціальних рівнянь:

$$\sum_{s=0}^{n} A_s (ik)^{2s} \frac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = f_k(t), \tag{5}$$

$$u_k^{(2r-2)}(0) = 0, \qquad u_k^{(2r-1)}(T) = 0, \qquad r \in \{1, \ldots, n\}. \tag{6}$$

Якщо $k = 0$, то система (5) розпадається на m незалежних рівнянь. Легко показати, що у цьому випадку задача (5), (6) завжди має єдиний розв'язок $u_0(t)$, компоненти якого зображуються формулами

$$u_{0\ell}(t) = \int_0^T G_0(t,\tau) f_{0\ell}(\tau)\, d\tau, \qquad \ell \in \{1,\dots,m\}, \tag{7}$$

в яких $G_0(t,\tau)$ – функція Ґріна крайової задачі

$$\frac{d^{2n} y(t)}{dt^{2n}} = 0, \qquad y^{2r-2}(0) = 0, \qquad y^{2r-1}(T) = 0, \qquad r \in \{1,\dots,n\}. \tag{8}$$

Характеристичний визначник задачі (8) $\Delta = 1!2!\dots,(2n-1)!$.

Нехай N – номер такого рядка у визначнику $\delta(\lambda)$ (див. (3)), не всі алгебричні доповнення $\varphi_q(\lambda) := \delta_{Nq}(\lambda)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, елементів якого дорівнюють нулеві; $\varphi(\lambda) = \operatorname{col}(\varphi_1(\lambda),\dots,\varphi_m(\lambda))$.

Якщо $k \neq 0$, то однорідна система рівнянь

$$\sum_{s=0}^{n} A_s (ik)^{2s} \frac{d^{2(n-s)} u_k(t)}{dt^{2(n-s)}} = 0, \tag{9}$$

що відповідає системі (5), має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$\{u_{kj}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(\gamma_j t),\ u_{k,mn+j}(t) = \varphi(\lambda_j)\exp(-\gamma_j t),\ j \in \{1,\dots,mn\}\},$$

де $\lambda_1,\dots,\lambda_{mn}$ – додатні корені рівняння (3), $\gamma_j := \gamma_j(k) = ik\lambda_j$, $j \in \{1,\dots,mn\}$.

Зауважимо, що матриці

$$\Upsilon_{kj}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1+m(j-1)} \exp(\gamma_{1+m(j-1)} t) & \dots & \varphi_{1,jm} \exp(\gamma_{jm} t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1+m(j-1)} \exp(\gamma_{1+m(j-1)} t) & \dots & \varphi_{m,jm} \exp(\gamma_{jm} t) \end{bmatrix},$$

$$\Upsilon_{k,n+j}(t) = \Upsilon_{kj}(-t), \qquad j \in \{1,\dots,n\}, \tag{10}$$

де $\varphi_{qj} \equiv \varphi_q(\lambda_j)$, $q \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,mn\}$, утворюють систему $2n$ лінійно незалежних розв'язків для однорідного матричного рівняння

$$\sum_{s=0}^{n} A_s (ik)^{2s} \Upsilon_k^{(2n-2s)}(t) = 0. \tag{11}$$

Характеристичний визначник $\Delta(k) := \det\left[U_p(\Upsilon_{kj})\right]_{p,j=1}^{2n}$ задачі (6), (9) при $k \neq 0$ має вигляд

$$\Delta(k) = \det\left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) & \boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) \\ \hline \boldsymbol{\Upsilon}^{(T)}(\gamma) & \boldsymbol{\Upsilon}^{(-T)}(\gamma) \end{array}\right], \tag{12}$$

де

$$\boldsymbol{\Upsilon}(\gamma) = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} & \dots & \varphi_{1,nm} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1} & \dots & \varphi_{m,nm} \\ \varphi_{1,1}\gamma_1^2 & \dots & \varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1}\gamma_1^2 & \dots & \varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{1,1}\gamma_1^{2n-2} & \dots & \varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^{2n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{m,1}\gamma_1^{2n-2} & \dots & \varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^{2n-2} \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$
\Upsilon^{(\pm T)}(\gamma) = \begin{bmatrix} \pm\varphi_{1,1}\gamma_1 e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{1,nm}\gamma_{nm} e^{\pm\gamma_{nm} T} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pm\varphi_{m,1}\gamma_1 e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{m,nm}\gamma_{nm} e^{\pm\gamma_{nm} T} \\ \pm\varphi_{1,1}\gamma_1^3 e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^3 e^{\pm\gamma_{nm} T} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pm\varphi_{m,1}\gamma_1^3 e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^3 e^{\pm\gamma_{nm} T} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pm\varphi_{1,1}\gamma_1^{2n-1} e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{1,nm}\gamma_{nm}^{2n-1} e^{\pm\gamma_{nm} T} \\ \dots & \dots & \dots \\ \pm\varphi_{m,1}\gamma_1^{2n-1} e^{\pm\gamma_1 T} & \dots & \pm\varphi_{m,nm}\gamma_{nm}^{2n-1} e^{\pm\gamma_{nm} T} \end{bmatrix}. \qquad (13')
$$

Обчислюючи визначник (12), отримуємо

$$
\Delta(k) = (-2)^{nm}(ik)^{mn(2n-1)}\Upsilon^2(\lambda)\prod_{\ell=1}^{nm}[\lambda_\ell \cos(k\lambda_\ell T)], \quad k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}. \qquad (14)
$$

Визначник матриці $\Upsilon(\lambda)$ (13) є відмінним від нуля, оскільки він входить співмножником у вираз для вронскіана системи матриць-функцій (10).

Відомо (див. [3, с. 108]), що задача (6), (9) має нетривіальний розв'язок тоді і лише тоді, коли $\Delta(k) = 0$. На підставі цього та теореми про єдиність розвинення періодичної функції у ряд Фур'є отримуємо наступне твердження.

Теорема 1. *Для єдиності розв'язку задачі* (1), (2) *у просторі* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_{2n}(\Omega))$ *необхідно і достатньо, щоб справджувались умови*

$$
(\forall k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \forall m \in \mathbb{Z}) \quad \lambda_j Tk \ne (m + 1/2)\pi, \quad j \in \{1,\dots,nm\}. \qquad (15)
$$

Д о в е д е н н я проводиться за схемою доведення теореми 2.1 із [4, с. 97]. ♦

4. Існування розв'язку. Надалі вважатимемо, що справджуються умови (15). Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ існує єдина матриця Ґріна $G_k(t,\tau) = [p_{k,r,q}(t,\tau)]_{r,q=1}^{m}$ задачі (6), (9), за допомогою якої розв'язок задачі (5), (6) зображає формула [3, гл. 3, §7] $u_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau$. У квадраті $K_T = \{(t,\tau) : 0 \le t, \tau \le T\}$ (крім сторін $\tau = 0$, $\tau = T$) матрицю $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, визначає формула

$$
G_k(t,\tau) = g_k(t,\tau) - \frac{1}{\Delta(k)} \sum_{j,\nu=1}^{2n} Y_{kj}(t) V_{kj\nu} U_\nu(g_k),
$$

де $V_{kj\nu}$ – матриця, транспонована до матриці m-го порядку, складеної з алгебричних доповнень елементів матриці $U_\nu(Y_{kj})$ у характеристичному визначнику $\Delta(k)$ задачі (6), (9);

$$
g_k(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2W_k(\tau)} \sum_{j=1}^{2n} Y_{kj}(t) W_{kj}(\tau),
$$

$W_{kj}(t)$ – матриця, транспонована до матриці m-го порядку, складеної з алгебричних доповнень елементів матриці $Y_{kj}^{(2n-1)}(t)$ у визначнику $W_k(t)$:

$$W_k(t) = \begin{bmatrix} \Upsilon_{k1}^{(2n-1)}(t) & \dots & \Upsilon_{k2n}^{(2n-1)}(t) \\ \Upsilon_{k1}^{(2n-2)}(t) & \dots & \Upsilon_{k2n}^{(2n-2)}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ \Upsilon_{k1}(t) & \dots & \Upsilon_{k2n}(t) \end{bmatrix}.$$

Здійснивши необхідні обчислення, отримуємо такі формули для визначення елементів матриці $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$:

$$p_{k,r,q}(t,\tau) = \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{4\boldsymbol{\Upsilon}} \sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{m} \varphi_{r,\ell+m(\mu-1)} \boldsymbol{\Upsilon}_{q,\ell+m(\mu-1)} \big(e^{ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)} -$$
$$- (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(\mu-1)}(t-\tau)}\big) +$$
$$+ \frac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{8\boldsymbol{\Upsilon}^2} \sum_{j,\nu,\mu=1}^{n} \sum_{\ell,d=1}^{m} \frac{i\varphi_{r,\ell+m(j-1)}\varphi_{r,d+m(\mu-1)}\lambda_{d+m(\mu-1)}^{2\nu-3}}{k^{2n-1}\lambda_{\ell+m(j-1)} \cos\big(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T\big)} \times$$
$$\times \boldsymbol{\Upsilon}_{q+m(n-1),d+m(\mu-1)} \boldsymbol{\Upsilon}_{q+m(\nu-1),\ell+m(j-1)} \times$$
$$\times \big\{\lambda_{\ell+m(j-1)}\big(e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau} + (-1)^{nm-1} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}\tau}\big) \times$$
$$\times \big((-1)^{nm-1} e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)} + e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}(T-t)}\big) +$$
$$+ \lambda_{d+m(\mu-1)}\big(e^{ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{d+m(\mu-1)}(T-\tau)}\big) \times$$
$$\times \big(e^{ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t} + (-1)^{nm} e^{-ik\lambda_{\ell+m(j-1)}t}\big)\big\}, \tag{16}$$

де r, $q \in \{1,\dots,m\}$, $\boldsymbol{\Upsilon}_{\ell j}$ − алгебричне доповнення елемента, який стоїть на перетині ℓ-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\boldsymbol{\Upsilon}(\lambda)$ (13).

На стороні $\tau = 0$ квадрата K_T кожну матрицю $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, доозначаємо за неперервністю справа, а на стороні $\tau = T$ − за неперервністю зліва.

Таким чином, формальний розв'язок задачі (1), (2) визначає формула

$$u(t,x) = u_0(t) + \sum_{|k|>0} \exp(ikx) \int_0^T G_k(t,\tau) f_k(\tau)\, d\tau, \tag{17}$$

де компоненти вектор-функції $u_0(t)$ зображають формули (7), а елементи матриці Ґріна $G_k(t,\tau)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, − формули (16).

Існування розв'язку задачі (1), (2) пов'язане, взагалі, з проблемою малих знаменників, оскільки модулі виразів $\cos\big(k\lambda_{\ell+m(j-1)}T\big)$, $\ell \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$, які входять множниками у знаменники доданків у формулах (16), будучи відмінними від нуля, можуть ставати як завгодно малими для нескінченної кількості значень $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 1. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T оцінки*

$$\left|\cos(k\lambda_j T)\right| \ge (1+|k|)^{-\alpha}, \qquad \alpha > 1, \qquad j \in \{1,\dots,mn\}, \tag{18}$$

справджуються для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ та фіксованих коренів $\lambda_1,\dots,\lambda_{mn}$ рівняння (3).

Д о в е д е н н я проводимо за схемою доведення леми 1 з [6]. Враховуючи елементарну нерівність $\sin x \ge 2x/\pi$, $x \in [0,\pi/2]$, отримуємо

$$\left|\cos(\lambda_j kT)\right| = \left|\sin\left|\lambda_j kT - \pi/2 - m_j(k)\pi\right|\right| \ge$$
$$\ge |k|\left|2\lambda_j T/\pi - (2m_j(k)+1)/k\right|, \quad j \in \{1,\dots,mn\}, \tag{19}$$

де $m_j(k) \in \mathbb{Z}$ таке, що $\left|\lambda_j kT - \pi/2 - m_j(k)\pi\right| \le \pi/2$.

На підставі нерівності (19) і теореми 32 з [8, с. 87] отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел $\beta_j = 2\lambda_j T/\pi$, $j \in \{1,\dots,mn\}$, справджуються оцінки

$$\left|\cos(\lambda_j kT)\right| \ge |k|^{-(\gamma-1)} > (1+|k|)^{-(\gamma-1)}, \qquad \gamma > 2, \qquad j \in \{1,\dots,mn\},$$

для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$. Зі сказаного вище, враховуючи те, що при відображеннях $\beta_j \to \beta_j \pi/(2\lambda_j)$, $j \in \{1,\dots,mn\}$, множина з нульовою мірою Лебега переходить знову у множину нульової міри, а також те, що об'єднання скінченої кількості множин міри нуль є множиною міри нуль, випливає доведення леми. ♦

Теорема 2. *Нехай справджуються умови* (15) *і* $q \ge 2n$. *Якщо* $f \in \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega))$, $\chi > 2-2n$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *і фіксованих матриць* A_s, $s \in \{0,\dots,n\}$, *існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2) *з простору* $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))$. *Цей розв'язок справджує нерівність* $\left\|u; \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))\right\|^2 \le c_1 \left\|f; \overline{C}([0,T], H_{q+\chi}(\Omega))\right\|^2$, *де* $c_1 = c_1\big(a_{pr}^s,\ 0 \le s \le n,\ 1 \le p, r \le m;\ n,\ m,\ T\big)$.

Д о в е д е н н я. З формул (16) і леми 1 отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T для всіх (крім скінченної кількості) значень $k \in \mathbb{Z}$ справджуються такі оцінки:

$$\max_{0\le t\le T}\left|\frac{d^s}{dt^s}\int_0^T p_{k,r,q}(t,\tau) f_{k,q}(\tau)\,d\tau\right| \le c_2 (1+|k|)^{s-2n+1+\alpha} \max_{0\le t\le T}\left|f_{k,q}(\tau)\right|,$$
$$k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}, \qquad r,q \in \{1,\dots,m\}, \qquad \alpha > 1. \tag{20}$$

На підставі формули (17), оцінок (20) і означення норми у просторі $\overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))$, $q \in \mathbb{R}$, для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{R}$) чисел T отримуємо таку оцінку для норми розв'язку задачі (1), (2):

$$\begin{aligned}
\left\|u; \overline{C}^{2n}([0,T], H_q(\Omega))\right\|^2 &= \sum_{j=1}^m \left\|u_j; C^{2n}([0,T], H_q(\Omega))\right\|^2 = \\
&= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{r=0}^{2n} \max_{0\le t\le T}\left\|\partial^r u_j/\partial t^r; H_{q-r}(\Omega)\right\|\right)^2 \le \\
&\le (2n+1)\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n} \max_{0\le t\le T}\left\|\partial^r u_j/\partial t^r; H_{q-r}(\Omega)\right\|^2 \le \\
&\le (2n+1)2\pi\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \max_{0\le t\le T}\left|u_{kj}^{(r)}(t)\right|^2 (1+k^2)^{q-r} \le \\
&\le (2n+1)2\pi c_3\sum_{j=1}^m\sum_{r=0}^{2n}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(1+k^2)^{r-2n+1+\alpha} \times \\
&\times\left(\sum_{q=1}^m \max_{0\le t\le T}\left|f_{kq}(t)\right|\right)^2 (1+k^2)^{q-r} \le \\
&\le 2\pi c_3 (2n+1)^2 m^2 \sum_{q=1}^m\sum_{k=-\infty}^{\infty}\max_{0\le t\le T}\left|f_{kq}(t)\right|^2 (1+k^2)^{q-2n+1+\alpha} = \\
&= c_3(2n+1)^2 m^2 \sum_{q=1}^m \left\|f_q; C([0,T], H_{q-2n+1+\alpha}(\Omega))\right\|^2 = \\
&= c_3(2n+1)^2 m^2 \left\|f; \overline{C}([0,T], H_{q-2n+1+\alpha}(\Omega))\right\|^2, \quad \alpha > 1.
\end{aligned}$$

З отриманої оцінки випливає доведення теореми. ♦

Результати роботи можна поширити на випадок систем рівнянь вигляду (1) з багатьма просторовими змінними.

1. *Берник В. И., Пташник Б. И.* Краевая задача для системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 2. – С. 273–279.
2. *Білусяк Н. І., Пташник Б. Й.* Крайова задача для систем слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2002. – № 12. – С. 26–31.
3. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. – Москва: Наука, 1969. – 526 с.
4. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
5. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле–Неймана для системи рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2012. – Вип. 10. – С. 7–14.
6. *Пташник Б. Й., Репетило С. М.* Задача Діріхле – Неймана у смузі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2013. – **56**, № 3. – С. 15–28.
7. *Симотюк М. М.* Задача з двома кратними вузлами для лінійних систем рівнянь з частинними похідними, однорідних за порядком диференціювання // Мат. вісн. НТШ. – 2004. – **1**. – С. 130–148.
8. *Хинчин А. Я.* Цепные дроби. – Москва: Наука, 1978. – 112 с.
9. *Kiguradze T.* On solvability and well-posedness of boundary value problems for nonlinear hyperbolic equations of the fourth order // Georg. Math. J. – 2008. – **15**, No. 3. – P. 555–569.
10. *Nurmamedov M. A.* On the solvability of a boundary value problem for linear system equations of non-classical type in multidimensional domain // J. Qafqaz Univ. Math. Comput. Sci. – 2010. – No. 29. – P. 71–79.
11. *Rudakov I. A.* Periodic solutions of a nonlinear wave equation with Neumann and Dirichlet boundary conditions // Russian Math. – 2007. – **51**, No. 2. – P. 44–52.
    Те саме: *Рудаков И. А.* Периодические решения нелинейного волнового уравнения с граничными условиями Неймана и Дирихле // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 2. – С. 46–55.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ – НЕЙМАНА ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В области, являющейся декартовым произведением отрезка на окружность единичного радиуса, исследована краевая задача с условиями Дирихле – Неймана по временной переменной для системы гиперболических уравнений высокого порядка с постоянными коэффициентами. Установлены условия однозначной разрешимости задачи в пространствах Соболева и построено ее решение в виде векторного ряда по системе ортогональных функций. Для оценок снизу малых знаменателей, возникших во время построения решения задачи, использован метрический подход.

DIRICHLET – NEUMANN PROBLEM FOR SYSTEMS OF HYPERBOLIC EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

In the domain which is the Cartesian product of the interval on a circle of unite radius the boundary value problem with Dirichlet – Neumann conditions with respect to the time variable for the system of hyperbolic equations of higher order with constant coefficients is investigated. The conditions of unique solvability of the problem in Sobolev spaces and its solution in the form of a vector series by the system of orthogonal functions is constructed. For lower estimates of small denominators that arisen during solving the problem the metric approach is used.

[1] Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів,
[2] Нац. ун-т «Львів. політехніка», Львів

Одержано
12.12.13