УДК 513. 88

О. Г. Сторож

ДЕЯКІ АНАЛІТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ФУНКЦІЇ ВЕЙЛЯ ЗАМКНЕНОГО ОПЕРАТОРА

Досліджується функція Вейля $M(\lambda)$ замкненого лінійного оператора, який діє у комплексному гільбертовому просторі. Встановлено умови, які гарантують, що комплексне число λ_0 є полюсом першого порядку оператор-функції $(M(\lambda) - M(\lambda_0))^{-1}$.

Вступ та основні позначення. Поняття функції Вейля відіграє важливу роль у теорії лінійних операторів у гільбертових просторах. Зауважимо, що за допомогою функції Вейля можна записувати різні аналоги формули М. Г. Крейна для резольвент самоспряжених розширень заданого симетричного оператора (деталі див. у [6, 7]). Задачі про опис різних класів розв'язних розширень заданого замкненого оператора, починаючи з праці М. Й. Вішика [1], привертали увагу багатьох математиків (див., наприклад, [2, 5, 10, 13]). У роботі [3] було введено (в термінах абстрактних крайових умов) поняття функції Вейля невід'ємного лінійного оператора в гільбертовому просторі і з її використанням було описано певні класи розширень такого оператора. У праці автора [11] досліджувалися деякі аналітичні властивості функції Вейля невід'ємного лінійного оператора в гільбертовому просторі. Цю статтю можна трактувати як продовження досліджень [11]. У ній мова йде про функцію Вейля замкненого щільно визначеного (необов'язково симетричного) лінійного оператора, що діє у гільбертовому просторі. Інший підхід до розгляду подібних питань запропоновано в [12, 14] і [15].

Використовуємо такі позначення:

$(\cdot\,|\,\cdot)_X$, $\|\cdot\|_X$ – скалярний добуток і норма в гільбертовому просторі X;

$D(T)$, $R(T)$, $\ker T$ – відповідно область визначення, область значень та многовид нулів (лінійного) оператора T;

$\mathcal{B}(X,Y)$ – множина лінійних обмежених операторів $A : X \to Y$ таких, що $D(A) = X$; $\mathcal{B}(X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{B}(X,X)$;

$\mathcal{C}(X)$ – сукупність замкнених щільно визначених лінійних операторів $A : X \to X$;

$A \downarrow E$ – звуження оператора A на множину E; $AE \overset{\text{def}}{=} \{Ax : x \in E\}$;

$\mathbb{I}_X$ – оператор тотожного перетворення простору X;

$\oplus$ – символ ортогональної суми; зокрема, якщо $A : X \to Y_i$, $i = 1,\dots,n$, – лінійні оператори, то запис $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_n$ означає, що $\forall x \in X$ $Ax = (A_1x,\dots,A_nx)$.

Роль початкового об'єкта відіграє пара (L, L_0) операторів $H \to H$ (H – фіксований комплексний гільбертів простір зі скалярним добутком $(\cdot\,|\,\cdot)$) таких, що

$$L,\ L_0 \in \mathcal{C}(H), \qquad L_0 \subset L,$$

$$M_0 \overset{\text{def}}{=} L^*, \qquad M \overset{\text{def}}{=} L_0^*.$$

Під $D[T]$, $T \in \mathcal{C}(H)$, розуміємо многовид $D(T)$, трактований як гільбер-

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – 57, № 2. – С. 7-13.

тів простір зі скалярним добутком $\forall y,z \in D(T)$ $(y \mid z)_T = (y \mid z) + (Ty \mid Tz)$ та відповідною нормою графіка. Символом $\oplus_T$ позначаємо ортогональну суму в $D[T]$.

Означимо многовиди H_L, H_M за допомогою співвідношень

$$D[L] = D[L_0] \oplus_L H_L, \qquad D[M] = D[M_0] \oplus_M H_M$$

і позначимо через P_L, P_M ортопроектори $D[L] = H_L$, $D[M] = H_M$ відповідно.

Далі, якщо D – один з просторів $D[L]$ або $D[M]$, а $W \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D,G)$, де G – (допоміжний) гільбертів простір, то оператор, спряжений до W, позначатимемо через W' і, таким чином,

$$(\forall y \in D(L))\ (\forall g \in G)\ (Wy \mid g)_G = (y \mid W'g)_L\ \left(= (y \mid W^* g) \text{ для } g \in D(W^*)\right).$$

Основні результати.

***Означення* 1 [9].** Нехай G – (допоміжний) гільбертів простір, а $U \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D[L],G)$. Пара (G,U) називається *крайовою парою* для (L,L_0), якщо $R(U) = G$, $\ker U = D(L_0)$.

***Зауваження* 1.** Крайова пара для (L,L_0) існує і є єдиною у такому сенсі: якщо (G,U), $(\hat{G},\hat{U})$ – дві крайові пари для (L,L_0), то існує єдина бієкція $E_L \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G,\hat{G})$ така, що $\hat{U} = E_L U$.

Дійсно, (H_L,P_L) – крайова пара для (L,L_0). Єдиність випливає з так званої «леми про трійку» [4].

Зауваження* 2.** (а***) В. Е. Лянце [8] (див. також [9]) довів, що

$$LH_L = H_M, \qquad MH_M = H_L, \tag{1}$$

$$(\forall u \in H_L)\ \ MLu = -u, \qquad (\forall \nu \in H_M)\ \ LM\nu = -\nu; \tag{2}$$

(***б***) із зауваження 1 випливає, що існують гільбертові простори G_1, G_2, а також оператори

$$\Gamma_1 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D[L],G_1), \qquad \Gamma_2 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D[L],G_2),$$

$$\tilde{\Gamma}_1 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D[M],G_2), \qquad \tilde{\Gamma}_2 \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(D[M],G_1)$$

такі, що

i) (G,Γ), $(\tilde{G},\tilde{\Gamma})$ (де $G = G_1 \oplus G_2$, $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$, $\tilde{G} = G_2 \oplus G_1$, $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_1 \oplus \tilde{\Gamma}_2$) – крайові пари для (L,L_0) та (M,M_0), відповідно (нагадаємо, що $M \overset{\text{def}}{=} L_0^*$, $M_0 \overset{\text{def}}{=} L^*$);

ii) $\forall y \in D(L),\ \forall z \in D(M)$

$$(Ly \mid z) - (y \mid Mz) = (\Gamma_1 y \mid \tilde{\Gamma}_2 z)_{G_1} - (\Gamma_2 y \mid \tilde{\Gamma}_1 z)_{G_2}. \tag{3}$$

Зі співвідношення (3) випливає, що

$$\Gamma_1 M \tilde{\Gamma}_1' = 0, \quad \Gamma_1 M \tilde{\Gamma}_2' = \mathbb{I}_{G_1}, \quad \Gamma_2 M_1 \tilde{\Gamma}_1' = \mathbb{I}_{G_2}, \quad \Gamma_2 M \tilde{\Gamma}_2' = 0. \tag{4}$$

Нижче скрізь припускаємо, що резольвентна множина $\rho(\hat{L})$ оператора $\hat{L} \overset{\text{def}}{=} L \downarrow \ker \Gamma_2$ (а отже, й резольвентна множина $\rho(\hat{M})$ оператора

$\hat{M} \overset{\text{def}}{=} \hat{L}^* = M \downarrow \ker \tilde{\Gamma}_2)$ є непорожньою, і що для кожного $\lambda \in \rho(\hat{L})$ резольвенти

$$\hat{L}_\lambda \overset{\text{def}}{=} (\hat{L} - \lambda \mathbb{I}_H)^{-1}, \qquad \hat{M}_{\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} (\hat{M} - \bar{\lambda} \mathbb{I}_H)^{-1} = L_\lambda^*,$$

відомі. Покладемо

$$Z_\lambda \overset{\text{def}}{=} (\tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}})^*, \qquad \lambda \in \rho(\hat{L}). \tag{5}$$

Лема 1. $\forall \lambda \in \rho(\hat{L})$ $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$ *і*

$$Z_\lambda = (\hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M) + M)\tilde{\Gamma}_1'. \tag{6}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $\hat{M}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(H, D[M])$, $\tilde{\Gamma}_1 \in \mathcal{B}(D[M], G_2)$, то оператор $Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, H)$ визначено коректно. Далі,

$$\forall a \in G_2,\ \forall y \in H \qquad (Z_\lambda a \mid y) = (a \mid \tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}} y)_{G_2} = (\tilde{\Gamma}_1' a \mid \hat{M}_{\bar{\lambda}} y)_M =$$

$$= (\tilde{\Gamma}_1' a \mid \hat{M}_{\bar{\lambda}} y) + (M\tilde{\Gamma}_1' a \mid M\hat{M}_{\bar{\lambda}} y) = (\hat{L}_\lambda \tilde{\Gamma}_1' a \mid y) +$$

$$+ (M\tilde{\Gamma}_1' a \mid y + \boldsymbol{\lambda} \hat{M}_{\bar{\lambda}} y) = (\hat{L}_\lambda \tilde{\Gamma}_1' a \mid y) + (M\tilde{\Gamma}_1' a \mid y) +$$

$$+ (\lambda \hat{L}_\lambda M\tilde{\Gamma}_1' a \mid y) = ((\hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M) + M)\tilde{\Gamma}_1' a \mid y).$$

Лему доведено. ♦

Лема 2. *Для будь-яких* $\lambda \in \rho(\hat{L})$ *маємо*

$$\Gamma_2 Z_\lambda = \mathbb{I}_{G_2}, \tag{7}$$

$$Z_\lambda \Gamma_2 \downarrow \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H) = \mathbb{I}_{\ker(L - \lambda \mathbb{I}_H)}, \tag{8}$$

$$R(Z_\lambda) = \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H). \tag{9}$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $R(\hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M)\tilde{\Gamma}_1') \subset D(\hat{L})$ і $R(M\tilde{\Gamma}_1') \subset \subset MH_M = H_L$, то з (6) випливає, що $R(Z_\lambda) \subset D(L)$. Іншими словами, ліва частина рівності (7) визначена коректно. Далі, беручи до уваги (4) та (6), отримуємо

$$\Gamma_2 Z_\lambda = \Gamma_2 (\hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M) + M)\tilde{\Gamma}_1' = \Gamma_2 M \tilde{\Gamma}_1' = \mathbb{I}_{G_2}.$$

Припустимо тепер, що $y \in \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H)$, $x \in H$. Беручи до уваги рівність $\tilde{\Gamma}_2 \hat{M}_{\bar{\lambda}} x = 0$ та застосовуючи (3) при $z = \hat{M}_{\bar{\lambda}} x$, отримуємо

$$(Z_\lambda \Gamma_2 y \mid x) = (\Gamma_2 y \mid \tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}} x)_{G_2} = -\left[(\Gamma_1 y \mid \tilde{\Gamma}_2 \hat{M}_{\bar{\lambda}} x)_{G_1} - (\Gamma_2 y \mid \tilde{\Gamma}_1 \hat{M}_{\bar{\lambda}} x)_{G_2}\right] =$$

$$= (y \mid M\hat{M}_{\bar{\lambda}} x) - (Ly \mid \hat{M}_{\bar{\lambda}} x) = (y \mid x) + \lambda (y \mid \hat{M}_{\bar{\lambda}} x) -$$

$$- \lambda (y \mid \hat{M}_{\bar{\lambda}} x) = (y \mid x).$$

Таким чином, рівність (8), з якої випливає включення $\ker(L - \lambda \mathbb{I}_H) \subset \subset R(Z_\lambda)$, справджується. З другого боку, співвідношення (2) та (6) показують, що

$$(L - \lambda \mathbb{I}_H) Z_\lambda = (L - \lambda \mathbb{I}_H)(\hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M) + M)\tilde{\Gamma}_1' = (\mathbb{I}_H + \lambda M)\tilde{\Gamma}_1' +$$

$$+ (L - \lambda \mathbb{I}_H) M \tilde{\Gamma}_1' = \tilde{\Gamma}_1' + L \downarrow H_L \cdot M \downarrow H_M \cdot \tilde{\Gamma}_1' = 0,$$

тобто $R(Z_\lambda) \subset \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H)$. Лему доведено. ♦

Наслідок 1. *Для будь-яких* $\lambda \in \rho(\hat{L})$, $a \in G_2$ *задача*

$$Ly = \lambda y, \qquad \Gamma_2 y = a$$

має єдиний розв'язок $y = Z_\lambda a$.

Наслідок 2. *Для будь-яких* $\lambda \in \rho(\hat{L})$ $M(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_1 Z_\lambda \in \mathcal{B}(G_2, G_1)$ *і*

$$D(L_0) \dot{+} \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H) = \{y \in D(L) : \Gamma_1 y = M(\lambda)\Gamma_2 y\}.$$

Д о в е д е н н я. З включення $R(Z_\lambda) \subset D(L)$ випливає, що $D(\Gamma_1 Z_\lambda) = D(L)$. Далі, беручи до уваги (4) та (6), отримуємо

$$\Gamma_1 Z_\lambda = \Gamma_1 \hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M)\tilde{\Gamma}_1' + \Gamma_1 M \tilde{\Gamma}_1' = \Gamma_1 \hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M)\tilde{\Gamma}_1'.$$

Таким чином, $G_2 \to G_1$-обмеженість оператора $\Gamma_1 Z_\lambda$ випливає з $H \to D[L]$-обмеженості оператора $\hat{L}_\lambda$ та з $D[M] \to D[L]$-обмеженості оператора $M \downarrow R(\tilde{\Gamma}_1') \subset M \downarrow H_M$ (див. зауваження 2).

Далі,

$$D(\hat{L}) \dot{+} \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H) = D(L). \tag{10}$$

Дійсно, якщо $y \in D(L)$, то $(L - \lambda \mathbb{I}_H)y \in H = R(\hat{L} - \lambda \mathbb{I}_H)$. Тому при деякому $u \in D(\hat{L})$ справджується рівність $(L - \lambda \mathbb{I}_H)y = (\hat{L} - \lambda \mathbb{I}_H)u$. Зрозуміло, що $y - u \in \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H)$. Припустимо, що $y \in \ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)$. З леми 2 та рівності (10) випливає існування елементів $u \in \ker \Gamma_2$, $a \in G_2$ таких, що $y = u + Z_\lambda a$. Маємо

$$0 = (\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2)(u + Z_\lambda a) =$$
$$= \Gamma_1 u - M(\lambda)\Gamma_2 u + M(\lambda)a - M(\lambda)\Gamma_2 Z_\lambda a = \Gamma_1 u,$$

тобто $u \in D(L_0)$. Таким чином,

$$\ker(\Gamma_1 - M(\lambda)\Gamma_2) \subset D(L_0) \dot{+} \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H).$$

Обернене включення випливає з леми 2. ♦

Зауваження 3. Подібними міркуваннями отримуємо, що для будь-якого $\lambda \in \rho(\hat{L})$ $\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \overset{\text{def}}{=} (\Gamma_1 \hat{L}_\lambda)^* \in \mathcal{B}(G_1, H)$ і

$$\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = (\hat{M}_{\bar{\lambda}}(\mathbb{I}_H + \bar{\lambda} L) + L)\Gamma_1', \qquad \tilde{\Gamma}_2 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} = \mathbb{I}_{G_1},$$

$$\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \tilde{\Gamma}_2 \downarrow \ker(M - \bar{\lambda}\mathbb{I}_H) = \mathbb{I}_{\ker(M - \bar{\lambda}\mathbb{I}_H)},$$

$$R(\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}) = \ker(M - \bar{\lambda}\mathbb{I}_H),$$

$$\tilde{M}(\bar{\lambda}) \overset{\text{def}}{=} \tilde{\Gamma}_1 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} \in \mathcal{B}(G_1, G_2),$$

$$D(M_0) + \ker(M - \bar{\lambda}\mathbb{I}_H) = \ker(\tilde{\Gamma}_1 - \tilde{M}(\bar{\lambda})\tilde{\Gamma}_2).$$

Більше того, для будь-якого $\lambda \in \rho(\hat{L})$ $M(\lambda)^* = \tilde{M}(\bar{\lambda})$. Справді (див. (4)),

$$\forall a \in G_1,\ \forall b \in G_2\ \ (\tilde{M}(\bar{\lambda})a \mid b)_{G_2} = (\tilde{\Gamma}_1 \tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid b)_{G_2} = (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid \tilde{\Gamma}_1' b)_M =$$

$$= (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid \tilde{\Gamma}_1' b) + (M\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid M\tilde{\Gamma}_1' b) = \left(\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid \tilde{\Gamma}_1' b\right) + (\bar{\lambda}\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid M\tilde{\Gamma}_1' b) =$$

$$= (\tilde{Z}_{\bar{\lambda}} a \mid (\mathbb{I}_H + \lambda M)\Gamma_1' b) = (a \mid \Gamma_1 \hat{L}_\lambda (\mathbb{I}_H + \lambda M)\Gamma_1' b)_{G_1} =$$

$$= (a \mid \Gamma_1 Z_\lambda b)_{G_1} = (a \mid M(\lambda) b)_{G_1}.$$

***Означення* 2.** Оператор-функція $M(\lambda) \overset{\text{def}}{=} \Gamma_1 Z_\lambda$ називається *функцією Вейля* оператора L_0, яка відповідає крайовій парі (G, Γ).

Лема 3. *Для будь-яких* $\lambda, \mu \in \rho(\hat{L})$ *справджується рівність*

$$M(\lambda) - M(\mu) = (\lambda - \mu)\tilde{Z}_{\bar{\mu}}^* Z_\lambda = (\lambda - \mu)\tilde{Z}_{\bar{\lambda}}^* Z_\mu. \tag{11}$$

Д о в е д е н н я.

$$Z_\lambda - Z_\mu = (\Gamma_1(\hat{L}_{\bar{\lambda}} - \hat{L}_{\bar{\mu}}))^* = (\lambda - \mu)(\Gamma_1 \hat{L}_{\bar{\lambda}} \hat{L}_{\bar{\mu}})^* = (\lambda - \mu)\hat{L}_{\bar{\mu}} Z_\lambda,$$

тому

$$M(\lambda) - M(\mu) = (\lambda - \mu)\Gamma_1 \hat{L}_\mu Z_\lambda = (\lambda - \mu)\tilde{Z}_{\bar{\mu}}^* Z_\lambda. \qquad \blacklozenge$$

Розглянемо деякі аналітичні властивості оператор-функцій Z_λ, $M(\lambda)$.

Лема 4. Z_λ *є аналітичною* $\mathcal{B}(G_2, H)$*-значною функцією, а* $M(\lambda)$ *− аналітичною* $\mathcal{B}(G_2, G_1)$*-значною функцією на* $\rho(\hat{L})$. *Більше того, для будь якого* $n \in \mathbb{N}$

$$Z_\lambda^{(n)} = n!\hat{L}_\lambda^n Z_\lambda, \qquad M^{(n)}(\lambda) = n!\tilde{Z}_\lambda^* \hat{L}_\lambda^{n-1} Z_\lambda, \tag{12}$$

зокрема, $Z_\lambda' = \hat{L}_\lambda Z_\lambda$, $M'(\lambda) = \tilde{Z}_{\bar{\lambda}}^* Z_\lambda$.

Д о в е д е н н я. Оскільки $\hat{L}_\lambda$ є $\mathcal{B}(H)$-значною та $\mathcal{B}(H, D[L])$-значною аналітичною на $\rho(\hat{L})$ функцією і $\hat{L}_\lambda^{(n)} = n!\hat{L}_\lambda^{n+1}$, то $\Gamma_1 \hat{L}_\lambda$ є аналітичною $\mathcal{B}(H, G_1)$-значною функцією і $(\Gamma_1 \hat{L}_\lambda)^{(n)} = n!\Gamma_1 \hat{L}_\lambda \cdot \hat{L}_\lambda^n$. Тому

$$Z_\lambda^{(n)} = ((\Gamma_1 \hat{L}_{\bar{\lambda}})^*)^{(n)} = ((\Gamma_1 \hat{L}_{\bar{\lambda}})^{(n)})^* = n!(\Gamma_1 \hat{L}_{\bar{\lambda}} \cdot \hat{L}_{\bar{\lambda}}^n)^* = n!\hat{L}_{\bar{\lambda}}^n Z_\lambda.$$

Першу з рівностей (12) доведено. Виходячи з неї і застосовуючи (5), переконуємось у правильності другої. ♦

Лема 5. *Якщо для будь-яких* $\mu, \lambda \in \rho(\hat{L})$ *справджується рівність*

$$R(L_0 - \mu\mathbb{I}_H) \dot{+} \ker(L - \lambda\mathbb{I}_H) = H, \tag{13}$$

то ($\lambda \ne \mu \Rightarrow (M(\lambda) - M(\mu))^{-1} \in \mathcal{B}(G_1, G_2)$).

Д о в е д е н н я. ***i***) $\ker(M(\lambda) - M(\mu)) = \{0\}$. Припустимо, що для деякого $a \in G_2$ виконується рівність

$$(M(\lambda) - M(\mu))a = 0.$$

Тоді (див. (5), (11)) $\Gamma_1 \hat{L}_\mu Z_\lambda a = 0$, тобто $\hat{L}_\mu Z_\lambda a \in \ker \Gamma_1$. Але $\hat{L}_\mu Z_\lambda a \in \ker \Gamma_2$, тому $\hat{L}_\mu Z_\lambda a \in D(L_0)$. Таким чином,

$$Z_\lambda a = (\hat{L} - \mu\mathbb{I}_H)\hat{L}_\mu Z_\lambda a = (L_0 - \mu\mathbb{I}_H)\hat{L}_\mu Z_\lambda a \in R(L_0 - \mu\mathbb{I}_H).$$

З другого боку, $Z_\lambda a \in \ker(L - \lambda \mathbb{I}_H)$. Враховуючи (13), переконуємося, що $Z_\lambda a = 0$. Звідси і з (7) випливає, що $a = \Gamma_2 Z_\lambda a = 0$.

ii) $\quad R\big(M(\lambda) - M(\mu)\big) \ \big(= R(\Gamma_1 \hat{L}_\mu Z_\lambda)\big) = G_1$.

З означення 1 випливає, що для заданого $h \in G_1$ існує $y \in D(\hat{L})$ таке, що $\Gamma_1 y = h$.

Далі, з огляду на (9) і (13), існують $y_0 \in D(L_0)$ та $a \in G_2$, які задовольняють співвідношення $(\hat{L} - \mu \mathbb{I}_H) y = (L_0 - \mu \mathbb{I}_H) y_0 + Z_\lambda a$. З цієї рівності випливає таке:

$$(\hat{L} - \mu \mathbb{I}_H)(y - y_0) = Z_\lambda a \Rightarrow \hat{L}_\mu Z_\lambda a = y - y_0 \Rightarrow \Gamma_1 \hat{L}_\mu Z_\lambda a = \Gamma_1 (y - y_0) = h .$$

Таким чином, рівняння $\Gamma_1 \hat{L}_\mu Z_\lambda a = h$ має (єдиний) розв'язок a для всіх $h \in G_1$. Лему доведено. ♦

Аналогічно доводимо, що з (13) випливає співвідношення

$$\forall \lambda \in \rho(\hat{L}) \qquad (\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}} Z_\lambda)^{-1} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G_1, G_2).$$

Теорема 1. *Довільне* $\lambda_0 \in \rho(\hat{L})$ *є полюсом першого порядку для функції* $\big(M(\lambda) - M(\lambda_0)\big)^{-1}$ *і*

$$\operatorname{Res}\big|_{\lambda=\lambda_0} \big(M(\lambda) - M(\lambda_0)\big)^{-1} = (\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0})^{-1}.$$

Д о в е д е н н я. Покладемо

$$\Pi(\lambda) = \begin{cases} (\lambda - \lambda_0)^{-1} \big(M(\lambda) - M(\lambda_0)\big), & \lambda \neq \lambda_0, \\ M'(\lambda_0) = \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0}, & \lambda = \lambda_0. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0} \Pi(\lambda) = M'(\lambda_0) = \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0}$ (в сенсі рівномірної операторної збіжності). Тому

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \big[(\lambda - \lambda_0)(M(\lambda) - M(\lambda_0)^{-1}\big] = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \Pi(\lambda)^{-1} = (\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0})^{-1}.$$

Теорему доведено. ♦

***Зауваження* 4.** Теорема 1 показує, що в деякому околі точки $\lambda_0 \in \rho(\hat{L})$ має місце таке розвинення:

$$\big(M(\lambda) - M(\lambda_0)\big)^{-1} = \frac{1}{\lambda - \lambda_0} (\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0})^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R^{(n)} , \tag{14}$$

де $R^{(n)} \in \boldsymbol{\mathcal{B}}(G_1, G_2)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. З іншого боку, враховуючи (12), отримуємо

$$M(\lambda) - M(\lambda_0) = \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n \, \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} \hat{L}^{n-1}_{\lambda_0} Z_{\lambda_0} .$$

Перемножуючи обидві частини двох останніх рівностей, отримуємо рекурентні співвідношення для коефіцієнтів $R^{(n)}$ з (14):

$$\sum_{m=0}^{n} \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} \hat{L}^m_{\lambda_0} Z_{\lambda_0} \cdot R^{(n-m-1)} = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad R^{(-1)} = (\tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} Z_{\lambda_0})^{-1} .$$

Зокрема,

$$R^{(0)} = -R^{(-1)} \cdot \tilde{Z}^*_{\bar{\lambda}_0} \hat{L}_{\lambda_0} Z_{\lambda_0} \cdot R^{(-1)}.$$

1. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. об-ва. – 1952. – **1**. – С. 187–246.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 284 с.
3. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией. – Донецк, 1985. – 52 с. – (Препр. / АН УССР. Донецк. физ.-техн. ин-т; 85–9).
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – Москва: Наука, 1976. – 544 с.
5. *Кочубей А. Н.* Про розширення додатно визначеного симетричного оператора // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168–170.
6. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_{æ}$ // Функц. анализ и его прилож. – 1971. – **5**, № 3. – С. 54–69.
7. *Крейн М. Г., Овчаренко И. Е.* О Q-функциях и sc-резольвентах неплотно заданных эрмитовых сжатий // Сиб. мат. журн. – 1977. – **18**, № 5. – С. 1032–1056.
8. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве // Теория функций, функц. анализ и их прилож. – 1972. – Вып. **16**. – С. 165–186.
9. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов. – Киев: Наук. думка, 1983. – 210 с.
10. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектр. анализ дифференц. операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 106–131.
11. *Сторож О. Г.* Про деякі аналітичні та асимптотичні властивості функції Вейля невід'ємного оператора // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – **43**, № 4. – С. 18–23.
12. *Brown M., Hinchcliffe J., Marletta M., Naboko S., Wood I.* The abstract Titchmarsh–Weyl M-function for adjoint operator pairs and its relation to the spectrum // Integr. Equat. Operat. Theor. – 2009. – **63**, No. 3. – P. 297–320.
13. *Derkach V., Hassi S., Malamud M., de Snoo H.* Boundary relations and generalized resolvents of symmetric operators // Russ. J. Math. Phys. – 2009. – **16,** No. 1. – P. 17–60.
14. *Grubb G.* A characterization of the non local boundary value problems associated with an elliptic operator // Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. – 1968. – **22,** No. 3. – P. 425–513.
15. *Hassi S., de Snoo H. S. V., Szafraniec F. H.* Infinite-dimensional perturbations, maximally nondensely defined symmetric operators, and some matrix representations // Indag. Math. – 2012. – **23**, No. 4. – P. 1087–1117.

НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ВЕЙЛЯ ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Исследуется функция Вейля $M(\lambda)$ замкнутого линейного оператора, действующего в комплексном гильбертовом пространстве. Установлены условия, гарантирующие, что комплексное число λ_0 является полюсом первого порядка оператор-функции $\left(M(\lambda)-M(\lambda_0)\right)^{-1}$.

SOME ANALYTIC PROPERTIES OF THE WEYL FUNCTION OF CLOSED OPERATOR

The Weyl function $M(\lambda)$ of a closed linear operator acting in a complex Hilbert space is investigated. The conditions guaranteeing that a complex number λ_0 is a pole of the first order for the operator function $\left(M(\lambda)-M(\lambda_0)\right)^{-1}$ are established.

Львів. нац. ун-т ім. Івана Франка, Львів

Одержано
27.06.13