

НЕКЛАСИЧНІ ПЕРІОДИЧНІ ФУНКЦІЇ: ЇХ ОБЧИСЛЕННЯ І ЗАСТОСУВАННЯ

На однопараметричній множині замкнених плоских в'язей, що мають чотири осі симетрії, побудовано систему неперервних T -періодичних функцій. Вони виражають значення декартових координат рухомої точки як функції пройденого шляху. Виявлено 2π -періодичні функції, які відрізняються від класичних тригонометричних знаком кривини в кожній точці її існування. Обчислено асимптотичні 2^3 -періодичні функції, які застосовано в задачі про рух матеріальної точки по замкнутій плоско-ребристій поверхні та при моделюванні кінематичних збурень несучих платформ твердих тіл.

Вступ. Періодичні процеси і симетричні геометричні структури широко поширені в об'єктах фізичної і біологічної природи. Класичними прикладами періодичних процесів у природі є рухи планет сонячної системи, що розглядаються як точкові маси для орбітальних переміщень або абсолютно тверді тіла при їх обертових рухах щодо фіксованої в просторі осі або точки. Математичним апаратом дослідження циклічних рухів матеріальних систем є класичні колові, еліптичні, сферичні та інші спеціальні аналітичні функції. Через це теорія 2π -періодичних і циклічних рухів є найбільш розробленою в сучасному динамічному аналізі дискретних і неперервних фізико-механічних систем [1, 2, 4–6, 10, 12, 13, 15, 16]. Проте задачі математичного моделювання об'єктів і процесів фізико-технічних систем потребують також застосування періодичних функцій неколової і неаналітичної природи. У роботі [15] побудовано клас періодичних функцій, які виникають при обчисленні декартових координат точки, що рухається по замкнених симетричних траєкторіях. Цей клас включає деякі неколові і неаналітичні функції з періодом $T = T(p) \in [2^{5/2}, 2^3]$, що залежать від одного параметра p . Функції з граничними значеннями періодів $T = 2^{5/2}$, $T = 2^3$ мають кусково-лінійне аналітичне зображення. Це є ромбічні [16] і асимптотичні [12] періодичні функції. Ромбічні функції з періодом $T = 2^{5/2}$ виявились достатньо вивченими. У той же час 2^3 -періодичні функції потребують подальшого дослідження як у теоретичному, так і в прикладному аспектах. У запропонованій статті викладено основи теорії періодичних функцій на симетричних замкнених траєкторіях і показано застосування 2^3 -періодичних функцій у задачах динаміки механічних систем.

1. Некласична задача про періодичний рух точки, обмеженої замкненою плоскою симетричною в'яззю. Розглянемо на площині Oxy однопараметричну сім'ю замкнених скінченних в'язей

$$F(x, y, p) = |y|^p + |x|^p = 1, \quad (1)$$

де $0 < p < \infty$. На рис. 1 зображено криві (1) для трьох різних значень параметра p : $p_1 = 0.5615$, $p_2 = 1$, $p_3 = 2$.

Рівняння (1) описує замкнені лінії з групою симетрій $L_4 4PC$. Вони можуть породжувати періодичні процеси при русі зображувальної точки по замкнутих траєкторіях при заданні її декартових координат x, y як функцій пройденого шляху. Базуючись на результатах [15], коротко викладемо способи

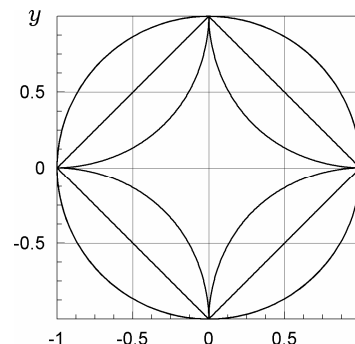


Рис. 1. Сім'я замкнених скінченних в'язей.

обчислення періоду та декартових координат точки при її рівномірному русі вздовж замкнених кривих (1). Для цього скористаємось відомими положеннями теоретичної механіки. Оскільки точка на лініях (1) площини Oxy має один ступінь свободи, за узагальнену координату виберемо довжину дуги (шляху) σ , який вона проходить у напрямі проти руху годинникової стрілки. Початок відліку довжини шляху виберемо у точці $y = 0$, $x = 1$. При проходженні траєкторій (1) за годинниковою стрілкою параметр σ вважатимемо від'ємним. Обчислимо довжину замкнутих ліній (1). При одиничній швидкості руху довжина цих ліній визначає період обертання точки по замкнутій траєкторії. Надалі шукану довжину позначатимемо через $T = T(p)$ і обчислимо її як контурний інтеграл по лінії (1):

$$T = \oint d\sigma, \quad d\sigma = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (2)$$

Зважаючи на симетрію замкнутих ліній, маємо

$$T = T(p) = 4 \int_0^1 K(x, p) dx, \quad (3)$$

$$K(x, p) = \frac{d\sigma}{dx} = \pm \sqrt{[(1 - |x|^p)^{1/p-1} |x|^{p-1}]^2 + 1}. \quad (4)$$

Тут перед коренем вибираємо знак «+», якщо $dx > 0$ і «-» при $dx < 0$.

При $p = 1$ знаходимо $T(1) = 4\sqrt{2}$. Для всіх $p \neq 1$ інтеграл (3) не є власним. При $p > 1$, $x = \pm 1$, $p < 1$, $x = 0$, підінтегральна функція має розрив другого роду. Коли $p = 2$, інтеграл (3) обчислюється у формі трансцендентного числа $T(2) = 2\pi$, яке відповідає довжині кола одиничного радіуса. У всіх інших випадках цей інтеграл може бути визначений чисельно.

Для отримання високоточних результатів необхідно виключити точки розриву з інтервалу інтегрування. Скористаємось симетричністю ліній (1) відносно прямої $y = x$. Ця пряма ділить дуги траєкторій (1) в першому і третьому квадранті на рівновеликі дуги в точках, які мають абсциси $x = \pm x^*$, $x^* = (1/2)^{1/p}$, $y^* = x^*$. Отже,

$$T(p) = \begin{cases} 8 \int_{x^*}^{x^*} K(u, p) du, & p > 1, \\ 0 & p = 1, \\ 8 \int_{x^*}^1 K(u, p) du, & p < 1. \end{cases}$$

Для кривих (1) виконуються такі граничні співвідношення:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = \lim_{p \rightarrow +0} T(p) = 8.$$

На рис. 2 показано графік кривої $T(p)$, яка має асимптоту $T = 8$ і точку мінімуму, де $dT/dp|_{p=4\sqrt{2}} = 0$. Всі прямі, паралельні до осі абсцис цього графіка, при $8 > T > 4\sqrt{2}$ перетинають криву $T(p)$ у двох точках, які називатимемо еквіперіодичними. Еквіперіодичним точкам відповідають замкнені лінії (1) однакової довжини. Координати рухомої точки, обчислені як функції довжини траєкторії (1), позначимо через $y_p(\sigma) = \sin(\sigma, p)$, $x_p(\sigma, p) = \cos(\sigma, p)$. Ці

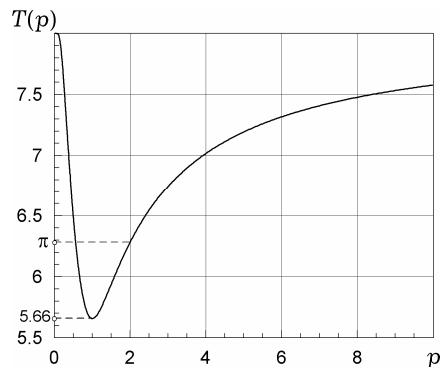


Рис. 2. Залежність довжини замкнених в'язей від параметра p .

функції є періодичними за аргументом σ з періодом $T_p = T(p)$: $\text{sip}(\sigma, p) = \text{sip}(\sigma + T_p, p)$, $\text{cosip}(\sigma, p) = \text{cosip}(\sigma + T_p, p)$. Надалі параметричний аргумент p функцій $\text{sip}(\sigma, p)$, $\text{cosip}(\sigma, p)$ іноді опускатимемо. При русі точки по лініях (1) $\sigma = \sigma(t)$, де t – параметр часу, функції $y_p(\sigma(t))$, $x_p(\sigma(t))$ можуть описувати певні фізико-механічні процеси.

Можна ввести також функцію p -тангенса: $\text{tap}(\sigma) = \text{sip}(\sigma)/\text{cosip}(\sigma)$. Ця функція має період $T_p/2$, тобто $\text{tap}(\sigma) = \text{tap}(\sigma + T_p/2)$.

Побудуємо функцію $\text{rip}(\sigma)$ за формулою

$$\text{rip}(\sigma) = \sqrt{\text{cosip}^2\sigma + \text{sip}^2\sigma},$$

яка визначає відстань поточної точки траєкторій (1) від початку координат. Вона є періодичною з періодом $T_p/4$, $\text{rip}(\sigma) = \text{rip}(\sigma + T_p/4)$, але для $p = 2$ $\text{rip}(\sigma) \equiv 1$. Також, як і для ромбічних функцій, певний зміст мають нормовані функції $\text{nsip}(\sigma) = \text{sip}(\sigma)/\text{rip}(\sigma)$, $\text{ncosip}(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)/\text{rip}(\sigma)$. Для введених функцій виконується така функціональна тотожність:

$$|\text{sip}(\sigma)|^p + |\text{cosip}(\sigma)|^p = 1, \quad \text{nsip}^2(\sigma) + \text{ncosip}^2(\sigma) = 1. \quad (5)$$

Друге зі співвідношень (5) є аналогом класичної теореми синусів і косинусів для плоских трикутників із заміною тригонометричних функцій синусів і косинусів на функції $\text{nsip}(\sigma)$, $\text{ncosip}(\sigma)$. Обчислення функцій $\text{sip}(\sigma)$, $\text{cosip}(\sigma)$ в околі точок перетину траєкторій з осями декартових координат здійснюється за формулами, аналогічними до формул зведення для колових функцій. Надалі знадобляться дані з табл. 1

Елементи табл. 1 є також наслідком симетрії ліній (1) з групою $L_4 4PC$. Аналогічні формули справджуються і для нормованих функцій $\text{nsip}(\sigma)$, $\text{ncosip}(\sigma)$.

Згідно з результатами роботи [15], для побудови залежності $x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma)$ виходитимемо з формули поточної довжини траєкторії (1) як функції абсциси рухомої точки

$$\sigma_p = - \int_1^x K(u, p) du. \quad (6)$$

Звідси знаходимо $\sigma_p = f(x)$. Для функції, оберненої до функції $\sigma_p = f(x)$, маємо $x = f^{-1}(\sigma_p) = x(\sigma_p)$. У першому квадранті осей Oxy функція $\sigma_p = f(x)$ є монотонною, тому побудова залежності $x = f^{-1}(\sigma_p)$ зводиться до побудови графіка відкладанням значення x по осі ординат, а величини σ_p – по осі абсцис. З урахуванням двозначності функції $K(u, p)$ згідно з (4) інтегральна формула (6) породжує залежність $\text{cosip}(\sigma)$ як парну функцію аргументу: два значення $\pm\sigma$ маємо для одного і того ж значення верхньої межі інтегрування. Функцію $\text{sip}(\sigma)$ обчислюємо за формулою (1):

$$y(\sigma) = \text{sip}(\sigma) = \pm(1 - |x(p)|^p)^{1/p} \quad (7)$$

як непарну функцію σ : $\text{sip}(\sigma) = -\text{sip}(-\sigma)$. Цю залежність можна також обчислити за формулою типу (6), змінивши в ній знак і інтервал інтегрування:

$$\sigma = \int_0^y K(u, p) du. \quad (8)$$

Ця формула породжує залежність $\sigma = H(y)$, обернувши яку, маємо $y(\sigma) = \text{sip}(\sigma) = H^{(-1)}(\sigma)$. Непарність функції $\text{sip}(\sigma) = y(\sigma)$ випливає з формули (8) при заміні в ній y на $-y$, при цьому властивість $y(0) = 0$ є очевидною. Згідно з [7, с. 99] функцію $\text{sip}(\sigma)$ можемо назвати антиперіодичною.

Для отримання високоточних результатів при використанні формул (6), (8) потрібно виключити точки розриву функції $K(u, p)$ з інтервалів інтегрування. Алгоритм такого виключення викладено в роботі [15]. Цей алгоритм передбачає паралельне обчислення функцій $\text{cosip}(\sigma)$, $\text{sip}(\sigma)$ із інтегральних співвідношень типу (6), (8) на інтервалах x, y , які не містять точок розриву функції $K(u, p)$ і подальшого використання рівняння в'язі (1) для інтервалів з точками розриву. За наявності групи симетрії порядку $L_4 4PC$ інтегральні формули (6), (8) використовуються тільки в першій чверті періоду, при цьому приймаються до уваги дані табл. 1 у формі

$$\text{sip}(\sigma + T/2) = -\text{sip}(\sigma), \quad \text{sip}(\sigma + T/4) = \text{cosip}(\sigma).$$

Підставляючи $T(p) = 2\pi$ у формулу (3), знаходимо два корені: $p_1 = 0.5615$, $p_2 = 2$. На рис. 3 зображено еквіперіодичні гармоніки $\text{cosip}(\sigma, p_i)$, $\text{sip}(\sigma, p_i)$, $i = 1, 2$. Бачимо, що корінь p_2 відповідає класичним тригонометричним функціям: $\text{cosip}(\sigma, p_2) = \cos \sigma$, $\text{sip}(\sigma, p_2) = \sin \sigma$. Неперервні функції $\text{cosip}(\sigma, p_1) = \text{antcos}(\sigma)$ (антикосинус), $\text{sip}(\sigma, p_1) = \text{antsin}(\sigma)$ (антисинус) мають розривні похідні в трьох і двох точках на одному періоді їх існування відповідно. Видно також, що отримані пари періодичних функцій відрізняються знаком кривини $k(\sigma)$ у кожній точці її існування.

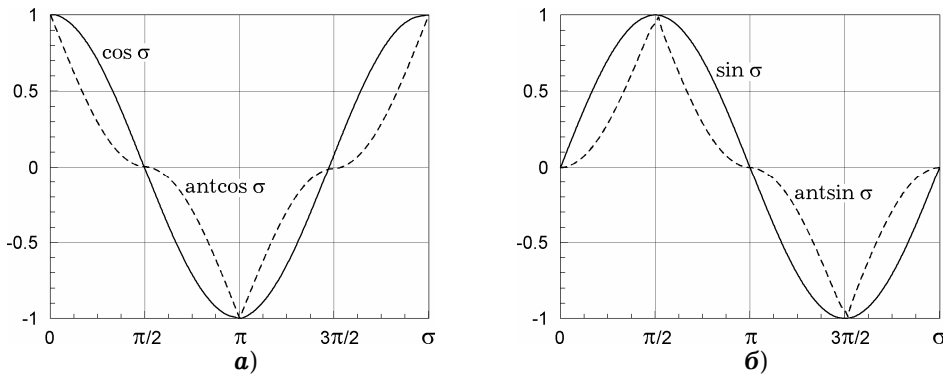


Рис. 3. Еквіперіодичні гармоніки для $T(p) = 2\pi$.

Обчислимо кутову швидкість Ω обертання вектора дотичної до плоскої кривої у точці, яка рухається за законом $x = x(t)$, $y = y(t)$, де t – параметр часу:

$$\Omega = \frac{d}{dt} \left(\arctg \frac{dy}{dx} \right) = k(\sigma) \frac{d\sigma}{dt}.$$

У роботі [15] величину Ω названо обертанням дотичної (ОД). На рис. 3 величина Ω для кожної пари кривих відрізняється знаком. На рис. 4 зображено нормуючий дільник $\text{rip}(\sigma)$ і нормовані гармоніки $\text{nacos}(\sigma)$, $\text{nasin}(\sigma)$ при $p = p_1$:

$$\text{nacos}(\sigma) = \frac{\text{antcos}(\sigma, p_1)}{\text{rip}(\sigma, p_1)}, \quad \text{nasin}(\sigma) = \frac{\text{antsin}(\sigma, p_1)}{\text{rip}(\sigma, p_1)},$$

$$\text{rip}(\sigma, p_1) = (\text{antcos}^2(\sigma, p_1) + \text{ant sin}^2(\sigma, p_1))^{1/2}. \quad (9)$$

Інтегральні рівняння (6), (8) можуть породжувати неперервні періодичні функції, що зображуються кусково-прямолинійними відрізками. Згідно з рис. 2 ці функції відповідають значенням параметра p , який зумовлює екстремальні (граничні) значення функції $T(p)$. Це, перш за все, значення $p = 1$, що відповідає її мінімуму $T_{\min} = T(1) = 2^{5/2}$, а також пара граничних значень, яку одержуємо при $p \rightarrow 0$ і $p \rightarrow \infty$, що обумовлюють гранично можливе значення $T_{\max} = T(0) = T(\infty) = 8$.

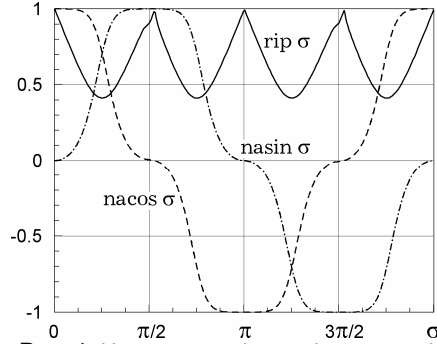


Рис. 4. Нормуючий дільник і нормовані гармоніки для $p = 0.5615$.

2. Обчислення функцій з екстремальними значеннями періодів. Розглянемо випадок $p = 1$, при якому $K(u, 1) = \sqrt{2} = q$, і функцію $x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma, 1)$ визначимо безпосередньо з рівняння

$$\sigma = -q \int_1^x du.$$

Звідси маємо

$$x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma, 1) = 1 - \sigma/q, \quad 0 \leq \sigma \leq 2q, \quad -1 \leq x(\sigma) \leq 1. \quad (10)$$

Отже, шукана функція означена на півперіоді її аргументу. Далі скористаємося значенням $\text{cosip}(T/2 + \sigma) = -\text{cosip}(\sigma)$ з табл. 1 для будь-яких p . Отже, інверсія останньої формули і перенесення значень її лінії вправо на $2q$ дає завершальний відрізок функції на другому півперіоді:

$$x(\sigma) = \text{cosip}(\sigma, 1) = \sigma/q - 3, \quad 2q < \sigma \leq 4q. \quad (11)$$

Функцію $\text{sip}(\sigma, 1)$ обчислюємо за алгебраїчною формулою (7) при $p = 1$. В результаті отримуємо

$$y(\sigma) = \text{sip}(\sigma, 1) = \begin{cases} \sigma/q, & 0 \leq \sigma \leq q, \\ 2 - \sigma/q, & q < \sigma \leq 3q, \\ \sigma/q - 4, & 3q < \sigma \leq 4q, \end{cases} \quad -1 \leq y(\sigma) \leq 1. \quad (12)$$

Функції $\text{sip}(\sigma, 1) = \text{sir}(\sigma)$, $\text{cosip}(\sigma, 1) = \text{cor}(\sigma)$ з періодом $T(1) = 4\sqrt{2}$ назвемо ромбічними як породжені ромбоквадратом, тобто квадратом з осями декартових координат Oxy , які співпадають з його діагоналями. Вони відповідають єдиному мінімуму кривої $T(p)$ і не мають зв'язаних з ними еквіперіодичних функцій. На множині замкнутих ліній (1) функції $\text{sir} \sigma$, $\text{cor} \sigma$ є єдиними функціями мінімального періоду. Ці функції побудовано у роботі [16] без їхнього зв'язку з інтегральними рівняннями (6), (8).

Ромбічні функції, що відповідають параметру $p = 1$, є не єдиними періодичними функціями, що мають кусково-лінійну форму. Таку ж форму мають функції $\text{sip}(\sigma, p)$, $\text{cosip}(\sigma, p)$ при граничних або дуже близьких до них значеннях параметра p . Дві пари таких функцій розглянуто в роботах [12, 13]. Вони визначаються таким чином: для першої пари маємо

$$\lim_{p \rightarrow 0} \text{sip}(\sigma, p) = f_s(\sigma), \quad \lim_{p \rightarrow 0} \text{cosip}(\sigma, p) = f_c(\sigma). \quad (13)$$

Функції $f_s(\sigma)$, $f_c(\sigma)$ є періодичними з періодом $T = 8$: $f_s(\sigma) = f_s(\sigma + 8)$, $f_c(\sigma) = f_c(\sigma + 8)$. При цьому функцію $f_c(\sigma)$ отримуємо з функції $f_s(\sigma)$ зсувом її на чверть періоду вліво вздовж осі абсцис:

$$f_c(\sigma) = f_s(2 - \sigma). \quad (14)$$

Друга пара граничних періодичних функцій з максимальним періодом $T = 2^3$ визначається такими співвідношеннями:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \text{sip}(\sigma, p) = g_s(\sigma), \quad \lim_{p \rightarrow \infty} \text{cosip}(\sigma, p) = g_c(\sigma).$$

Для функції $g_c(\sigma)$ маємо рівність, аналогічну (14):

$$g_c(\sigma) = g_s(2 - \sigma). \quad (15)$$

Ці функції обчислюються як розв'язки інтегральних рівнянь (6), (8) з використанням таких співвідношень:

$$x^*(p) = y^*(p) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/p}, \quad \lim_{p \rightarrow 0} x^*(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} x^*(p) = 1,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} T(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} T(p) = 8,$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} K(x, p) = \begin{cases} \pm 1 & \forall x \neq 0, \\ \pm \infty & x = 0, \end{cases} \quad \lim_{p \rightarrow \infty} K(x, p) = \begin{cases} \pm 1 & \forall |x| < 1, \\ \pm \infty & x = \pm 1. \end{cases}$$

Застосовуючи ці співвідношення, обчислимо функції і представимо їх графічно та в аналітичній формі. На рис. 5 суцільними лініями зображено функції $f_s(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ на інтервалі одного періоду, обчислені при двох значеннях параметра p , які відрізняються на чотири порядки: $f_s(\sigma) \approx \text{sip}(\sigma, p)|_{p=0.05}$, $g_s(\sigma) \approx \text{sip}(\sigma, p)|_{p=500}$.

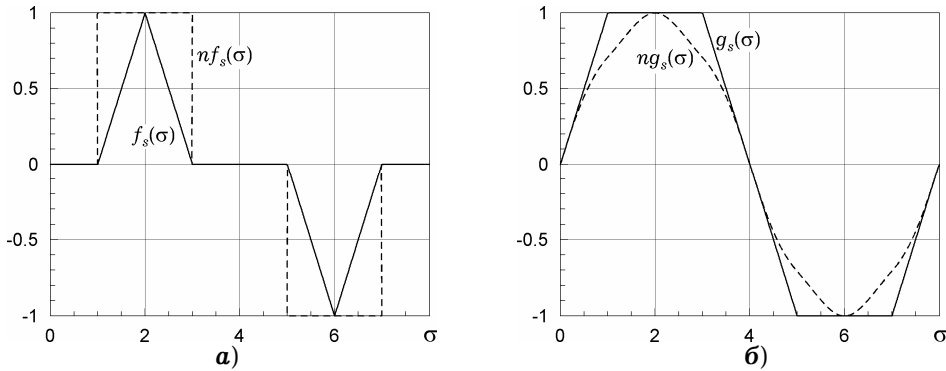


Рис. 5. Прості та нормовані 2^3 -періодичні гармоніки при $p \ll 1$ і $1/p \ll 1$.

Таким чином, при гранично малих значеннях параметра p маємо систему знакозмінних трикутних імпульсів. Вони розділені відрізками довжини $T/4 = 2$ майже нульового значення. Для великих значень параметра p мають місце імпульси трапецеїдальної форми. Вони містять горизонтальні відрізки завдовжки $T/4 = 2$, віддалені від осі абсцис на величину, що майже дорівнює одиниці. Кусково-лінійне представлення цих функцій на інтервалі одного періоду має вигляд

$$f_s(\sigma) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \sigma < 1, \\ \sigma - 1, & 1 < \sigma \leq 2, \\ 3 - \sigma, & 2 < \sigma \leq 3, \\ 0, & 3 < \sigma \leq 5, \\ -\sigma + 5, & 5 < \sigma \leq 6, \\ -7 + \sigma, & 6 < \sigma \leq 7, \\ 0, & 7 < \sigma \leq 8, \end{cases} \quad g_s(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & 0 \leq \sigma \leq 1, \\ 1, & 1 < \sigma \leq 3, \\ 4 - \sigma, & 3 < \sigma \leq 5, \\ -1, & 5 < \sigma \leq 7, \\ \sigma - 8, & 7 < \sigma \leq 8. \end{cases} \quad (16)$$

Аналітичне представлення функцій $f_c(\sigma)$ і $g_c(\sigma)$ можна отримати на підставі формул (14), (15).

Нормовані функції $nf_s(\sigma)$, $nf_c(\sigma)$, $ng_s(\sigma)$, $ng_c(\sigma)$ обчислюємо за формулами типу (9):

$$\begin{aligned} nf_\lambda(\sigma) &= f_\lambda(\sigma)/rif(\sigma), & ng_\lambda(\sigma) &= g_\lambda(\sigma)/rig(\sigma), & \lambda &= s, c, \\ rif(\sigma) &= \sqrt{f_c^2(\sigma) + f_s^2(\sigma)}, & rig(\sigma) &= \sqrt{g_c^2(\sigma) + g_s^2(\sigma)}, \\ rif(\sigma + 2) &= rif(\sigma), & rig(\sigma + 2) &= rig(\sigma). \end{aligned}$$

Стосовно формул (14)–(16) відповідні обчислення дають такі вирази:

$$rif(\sigma) = \begin{cases} 1 - |\sigma|, & 0 \leq |\sigma| \leq 1, \\ |\sigma| - 1, & 1 < |\sigma| \leq 2, \end{cases} \quad rig(\sigma) = \begin{cases} \sqrt{1 + \sigma^2}, & 0 \leq |\sigma| \leq 1, \\ \sqrt{1 + (2 - |\sigma|)^2}, & 1 < |\sigma| \leq 2. \end{cases}$$

Функції $nf_s(\sigma)$, $ng_s(\sigma)$ зображено на рис. 5 штриховими лініями.

Використовуючи в класичних рівняннях замкнутих поверхонь граничні періодичні функції $cor(\sigma)$, $sir(\sigma)$, $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ замість тригонометричних (колових), можна отримати математичні моделі скінченних в'язей у формі плоско-ребристих поверхонь. Такі моделі можуть мати і чисто будівельно-архітектурне значення. Нижче розглянемо аналітико-механічну задачу про рух точки, обмеженої скінченною в'яззю у вигляді замкненої ребристої поверхні.

3. Некласична задача про рух матеріальної точки по негладкій поверхні. Класичним прикладом руху системи, підпорядкованої в'язям, є рух матеріальної точки по поверхні, що має у кожній точці скінченні головні радіуси кривини, а довільна крива на поверхні має скінченну нормальну і геодезичну кривину [8, с. 295]. Поверхня у тривимірному просторі з декартовою системою координат $Oxyz$ задається рівняннями

$$\rho = \rho(q_1, q_2), \quad \rho = x, y, z, \quad (17)$$

де праві частини цих рівнянь є неперервними функціями параметрів q_1, q_2 . Ці параметри за певних умов гладкості поверхні можна називати гауссовими координатами точки на поверхні.

Швидкість матеріальної точки $\dot{\rho} = \sum_{i=1}^2 \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \dot{q}_i$ представляє вектор на по-

верхні. Проте вектор прискорення матеріальної точки $\ddot{\rho}(q_1, q_2)$ не належить поверхні, оскільки на ній він представляється сумою двох взаємно перпендикулярних векторів: дотичного прискорення і геодезично нормального прискорення.

Нехай функції $\rho(q_1, q_2)$, $\rho = x, y, z$, є періодичними за кожним з аргументів:

$$\rho(q_1, q_2) = \rho(q_1 + T_1, q_2 + T_2).$$

Такі функції можуть описувати замкнені поверхні, а рухомі по них матеріальні точки можуть породжувати періодичні функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ тільки тоді, коли T_1, T_2 є співмірними величинами. Якщо ж T_1 і T_2 – неспівмірні періоди, відповідні їм поверхні будуть незамкнені, а функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ стануть лише майже періодичними. Випишемо рівняння Лагранжа другого роду для точки з двома ступенями свободи, що рухається по поверхні (17):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \quad k = 1, 2,$$

де

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial x}{\partial q_i} \frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i} \frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i} \frac{\partial z}{\partial q_j} = a_{ij}(q_1, q_2),$$

T – кінетична енергія матеріальної точки одиничної маси, $Q_k = Q_k(q, \dot{q}, t)$ –

узагальнена сила. У цьому випадку рівняння Лагранжа набувають вигляду [12]

$$\sum_i^2 a_{ik} \ddot{q}_i = - \sum_{i,j=1}^2 \begin{bmatrix} i, j \\ k \end{bmatrix} \dot{q}_i \dot{q}_j + Q_k, \quad j, k = 1, 2, \quad (18)$$

де $\begin{bmatrix} i, j \\ k \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right)$ – символ Крістоффеля першого роду.

Якщо в рівняннях (17) застосувати періодичні функції $\cos(q)$, $\sin(q)$, $g_c(q)$, $g_s(q)$, що відповідають граничним значенням параметра p , можемо отримати плоско-ребристі поверхні [13, 16]. У цьому випадку коефіцієнти $a_{ik}(q_1, q_2)$ квадратичної форми T будуть кусково-лінійними функціями, що мають розриви першого роду, а символи Крістоффеля виражатимуться через узагальнені функції Дірака. Вони матимуть або розриви другого роду в точках розриву першого роду коефіцієнтів $a_{ij}(q_1, q_2)$, або приймати нульові значення у точках, де всі коефіцієнти квадратичної форми одночасно є сталими величинами.

Для випадку, коли дискримінант квадратичної форми $D = \|a_{ik}\| \neq 0$, рівняння (18) можна розв'язати відносно других похідних. Тоді, вводячи символи Крістоффеля другого роду, рівняння (18) набудуть вигляду, у якому розривними є лише їхні праві частини. В окремих випадках інтегрування подібних систем диференціальних рівнянь можна виконати методом стикування розв'язків, які належать областям координат q_1, q_2 , що не містять точок розриву коефіцієнтів $a_{ij}(q_1, q_2)$, $i, j = 1, 2$. Зокрема, подібний прийом застосовано для випадку руху матеріальної точки всередині сфери [11].

Коли суміжні плоскі грані поверхні з'єднуються під прямим кутом, характер руху по ній матеріальної точки можна досить просто прослідкувати, використовуючи елементи класичної теорії удару. Як ілюстрацію розглянемо деякі приклади, при цьому будемо припускати, що $Q_k(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, t) = 0$, $k = 1, 2$.

Нехай рівняння (17) описують поверхню паралелепіпеда з довжиною ребер $2a$, $2b$, $2c$. З використанням граничних періодичних функцій $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ рівняння такої поверхні запишеться у вигляді

$$x = a g_c(\varphi) g_c(\lambda), \quad y = b g_c(\varphi) g_s(\lambda), \quad z = c g_s(\varphi),$$

$q_1 = \varphi \in [-2, 2]$, $q_2 = \lambda \in [0, 8]$, a, b, c – додатні параметри, що мають розмірність довжини. Комп'ютерна реалізація цієї поверхні при $a = 20$, $b = 40$, $c = 50$ зображена на рис. 6а.

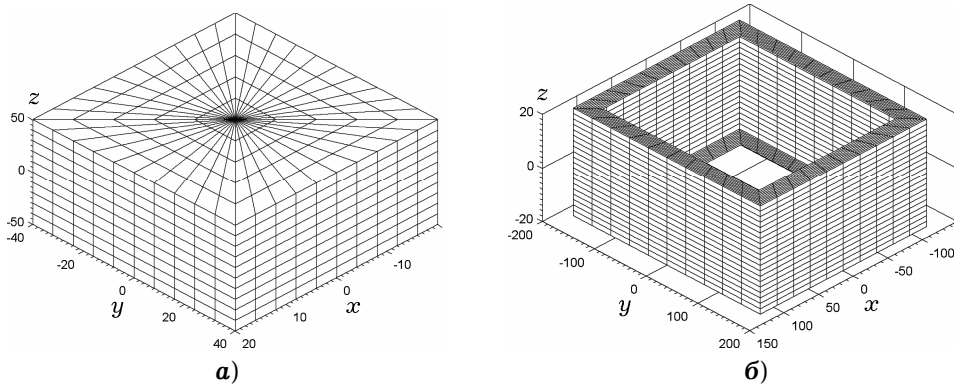


Рис. 6. Замкнені плоско-ребристі поверхневі в'язі.

У цьому випадку для коефіцієнтів a_{ij} , $i, j = 1, 2$, маємо такі формули:

$$\begin{aligned} a_{11} &= (a g_c^{(1)}(\varphi) g_c(\lambda))^2 + (b g_c^{(1)}(\varphi) g_s(\lambda))^2 + (c g_s^{(1)}(\varphi))^2, \\ a_{22} &= (a g_c(\varphi) g_c^{(1)}(\lambda))^2 + (b g_c(\varphi) g_s^{(1)}(\lambda))^2, \\ a_{12} &= a_{21} = \frac{1}{4} a^2 (g_c^2(\varphi))^{(1)} (g_c^2(\lambda))^{(1)} + \frac{1}{4} b^2 (g_c^2(\varphi))^{(1)} (g_s(\lambda))^{(1)}, \end{aligned}$$

де $(g_\alpha^2(\sigma))^{(1)} = 2g_\alpha(\sigma) g_\alpha^{(1)}(\sigma)$, $g_\alpha^{(1)}(\sigma) = \frac{d}{d\sigma} g_\alpha(\sigma)$ – розривні 2^3 -періодичні функції, $\alpha = s, c$, $\sigma = \varphi, \lambda$, при цьому

$$g_s^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \sigma < 1, \\ 0, & 1 < \sigma < 3, \\ -1, & 3 < \sigma < 5, \\ 0, & 5 < \sigma < 7, \\ 1, & 7 < \sigma \leq 8, \end{cases} \quad g_c^{(1)}(\sigma) = \begin{cases} 0, & 0 \leq \sigma < 1, \\ -1, & 1 < \sigma < 3, \\ 0, & 3 < \sigma < 5, \\ 1, & 5 < \sigma < 7, \\ 0, & 7 < \sigma \leq 8, \end{cases}$$

$$g_c^{(1)}(\sigma) = g_s^{(1)}(2 - \sigma), \quad g_c^{(1)}(\sigma) = -g_c^{(1)}(-\sigma), \quad g_s^{(1)}(\sigma) = g_s^{(1)}(-\sigma).$$

Згідно з цими формулами коефіцієнти $a_{ij}(\varphi, \lambda)$, $i, j = 1, 2$, є кусково-лінійними функціями з розривами першого роду.

Якісну форму руху матеріальної точки всередині порожнини паралелепіпеда можна адекватно описати, якщо прийняти відомі положення про абсолютно пружний і пластичний удари. Нехай в початковий момент часу матеріальна точка знаходиться на внутрішній поверхні грані $z = -c$ і вектор початкової швидкості лежить в її площині: $\dot{x}(0) = u_0$, $\dot{y}(0) = v_0$. Якщо $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$, при абсолютно пружному ударі матеріальна точка здійснюватиме рух подібно до більярдної кулі, ударяючись послідовно об грані $x = \pm a$, $y = \pm b$. У випадку, коли $u_0 = 0$, $v_0 \neq 0$ або $v_0 = 0$, $u_0 \neq 0$, матеріальна точка здійснюватиме прямолінійні циклічні рухи між гранями $x = \pm a$ або $y = \pm b$. При абсолютно пластичному ударі матеріальна точка, досягнувши однієї з граней $x = \pm a$ або $y = \pm b$, втрачає нормальну до грані складову швидкості і далі рухатиметься уздовж ребра до наступної грані $y = \pm b$ або $x = \pm a$. Після удару об перешкоджаючу грань вона повністю зупиняється.

Аналогічна картина руху матеріальної точки матиме місце усередині плоско-ребристої торовидної поверхні, що задається рівняннями:

$$x = a[R + r g_c(\varphi)] g_c(\lambda), \quad y = -b[R + r g_c(\varphi)] g_s(\lambda), \quad z = c g_s(\varphi),$$

де R, r – додатні числа; a, b, c – параметри, що мають розмірність довжини. На рис. 6б показано комп'ютерну реалізацію цієї поверхні для значень параметрів $a = 150$, $b = 200$, $c = 20$, $R = 1$, $r = 1$. Цю поверхню назвемо паралелепіпедним тором або коротко паратором. Застосовуючи згадані гіпотези теорії ударної взаємодії, можна, зокрема, встановити, що при початковому положенні точки на грані $z = -c$ для $u_0 \neq 0$, $v_0 \neq 0$ і при абсолютно пружному ударі об грань з ребрами, паралельними осі Oz , матеріальна точка може описувати як циклічну траєкторію, повністю проходячи всі чотири ділянки нижньої грані параторної галереї, так і траєкторію, що знаходиться в одній з ділянок грані паратора при $z = -c$.

Для замкнутих плоско-ребристих поверхонь, суміжні грані яких змикаються під тупими кутами (поверхні платонових тіл [17], а також LM -ромбоеліпсоїди, LM -ромботори [13, 16]), рух матеріальної точки всередині таких замкнених поверхонь може бути безударним з постійною за напрямком і модулем швидкістю переміщення між суміжними ребрами.

З множини періодичних функцій на замкнених лініях з групою симетрії $L_4 4PC$ найбільше практичне значення мають функції $\cos \sigma$, $\sin \sigma$, що відповідають цілому значенню параметра $p = 2$, а також граничні періодичні функції $\operatorname{cor}(\sigma)$, $\operatorname{sir}(\sigma)$, $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$. Щодо колових функцій, про це свідчить більш ніж тисячолітня практика їх застосування, особливо після відкриття формули Тейлора, яка пов'язала ці функції з нескінченними степеневими рядами, а також встановлення властивості їхньої ортогональності, що обумовлює діагональність відповідних матриць Грама для системи періодичних вектор-функцій, які визначаються аргументами, що відрізняються на цілий множник. Граничні періодичні функції є новими математичними об'єктами. Вони породжують квазидіагональні матриці Грама, які для випадку функцій $\operatorname{cor}(\sigma)$, $\operatorname{sir}(\sigma)$ можуть бути аналітично обчислені [14]. Встановлено, що цю властивість мають матриці Грама, побудовані на множині функцій $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ кратного аргументу. Функції $\operatorname{cor}(\sigma)$, $\operatorname{sir}(\sigma)$, $g_c(\sigma)$, $g_s(\sigma)$ виявилися вельми результативними при інтегруванні деяких рівнянь другого порядку з розривними характеристиками збудуючих сил [13, 16], при моделюванні плоско-ребристих поверхонь твердих тіл, архітектурних об'єктів, деяких кристалів, включаючи нанокристалічні структури. Це робить їх корисними у зв'язку з питаннями розвитку теорії наномеханіки матеріалів, визначеними в роботі [3].

4. Моделювання нестационарних кінематичних збурень споруд із застосуванням неklasичних 2^3 -періодичних функцій. Площа, яку охоплюють криві (1), прямує до нуля, якщо $p \rightarrow 0$, тому імпульсні 2^3 -періодичні функції типу $f_c(\sigma(t))$, $f_s(\sigma(t))$ не описують замкнених поверхонь. Але вони зручні для моделювання параметрів циклічних рухів фізико-механічних систем, що піддаються імпульсним навантаженням. Це стосується, зокрема, аналітичного відображення акселерограм точок земної поверхні при землетрусах в околі осередку тектонічних зсувів земної кори.

Для розрахунку реакції на сейсмічне збурення споруд, облаштованих спеціальними механізмами сейсмоізоляції [9], необхідно задавати як функції часу прискорення, швидкість і переміщення ділянок земної поверхні, що відводяться під забудову. Такі ділянки розглядаються як несучі рухомі платформи і їх можна назвати умовними поверхневими тектонічними платформами (ПТП). У теоретичних дослідженнях переносне прискорення $a(t)$ задають у формі деяких аналітичних виразів, ступінь адекватності яких перевіряють на основі експериментально вимірених акселерограм точок земної поверхні при землетрусах. Класичні вирази для $a(t)$ представляють собою суперпозицію експоненціально згасаючих тригонометричних функцій:

$$a(t) = \sum_{n=1}^K a_n \exp(\lambda_n t) \cos(\omega_n t + \alpha_n),$$

де a_n , λ_n , α_n , ω_n – постійні додатні величини, які мають такі фізичні розмірності: $[\omega_n] = [\lambda_n] = \text{с}^{-1}$, $[a_n] = \text{м}/\text{с}^2$, $[\alpha_n] = 0$. При цьому швидкість і переміщення ПТП обчислюють послідовним інтегруванням функції $a(t)$. Переносне прискорення ПТП в околі глибинних осередків тектонічних розломів і зсувів, як правило, має імпульсну циклічну форму. Це дає змогу застосувати 2^3 -періодичні функції для моделювання інерційно-кінематичних збурень споруд при землетрусах. Покажемо це на прикладі суперпозиції мультиплікату 2^3 -періодичних і дробово-раціональних функцій для моделювання процесів імпульсної форми, що згасають при $t \rightarrow \infty$. Такого типу процеси будемо представляти у формі суперпозиції згасаючих знаковмінних імпульсних функцій трикутної форми:

$$a(t) = \sum_{n=1}^K a_n f_c(\omega_n t + \alpha_n)(1 + \lambda_n t)^{-1}.$$

Для отримання згасаючих функцій швидкості $v(t)$ і переміщень $d(t)$ за заданими згасаючими прискореннями виникає необхідність обчислення неозначених інтегралів

$$\int f_c(\omega_n t + \alpha_n)(1 + \lambda_n t)^{-1} dt = J_c 1(t | \omega_n, \alpha_n, \lambda_n).$$

Після заміни $\sigma = \omega_n t + \alpha_n$ змінної інтегрування отримуємо інтеграл

$$\frac{1}{\omega_n} \int f_c(\sigma)(\alpha_n + b_n \sigma)^{-1} d\sigma = \frac{1}{\omega_n} F_c 1(\sigma | \alpha_n, b_n), \quad (19)$$

де $\alpha_n = 1 - \alpha_n b_n$, $b_n = \lambda_n / \omega_n$.

Тут вертикальна риска відділяє поточний аргумент функції σ від її параметричних аргументів α_n , b_n . Надалі індекс n у величинах ω_n , α_n , b_n будемо опускати.

Функція $F_c 1(\sigma | \alpha, b)$ допускає точне обчислення для кожного із шести інтервалів задання залежності $f_c(\sigma)$.

Для обчислення процесу переміщення ПТП за наявним прискоренням необхідне є його подвійне інтегрування. В результаті приходимо до інтегрування функції швидкості, що зводиться до обчислення такого інтеграла:

$$\int F_c 1(\sigma | \alpha, b) d\sigma = F_c 2(\sigma | \alpha, b).$$

Точні формули для залежностей $F_c 1(\sigma | a, b)$, $F_c 2(\sigma | a, b)$ є достатньо громіздкими. Тому має сенс отримати наближені (асимптотичні), але значно простіші аналітичні вирази невизначених інтегралів. Будемо виходити із формули (19) і обчислимо її інтеграл частинами. В результаті знаходимо

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int f_c(\sigma)(\alpha + b\sigma)^{-1} d\sigma &= \frac{1}{\omega} f_c^{(-1)}(\sigma)(\alpha + b\sigma)^{-1} + \\ &+ \frac{b}{\omega} \int f_c^{(-1)}(\sigma)(\alpha + b\sigma)^{-2} d\sigma = v(\sigma | \omega, \alpha, b). \end{aligned}$$

Звідси отримаємо таке граничне співвідношення:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} v(\sigma | \omega, \alpha, b) = \frac{1}{\omega} f_c^{(-1)}(\sigma).$$

Використовуючи відому в теорії тригонометричних рядів лему Рімана та її узагальнення [10], можна довести, що

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \int_{t_1}^{t_2} f_c^{(-1)}(\omega t + \alpha)(1 + \lambda t)^{-1} dt = 0,$$

де t_1 , t_2 – скінченні величини. Це дає підставу нехтувати другим доданком у двочленній формулі для $v(\sigma | \omega, \alpha, b)$ при достатньо великих значеннях параметра частоти ω ($\omega \approx 1/b$).

Обчислимо явну форму залежностей $f_c^{(-1)}(\sigma)$, $f_c^{(-2)}(\sigma)$. Інтегруючи вираз $f_c(\sigma)$, знаходимо $f_c^{(-1)}(\sigma)$ як непарну функцію аргументу σ :

$$f_c^{(-1)}(\sigma) = \begin{cases} \sigma - 1/2\sigma^2 \operatorname{sgn}(\sigma), & |\sigma| \in [0, 1], \\ \operatorname{sgn}(\sigma)/2, & |\sigma| \in (1, 3], \\ 3\sigma - (\sigma^2/2 + 4 \operatorname{sgn}(\sigma)), & |\sigma| \in (3, 4], \\ -5\sigma + (\sigma^2/2 + 12) \operatorname{sgn}(\sigma), & |\sigma| \in (4, 5], \\ -\operatorname{sgn}(\sigma)/2, & |\sigma| \in (5, 7], \\ -7\sigma + (\sigma^2/2 + 24) \operatorname{sgn}(\sigma), & |\sigma| \in (7, 8]. \end{cases}$$

Для функції $f_s^{(-1)}$ маємо очевидну формулу $f_s^{(-1)}(\sigma) = -f_c^{(-1)}(2 - \sigma)$, згідно з якою її графік можна отримати зсувом графіка $f_c^{(-1)}(\sigma)$ на чверть періоду вправо і виконати його інверсію. В результаті маємо

$$f_s^{(-1)}(\sigma) = \begin{cases} -1/2, & |\sigma| \in [0, 1], \\ \sigma^2/2 - \sigma \operatorname{sgn}(\sigma), & |\sigma| \in (1, 2], \\ 3\sigma \operatorname{sgn} \sigma - \sigma^2/2 - 4, & |\sigma| \in (2, 3], \\ 1/2, & |\sigma| \in (3, 5], \\ -\sigma^2/2 + 5\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) - 12, & |\sigma| \in (5, 6], \\ \sigma^2/2 + 24 - 7\sigma \operatorname{sgn}(\sigma), & |\sigma| \in (6, 7], \\ -1/2, & |\sigma| \in (7, 8]. \end{cases}$$

Для обчислення значень 2^3 -періодичних функцій при $-\infty < \sigma < \infty$ треба в цих і подальших формулах поміняти аргумент σ на $\bar{\sigma} = \sigma - 8E(\sigma/8)$, $E(x)$ – ціла частина числа x .

Використовуючи формулу для $f_c^{(-1)}(\sigma)$, простим інтегруванням знаходимо $f_c^{(-2)}(\sigma)$ ($f_c^{(-2)}(\sigma) = \int f_c^{(-1)}(\sigma) d\sigma + A$) як неперервну парну 2^3 -періодичну функцію аргументу σ , що має різні аналітичні вирази на шести відрізках заданої функції $f_c^{(-1)}$:

$$f_c^{(-2)}(\sigma) = \begin{cases} \sigma^2/2 - 1/6\sigma^3 \operatorname{sgn}(\sigma) + A, & |\sigma| \in [0, 1], \\ 1/2\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) - 1/6 + A, & |\sigma| \in (1, 3], \\ 3\sigma^2/2 - (\sigma^3/6 + 4\sigma) \operatorname{sgn} \sigma + 13/3 + A, & |\sigma| \in (3, 4], \\ -5\sigma^2/2 + (\sigma^3/6 + 12\sigma) \operatorname{sgn} \sigma - 17 + A, & |\sigma| \in (4, 5], \\ -1/2\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) + 23/6 + A, & |\sigma| \in (5, 7], \\ -7\sigma^2/2 + (\sigma^3/6 + 24\sigma) \operatorname{sgn} \sigma - 160/3 + A, & |\sigma| \in (7, 8]. \end{cases}$$

Тут A – довільна константа інтегрування, сталі величини $-1/6, 13/3, -17, 23/6, -160/3$ вибрано для забезпечення неперервності лінії $f_c^{(-2)}(\sigma)$.

Таблиця 2

σ	0	1	3	4	5	7	8
$f_c^{(-2)}(\sigma)$	0	1/3	4/3	5/3	4/3	1/3	0

У табл. 2 подано значення функції $f_c^{(-2)}(\sigma)$ на кінцях відрізків її існування при $A = 0$. Як бачимо, на інтервалі одного періоду функція $f_c^{(-2)}(\sigma)$ не змінює свого знака. Константу інтегрування A можна вибрати так, щоб на цьому періоді вона була знакозмінною. У частковому випадку такий вибір можна виконати за умови, щоб середнє значення функції $f_c^{(-2)}(\sigma)$ на інтервалі одного періоду ($T = 8$) дорівнювало нулеві. Це дає таку формулу для визначення константи інтегрування:

$$A = -\frac{1}{8} \int_0^8 f_c^{(-2)}(\sigma) d\sigma = -\frac{5}{6}.$$

На рис. 7 представлена акселерограма $a(\sigma)$ проектного землетрусу імпульсної природи та графіки швидкості $v(\sigma)$ і переміщення $d(\sigma)$ умовної ПТП. Обчислені результати отримано для таких значень вхідних параметрів:

$$k = 5, \quad \lambda_n = 0.05, \quad \omega_n = [1, 1.87, 3.43, 4.21, 5.47], \\ a_n = a_0 - \Delta(n - 1), \quad \Delta = 0.13, \quad a_0 = 1, \quad \alpha_0 = 1, \quad \alpha_n = \alpha_0 + n.$$

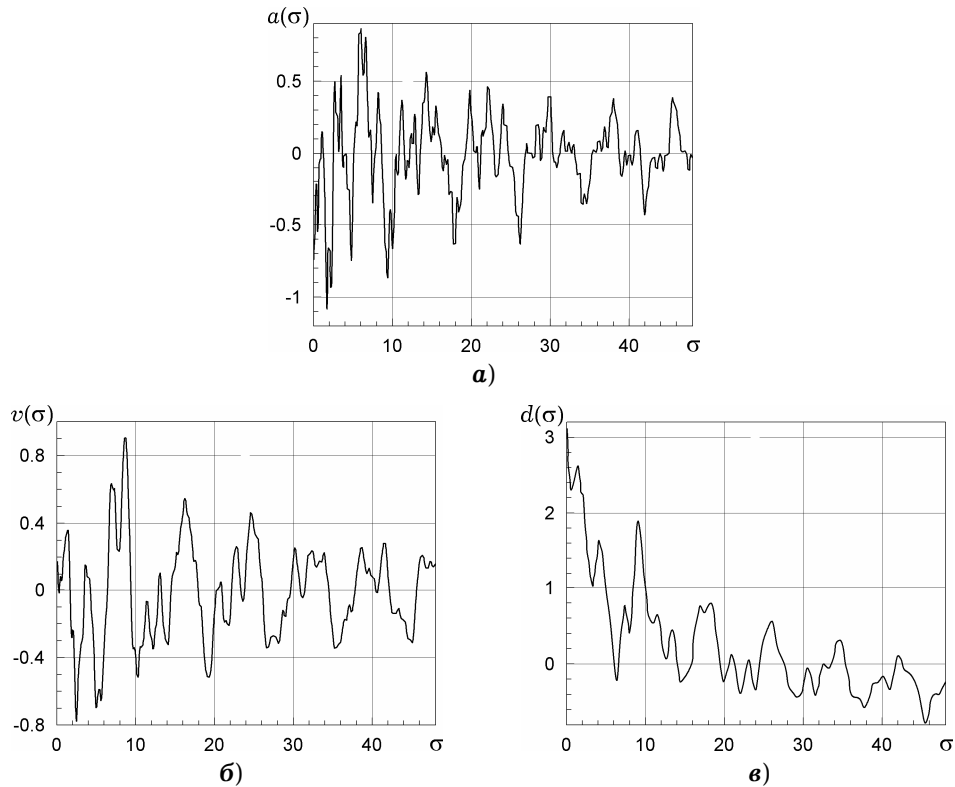


Рис. 7. Багаточастотне нестационарне імпульсне прискорення $a(\sigma)$ та його два послідовні інтеграли $v(\sigma)$ і $d(\sigma)$.

З цих рисунків випливає, що послідовне інтегрування багатоімпульсного нестационарного прискорення несучої платформи приводить до одержання гладких функцій її швидкості і переміщення. Це відповідає класичним результатам теоретичної механіки та автоматичного регулювання.

1. Алієв Ф. А., Ларін В. Б. Задачи оптимизации периодических систем // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 11. – С. 16–49.
Te same: Aliev F. A., Larin V. B. Optimization problems for periodic systems // Int. Appl. Mech. – 2009. – **45**, No. 11. – P. 1162–1188.
2. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы теории нелинейных колебаний. – Москва: Физматгиз, 1963. – 410 с.
3. Гузь А. Н., Руцицкий Я. Я. О построении основ механики нанокompозитов (Обзор) // Прикл. механика. – 2011. – **47**, № 1. – С. 4–61.
Te same: Guz A. N., Rushchitsky J. J. Establishing foundation of the mechanics of nanocomposites (Review) // Int. Appl. Mech. – 2011. – **47**, No. 1. – P. 2–44.
4. Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. – Москва: Наука, 1988. – 326 с.
5. Козінов С. В., Лобода В. В. Періодична система електропроникних тріщин на межі двох п'єзоелектричних матеріалів // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52**, № 2. – С. 81–91.
Te same: Kozinov S. V., Loboda V. V. A periodic system of electrically permeable cracks at the interface between two piezoelectric materials // J. Math. Sci. – 2010. – **170**, No. 5. – P. 659–673.
6. Кононенко В. О. Нелинейные колебания механических систем. – Киев: Наук. думка, 1980. – 381 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – Москва: Наука, 1973. – 832 с.
8. Лурье А. И. Аналитическая механика. – Москва: Физматгиз, 1961. – 823 с.
9. Плахтиенко Н. П. Динамика цепной системы твердых тел с фрикционно-гравитационными сейсмоамортизаторами. Закрепленные опоры // Прикл. механика. – 2009. – **45**, № 7. – С. 117–130.

- Te same: *Plakhtienko N. P.* Dynamics of a chain system of rigid bodies with gravity-friction seismic dampers: fixed supports // *Int. Appl. Mech.* – 2009. – **45**, No. 7. – P. 786–796.
10. *Плахтиєнко Н. П.* К исследованию движения тел под действием разрывных сил методом усреднения // *Прикл. механика.* – 1985. – **21**, № 8. – С. 84–91.
Te same: *Plakhtienko N. P.* Investigation by the averaging method of the motion of bodies under the action of discontinuous forces // *Int. Appl. Mech.* – 1985. – **21**, No. 8. – P. 798–804.
 11. *Плахтиєнко Н. П.* О поступательном движении твердого тела с фрикционно-гравитационными сейсмоамортизаторами // *Прикл. механика.* – 2010. – **46**, № 4. – С. 109–123.
Te same: *Plakhtienko N. P.* Translation of a rigid body with gravity-friction seismic dampers // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – **46**, No. 4. – P. 461–466.
 12. *Плахтиєнко М. П.* Асимптотичні періодичні функції на замкнених симетричних траєкторіях // XIII Міжнар. наукова конф. імені акад. М. Кравчука (13–15 трав. 2010 р., Київ): Матеріали конф. – Київ: НТУУ, 2010. – Т. II. – С. 216.
 13. *Плахтиєнко М. П.* Диференціальні рівняння періодичних та еволюційних функцій на множині плоских симетричних траєкторій // *Укр. мат. конгрес–2009. Секц. 1. Прикл. проблеми математики.* – Київ: Ін-т математики НАН України, 2010. – С. 173–193.
 14. *Плахтиєнко М. П.* Некласичні співвідношення між елементами матриць Грама системи векторів унітарного гільбертового простору // *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* – 2010. – **53**, № 4. – С. 188–197.
Te same: *Plakhtienko M. P.* Nonclassical relations between elements of Gramian matrices of vector systems of a unitary Hilbert space // *J. Math. Sci.* – 2012. – **181**, No. 4. – P. 529–540.
 15. *Плахтиєнко М. П.* Періодичні функції на замкнених траєкторіях з групою симетрій $L_4 4PC$ // *Доп. НАН України.* – 2008. – № 4. – С. 36–43.
 16. *Плахтиєнко М. П.* Ромбічні функції: початки теорії та прикладні задачі. – Київ: ЗНДП, 2005. – 132 с.
 17. *Стахов А., Слущенкова А., Щербаков И.* Код да Винчи и ряды Фибоначчи. – Санкт-Петербург: Издат. дом «Питер», 2006. – 320 с.

НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ: ИХ ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЕ

На однопараметрическом множестве плоских замкнутых связей с четырьмя осями симметрии построена система непрерывных T -периодических функций, выражающих значения декартовых координат движущейся точки как функций длины пройденного пути. Выявлены 2π -периодические функции, отличающиеся от классических тригонометрическими функциями знаком кривизны в каждой точке ее существования. Вычислены асимптотические 2^3 -периодические функции, которые применены в задаче о движении материальной точки по замкнутой плоско-ребристой поверхности и при моделировании кинематических возмущений несущих платформ твердых тел.

NONCLASSICAL PERIODIC FUNCTIONS: THEIR CALCULATION AND APPLICATION

On the one-parametric set of the flat closed constraints with four axes of symmetry the system of continuous T -periodic functions, expressing the values of Cartesian coordinates of moving point as functions of the length of passed way is constructed. The 2π -periodic functions that differ from the classical trigonometric functions by sign of the curvature at every point of their existence are revealed. The asymptotical 2^3 -periodic functions are calculated which are applied to the problem of motion of a material point in a closed flat-ribbed surface and in the modeling the kinematic perturbations of bearing platforms of solids.

Ін-т механіки ім. С. П. Тимошенка
НАН України, Київ

Одержано
20.09.12