

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ ДИФРАКЦІЇ E-ПОЛЯРИЗОВАНОЇ ХВИЛІ НА ЩІЛИНАХ В ІМПЕДАНСНІЙ ПЛОЩИНІ

Стаття присвячена задачі дифракції плоскої монохроматичної E-поляризованої хвилі на щілинах в імпедансній площині. Побудовано дискретну математичну модель граничних інтегральних рівнянь задачі. Проведено числовий експеримент з використанням ефективного чисельного методу дискретних особливостей.

Стационарне електромагнітне поле (залежність від часу задається множителем $e^{-i\omega t}$) описується рівняннями Максвелла, які у двовимірному випадку приводять до двох незалежних крайових задач для стаціонарного хвильового рівняння. Двовимірні задачі дифракції монохроматичної електромагнітної хвилі на ідеально провідних структурах приводять до двовимірних зовнішніх крайових задач Діріхле та Неймана для рівняння Гельмгольца.

Стаття присвячена побудові та чисельному аналізу дискретної математичної моделі задачі дифракції на щілинах в імпедансній площині. Ця модель дозволяє отримати необхідні характеристики електромагнітного поля, зокрема побудувати діаграми напрямленості.

Задачі розсіювання і дифракції електромагнітних хвиль імпедансними металевими та надпровідними тонкими стрічками з використанням методу дискретних особливостей (МДО) досліджені у в монографії [5] і в роботі [4], а з передканторовими стрічками – у роботі [12].

Математичні моделі задач дифракції на основі гіперсингулярних інтегральних рівнянь [10] також досліджуються чисельно МДО.

1. Постановка задачі та парні інтегральні рівняння. У роботі досліджується задача математичної теорії дифракції плоскої монохроматичної E-поляризованої електромагнітної хвилі на скінченній кількості щілин в імпедансній площині.

Поверхневий імпеданс металу є важливою фізичною характеристикою, яка визначає амплітудні та фазові співвідношення між електричними і магнітними полями на його поверхні.

Розглянута у роботі модель є наближенням до реальних фрактальних [11] антен у випадку, коли поле залежить від двох декартових координат. Фрактальні антени використовуються у різноманітних сучасних мобільних пристроях, оскільки компактність і широкосмугові властивості зробили їх незамінними в безпроводному зв'язку, в Bluetooth, Wi-Fi та GSM-стандартах. Їх теоретичне дослідження важливе як з точки зору розробки математичного апарату для розв'язання складних крайових задач електродинаміки, так і з точки зору більш точного наближення фізичних моделей до реальних. Тому побудова ефективної дискретної математичної моделі задачі дифракції плоскої монохроматичної електромагнітної E-поляризованої хвилі на щілинах, які є доповненням до канторової множини на відрізку $[-\ell, \ell]$ в імпедансній площині є актуальною задачею.

Передканторовими множинами інтервалів називаємо системи інтервалів, отримані за принципом побудови канторової множини на відрізку $[-\ell, \ell]$ на N -му кроці [11], як показано на рис. 1.

Для розв'язання двовимірної задачі дифракції шукаємо повне поле, яке задовольняє

– систему рівнянь Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E}(y, z) - i\omega\mu\mathbf{H}(y, z) &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H}(y, z) + i\omega\varepsilon\mathbf{E}(y, z) &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0; \end{aligned} \quad (1)$$

– імпедансні граничні умови Щукіна – Леонтовича:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = -Z_c [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]], \quad (2)$$

де $Z_c = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\omega\mu_c}{\sigma_c}}$ – імпеданс металу, μ_c – магнітна проникність металу,

σ_c – питома провідність металу, \mathbf{n} – одинична зовнішня нормаль до імпедансної площини;

– умови випромінювання Зоммерфельда на нескінченності;

– умови Мейкснера на ребрах стрічок.



Рис. 1. Передкаторові множини інтервалів на N -му кроці.

Розглядаємо випадок E -поляризації: $(E_x, 0, 0)$, $(0, H_y, H_z)$. Напрямок розповсюдження плоскої хвилі задається напрямком хвильового вектора \mathbf{k} (рис. 2). Єдина відмінна від нуля компонента E_x електричного поля задовольняє двовимірне рівняння Гельмгольца поза межами металу:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \epsilon\mu\omega^2 E_x = 0, \quad \epsilon\mu\omega^2 = k^2, \quad (3)$$

і зазначені вище умови, а відмінні від нуля компоненти H_z , H_y магнітного поля визначаємо з рівнянь Максвелла (1):

$$H_y = \frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad H_z = -\frac{1}{i\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial y}.$$

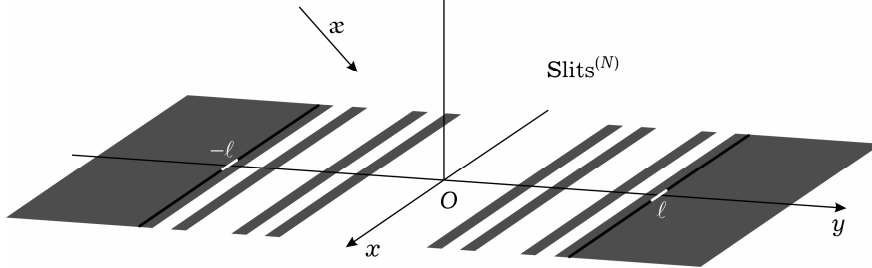


Рис. 2. Дифракційна структура.

Декартову систему координат вибираємо так, що набір щілин знаходиться у площині xOy , а вісь Ox паралельна до ребер стрічок:

$$\text{Slits}^{(N)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, y \in \text{SI}_\ell^{(N)}, z = 0\},$$

$$\text{SI}_\ell^{(N)} = \bigcup_{q=1}^{2^N-1} (a_q^N, b_q^N).$$

Перейдемо до безрозмірних координат:

$$\varsigma = \frac{x}{\ell}, \quad \xi = \frac{y}{\ell}, \quad \zeta = \frac{z}{\ell}, \quad \alpha_q^N = \frac{a_q^N}{\ell}, \quad \beta_q^N = \frac{b_q^N}{\ell},$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{k}\ell, \quad \text{SI}^{(N)} = \bigcup_{q=1}^{2^N-1} (\alpha_q^N, \beta_q^N).$$

З нескінченності під кутом α падає плоска E -поляризована хвиля:

$$u_{\text{inc}}^N(\xi, \zeta) = E_\zeta(\xi, \zeta) = e^{i\alpha(\xi \sin \alpha - \zeta \cos \alpha)}, \quad (4)$$

де α – кут між додатнім напрямом осі ζ і напрямком розповсюдження плоскої монохроматичної хвилі, α – модуль хвильового вектора (рис. 3).

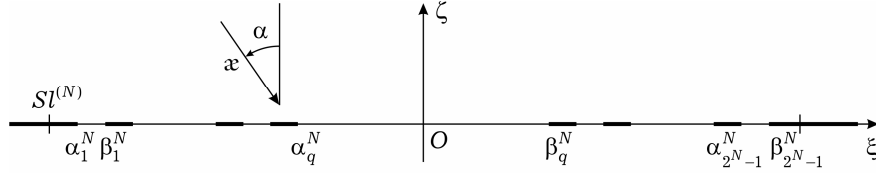


Рис. 3. Переріз дифракційної структури в площині $\xi O \zeta$.

Повне поле шукаємо у вигляді

$$u^{(N)}(\xi, \zeta) = \begin{cases} u_0^N(\xi, \zeta) + u_+^N(\xi, \zeta), & \zeta > 0, \\ u_-^N(\xi, \zeta), & \zeta < 0, \end{cases} \quad (5)$$

де $u_0^N(\xi, \zeta)$ – відомий розв'язок рівняння Гельмгольца, який подаємо як суму падаючої і відбитої хвиль у півпросторі $\zeta \geq 0$ при закритих щілинах:

$$u_0^N(\xi, \zeta) = e^{i\alpha(\xi \sin \alpha - \zeta \cos \alpha)} + \frac{i\alpha \cos \alpha + A}{i\alpha \cos \alpha - A} e^{i\alpha(\xi \sin \alpha + \zeta \cos \alpha)},$$

а функції $u_+^N(\xi, \zeta)$, $u_-^N(\xi, \zeta)$ шукаємо у вигляді зображень Фур'є:

$$u_+^N(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_+^N(\lambda) e^{i\lambda\xi - \gamma(\lambda)\zeta} d\lambda, \quad \zeta > 0, \quad (6)$$

$$u_-^N(\xi, \zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_-^N(\lambda) e^{i\lambda\xi + \gamma(\lambda)\zeta} d\lambda, \quad \zeta < 0, \quad (7)$$

які задовольняють рівняння Гельмгольца (3), граничні умови [13], які випливають із (2), а також умови Зоммерфельда, умови Мейкснера та умови спряження в щілинах. Умови випромінювання будуть виконані, якщо $\gamma(\lambda)$ вибрати з умов $\text{Re } \gamma(\lambda) \geq 0$, $\text{Im } \gamma(\lambda) \leq 0$.

Як показано в монографії [5] і в роботах [1, 4, 6–8], крайова задача (1) з урахуванням усіх умов зводиться до двох парних інтегральних рівнянь:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) - C_-^N(\lambda)](\gamma(\lambda) + A) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0, \quad \xi \in \text{CSI}^{(N)} = \mathbb{R} \setminus \text{SI}^{(N)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) - C_-^N(\lambda)] e^{i\lambda\xi} d\lambda = -u_0^N(\xi, +0), \quad \xi \in \text{SI}^{(N)}, \quad (8)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) + C_-^N(\lambda)](\gamma(\lambda) + A) e^{i\lambda\xi} d\lambda = 0, \quad \xi \in \text{CSI}^{(N)},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) + C_-^N(\lambda)] \gamma(\lambda) e^{i\lambda\xi} d\lambda = \frac{\partial u_0^N}{\partial \zeta}(\xi, +0), \quad \xi \in \text{SI}^{(N)}, \quad (9)$$

де $A = i\alpha \frac{Z_0}{Z_c}$ визначає імпеданс матеріалу, $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ – імпеданс вільного простору, μ_0 , ε_0 – магнітна та діелектрична сталі.

2. Граничні інтегральні рівняння з логарифмічною особливістю. Введемо нові невідомі функції

$$\Lambda_+^N(\eta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) - C_-^N(\lambda)](\gamma(\lambda) + A)e^{i\lambda\eta} d\lambda, \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

$$\Lambda_-^N(\eta) = - \int_{-\infty}^{+\infty} [C_+^N(\lambda) + C_-^N(\lambda)](\gamma(\lambda) + A)e^{i\lambda\eta} d\lambda, \quad \eta \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

З парних рівнянь (8), (9) для введених функцій (10), (11) випливають такі властивості:

$$\Lambda_+^N(\xi) = 0, \quad \Lambda_-^N(\xi) = 0, \quad \xi \in \text{CSl}^{(N)}.$$

Тому, використовуючи обернене перетворення Фур'є для функцій $\Lambda_+^N(\eta)$, $\Lambda_-^N(\eta)$, отримаємо такі співвідношення для невідомих коефіцієнтів:

$$C_+^N(\lambda) - C_-^N(\lambda) = - \frac{1}{2\pi(\gamma(\lambda) + A)} \int_{\text{Sl}^N} \Lambda_+^N(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta, \quad (12)$$

$$C_+^N(\lambda) + C_-^N(\lambda) = - \frac{1}{2\pi(\gamma(\lambda) + A)} \int_{\text{Sl}^N} \Lambda_-^N(\eta) e^{-i\lambda\eta} d\eta. \quad (13)$$

Згідно з [5] та [9], парні рівняння (8), (9) зводяться до граничних інтегральних рівнянь 1-го та 2-го роду з логарифмічною особливістю:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{\text{Sl}^N} \ln|\xi - \eta| \Lambda_+^N(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{\text{Sl}^N} \mathcal{K}_{11}^N(\eta, \xi) \Lambda_+^N(\eta) d\eta &= f_1^N(\xi), \quad \xi \in \text{Sl}^N, \\ \Lambda_-^N(\xi) + \frac{A}{\pi} \int_{\text{Sl}^N} \ln|\xi - \eta| \Lambda_-^N(\eta) d\eta + \frac{A}{\pi} \int_{\text{Sl}^N} \mathcal{K}_{11}^N(\eta, \xi) \Lambda_-^N(\eta) d\eta &= \\ &= f_2^N(\xi), \quad \xi \in \text{Sl}^N, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\mathcal{K}_{11}^N(\eta, \xi)$, $f_1^N(\xi)$, $f_2^N(\xi)$ – відомі гладкі функції:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{11}^N(\eta, \xi) &= A \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda(\xi - \eta))}{\gamma(\lambda)(\gamma(\lambda) + A)} d\lambda - \ln|\xi - \eta| - \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(\alpha|\xi - \eta|), \\ &\quad \xi \in \text{Sl}^N, \\ f_1^N(\xi) &= -u_0^N(\xi, +0), \quad f_2^N(\xi) = - \left. \frac{\partial u_0^N(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=+0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Щоб звести рівняння (14) на Sl^N до рівнянь на системі інтервалів $\text{Sl}_q^N = (\alpha_q^N, \beta_q^N)$, $q = 1, \dots, 2^N - 1$, введемо звуження функцій:

$$\begin{aligned} \Lambda_+^N(\eta) \Big|_{\eta \in \text{Sl}_q^N} &= \Lambda_{+,q}^N(\eta), \quad \Lambda_-^N(\eta) \Big|_{\eta \in \text{Sl}_q^N} = \Lambda_{-,q}^N(\eta), \\ \Lambda_-^N(\xi) \Big|_{\xi \in \text{Sl}_p^N} &= \Lambda_{-,p}^N(\xi), \\ f_1^N(\xi) \Big|_{\xi \in \text{Sl}_p^N} &= f_{1,p}^N(\xi), \quad f_2^N(\xi) \Big|_{\xi \in \text{Sl}_p^N} = f_{2,p}^N(\xi). \end{aligned} \quad (16)$$

Умова Мейкснера буде виконана, якщо невідомі функції (10), (11) подати у вигляді

$$\begin{aligned}\Lambda_{+,q}^N(\eta) &= \frac{v_{+,q}^N(\eta)}{\sqrt{(\beta_q^N - \eta)(\eta - \alpha_q^N)}}, & \Lambda_{-,q}^N(\eta) &= \frac{v_{-,q}^N(\eta)}{\sqrt{(\beta_q^N - \eta)(\eta - \alpha_q^N)}}, \\ \Lambda_{-,p}^N(\xi) &= \frac{v_{-,p}^N(\xi)}{\sqrt{(\beta_p^N - \xi)(\xi - \alpha_p^N)}}, & \xi \in \text{Sl}_p^N, & \quad \eta \in \text{Sl}_q^N.\end{aligned}\quad (17)$$

Виберемо стандартний інтервал $(-1, 1)$ та виконаємо заміну змінних:

$$\begin{aligned}g_q^{(N)} : (-1, 1) &\rightarrow (\alpha_q^N, \beta_q^N) : t \rightarrow g_q^{(N)}(t) = \frac{\beta_q^N - \alpha_q^N}{2} t + \frac{\beta_q^N + \alpha_q^N}{2}, \\ \eta &= g_q^{(N)}(t), \quad \xi = g_p^{(N)}(t_0), \quad |t| < 1, \quad |t_0| < 1, \\ \eta &\in \text{Sl}_q^N, \quad \xi \in \text{Sl}_p^N, \quad q = 1, \dots, 2^N - 1.\end{aligned}\quad (18)$$

Враховуючи (16)–(18) і вилучаючи логарифмічну особливість при $p = q$ з рівнянь (14), отримуємо систему граничних інтегральних рівнянь 1-го та 2-го роду з логарифмічною особливістю на стандартному інтервалі $(-1, 1)$ для $p = 1, \dots, 2^N - 1$:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| v_{+,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_{q=1}^{2^N-1} \int_{-1}^1 M_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) v_{+,q}^N(g_q^{(N)}(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ & = f_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)), \\ & \frac{2v_{-,p}^N(g_p^{(N)}(t_0))}{(\beta_p^N - \alpha_p^N)\sqrt{1-t_0^2}} + \frac{A}{\pi} \int_{-1}^1 \ln|t - t_0| v_{-,p}^N(g_p^{(N)}(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \\ & + \frac{A}{\pi} \sum_{q=1}^{2^N-1} \int_{-1}^1 M_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) v_{-,q}^N(g_q^{(N)}(t)) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \\ & = f_{2,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)).\end{aligned}\quad (19)$$

Тут $M_{i,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0))$, $f_{i,p}^N(g_p^{(N)}(t_0))$, $i = 1, 2$, – відомі гладкі функції:

$$\begin{aligned}M_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) &= \\ &= \begin{cases} \mathcal{K}_{11,pp}^N(g_p^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) + \ln \left| \frac{\beta_p^N - \alpha_p^N}{2} \right|, & p = q, \\ \mathcal{K}_{11,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) + \ln |g_q^{(N)}(t) - g_p^{(N)}(t_0)|, & p \neq q, \end{cases} \\ M_{2,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)) &= A M_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0)), \\ f_{1,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)) &= -u_0(g_p^{(N)}(t_0), 0), \\ f_{2,p}^N(g_p^{(N)}(t_0)) &= -\frac{\partial u_0^N(\xi, \zeta)}{\partial \zeta} \Big|_{\substack{\xi=g_p^{(N)}(t_0) \\ \zeta=0}}.\end{aligned}$$

3. Дискретну математичну модель побудуємо за допомогою ефективного чисельного методу дискретних особливостей [3, 5].

Невідомі функції $v_{+,q}^N(g_q^{(N)}(t))$, $v_{-,q}^N(g_q^{(N)}(t))$ і гладкі функції $f_{i,p}^N(g_p^{(N)}(t_0))$, $M_{i,q}^N(g_q^{(N)}(t), g_p^{(N)}(t_0))$, $i=1,2$, інтерполюємо поліномами Лагранжа $(n-1)$ -го степеня по вузлах $t_k^n = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k=1, \dots, n$, які є нулями полінома Чебишева 1-го роду. Для функції $v_{-,p}^N(g_p^{(N)}(t_0))$ використовуємо формулу для її інтерполяційного полінома:

$$v_{-,p}^{N,(n-1)}(g_p^{(N)}(t_0)) = \sum_{k=1}^n v_{-,p}^{N,(n-1)}(g_p^{(N)}(t_k^n)) \ell_{n-1,k}^I(t_0),$$

$$\ell_{n-1,k}^I(t_0) = \frac{1}{n} \left[1 + 2 \sum_{p=1}^{n-1} T_p(t_0) T_p(t_k^n) \right].$$

Таким чином, на основі математичної моделі (19) отримаємо систему для наближеного розв'язування. Далі, застосовуючи квадратурні формули [3] для інтегралів з логарифмічною особливістю та інтегралів від гладких функцій, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно значень $v_{+,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n))$, $v_{-,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n))$ невідомих функцій у вузлових точках. Для точок колокації використовуємо нулі полінома Чебишева 1-го роду $t_j^n = \cos\left(\frac{2j-1}{2n}\pi\right)$, $j=1, \dots, n$.

Таким чином, маємо СЛАР для $p=1, \dots, 2^N-1$, $j=1, \dots, n$:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n v_{+,p}^{N,(n-1)}(g_p^{(N)}(t_k^n)) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r(t_j^n) \frac{T_n(t_k^n)}{r} \right] + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N-1} \sum_{k=1}^n M_{1,q}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) v_{+,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n)) = \\ & = f_{1,p}^{N,(n-1)}(t_j^n), \\ & \frac{2}{\beta_p^N - \alpha_p^N} \frac{\sum_{k=1}^n v_{-,p}^{N,(n-1)}(g_p^{(N)}(t_k^n)) \ell_{n-1,k}^I(t_j^n)}{\sqrt{1-(t_j^n)^2}} - \\ & - \frac{A}{n} \sum_{k=1}^n v_{-,p}^{N,(n-1)}(g_p^{(N)}(t_k^n)) \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r(t_j^n) \frac{T_n(t_k^n)}{r} \right] + \\ & + \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N-1} \sum_{k=1}^n M_{2,q}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) v_{-,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n)) = \\ & = f_{2,p}^{N,(n-1)}(t_j^n). \end{aligned} \quad (20)$$

Для проведення обчислень систему (20) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N-1} \sum_{k=1}^n Q_{1,q}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) v_{+,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n)) &= f_{1,p}^{N,(n-1)}(t_j^n), \\ \frac{1}{n} \sum_{q=1}^{2^N-1} \sum_{k=1}^n Q_{2,q}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) v_{-,q}^{N,(n-1)}(g_q^{(N)}(t_k^n)) &= f_{2,p}^{N,(n-1)}(t_j^n), \end{aligned} \quad (21)$$

де

$$\mathcal{Q}_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) = \begin{cases} M_{1,pp}^N(g_p^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) - \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r(t_j^n) \frac{T_n(t_k^n)}{r} \right], & p = q, \\ M_{1,qp}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)), & p \neq q, \end{cases}$$

$$\mathcal{Q}_{2,qp}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) = \frac{2}{(\beta_p^N - \alpha_p^N)} \frac{\ell_{n-1,k}^I(t_j^n)}{\sqrt{1 - (t_j^n)^2}} - A \left[\ln 2 + 2 \sum_{r=1}^{n-1} T_r(t_j^n) \frac{T_n(t_k^n)}{r} \right] + M_{2,pp}^N(g_p^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)), \quad p = q,$$

$$\mathcal{Q}_{2,qp}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)) = M_{2,qp}^N(g_q^{(N)}(t_k^n), g_p^{(N)}(t_j^n)), \quad p \neq q.$$

Оскільки формула (15) містить логарифмічну особливість при $\eta = \xi$, то згідно з [2] запишемо функцію Ганкеля у вигляді ряду з використанням функції Бесселя 1-го роду $J_0(\cdot)$:

$$H_0^{(1)}(x|\eta - \xi|) = J_0(x|\eta - \xi|) + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{x}{2} + \frac{2i}{\pi} \ln |\eta - \xi| (J_0(x|\eta - \xi|)) + \frac{2i}{\pi} \gamma - \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \psi(m+1) \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{4} |\eta - \xi| \right)^{2m}}{(m!)^2}. \quad (22)$$

Для функцій Бесселя $J_0(\cdot)$ та $\psi(m+1)$ маємо такі розвинення в ряди:

$$J_0(x|\eta - \xi|) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2} |\eta - \xi| \right)^{2m}}{(m!)^2},$$

$$\psi(m+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^m k^{-1}, \quad m \geq 1, \quad \psi(1) = -\gamma,$$

тут γ – стала Ейлера, $\gamma \approx 0.57721566649$.

Скориставшись розвиненням (22), різницю функцій

$$H_0^{(1)}(x|\eta - \xi|) - \frac{2i}{\pi} \ln |\eta - \xi|$$

можемо подати у вигляді залишку ряду, який не містить особливостей, оскільки

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \ln |\eta - \xi| (J_0(\eta - \xi) - 1) = 0.$$

Тоді для визначення $\mathcal{K}_{11,qp}^N(\eta, \xi)$ при $\eta = \xi$ замість формули (15) отримаємо

$$\mathcal{K}_{11,qp}^N(\eta, \xi) = A \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\lambda(\xi - \eta))}{\gamma(\lambda)(\gamma(\lambda) + A)} d\lambda - \frac{i\pi}{2} \left[J_0(x|\xi - \eta|) + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{x}{2} + \frac{2i}{\pi} \left(\gamma - \sum_{m=1}^{\infty} \psi(m+1) \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{4} |\xi - \eta| \right)^{2m}}{(m!)^2} \right) \right], \quad p = q.$$

Розв'язуючи СЛАР (21), обчислюємо значення невідомих функцій у вузлових точках і визначаємо коефіцієнти (12), (13) для знаходження розсіяного та дифрагованого полів (6), (7). Далі, використовуючи асимптотичні подання функції Ганкеля і функцій (6), (7):

$$H_0^{(1)}(\alpha r) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} e^{i(\alpha r - \pi/4)}, \quad r = \sqrt{\xi^2 - \zeta^2},$$

$$u_+^N(r, \varphi) \sim \int_{-\alpha}^{\alpha} C_+^N(\lambda) e^{i r (\lambda \cos \varphi + \sqrt{x^2 - \lambda^2} \sin \varphi)} d\lambda,$$

$$u_-^N(r, \varphi) \sim \int_{-\alpha}^{\alpha} C_-^N(\lambda) e^{i r (\lambda \cos \varphi - \sqrt{x^2 - \lambda^2} \sin \varphi)} d\lambda,$$

отримуємо формули для діаграм напрямленості розсіяного та дифрагованого полів у дальній зоні:

$$D_{\pm}^N(\varphi) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{u_{\pm}^N(r, \varphi)}{\sqrt{\frac{2}{\pi \alpha r}} e^{i(\alpha r - \pi/4)}}. \quad (23)$$

Використовуючи результати монографії [5] і робіт [1, 8], можна оцінити швидкість збіжності наближених розв'язків до точного в метриці введеного гільбертового простору і в рівномірній метриці для фізичних величин.

Чисельний експеримент. На основі побудованої дискретної математичної моделі (21) обчислено діаграми напрямленості розсіяного поля $D_+^N(\varphi)$ за формулою (23), які зображено на рис. 4, рис. 5 у полярних координатах при $\ell = 0.02$ м, $f = 11.2$ ГГц, залежно від порядку N передканторової решітки ($N = 2, 3, 4$) для срібла (Ag) при $\alpha = 20^\circ$ (рис. 4а); від різних значень поверхневого імпедансу металів і надпровідників при $\alpha = 20^\circ$: міді (Cu), алюмінію (Al), магнію (Mg), нікелю (Ni) (рис. 4б); ніобію (Nb), свинцю (Pb), олова (Sn) (рис. 5а); від α – кута падіння плоскої монохроматичної E -поляризованої хвилі для срібла (Ag) – рис. 5б.

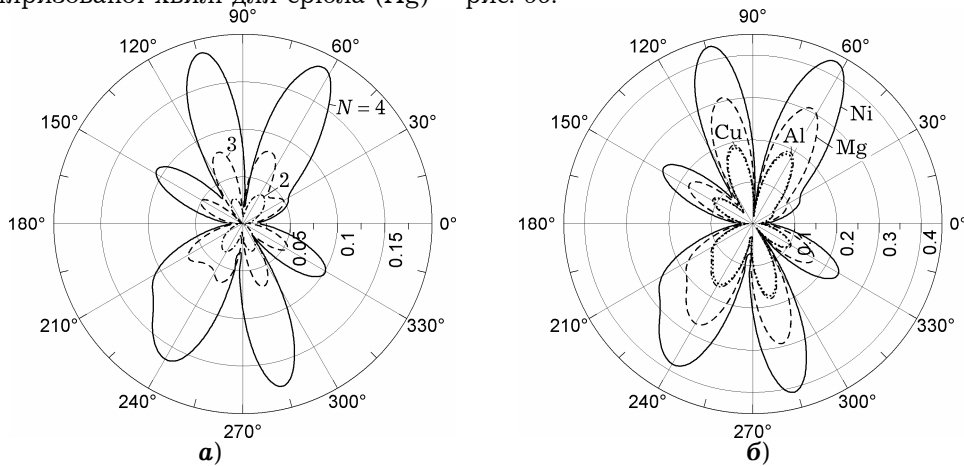


Рис. 4. Залежність $D_+^N(\varphi)$ при $\alpha = 20^\circ$: а) срібла (Ag) від $N = 2, 3, 4$; б) від імпедансу для металів: міді (Cu), алюмінію (Al), магнію (Mg), нікелю (Ni).

Для спостереження явища надпровідності треба охолодити метали до низьких температур. Зразок повинен охолоджуватися постійно, для чого його поміщують в охолоджувальну рідину (гелій, оскільки він при атмосферному тиску залишається рідким аж до абсолютного нуля). У цій статті використовуємо такі надпровідники: ніобій (Nb, -272°C), свинець (Pb, -265°C) та олово (Sn, -269°C) [7].

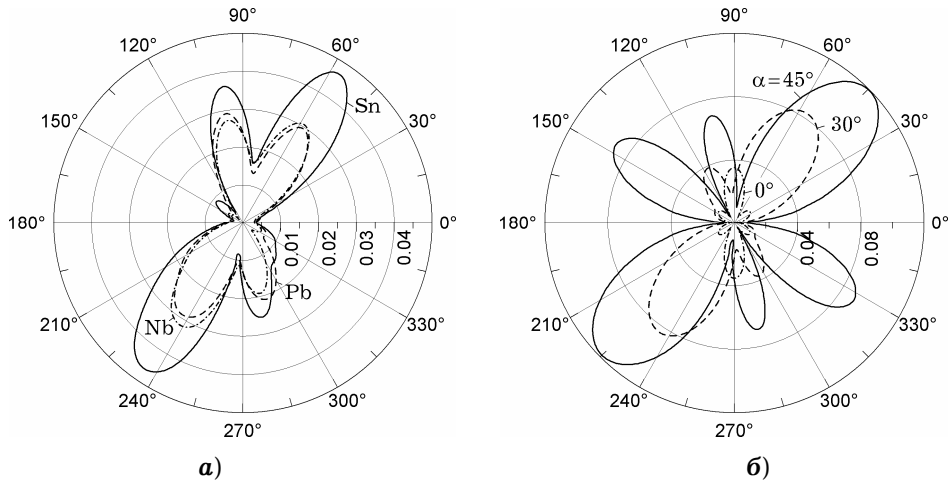


Рис. 5. Залежність $D_+^4(\varphi)$: **а)** від імпедансу надпровідника для ніобію (Nb), свинцю (Pb), олова (Sn); **б)** для срібла (Ag) від кута $\alpha = 0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$.

На рис. 6 побудовано діаграми напрямленості розсіяного поля $D_+^3(\varphi)$ для значень поверхневого імпедансу міді (Cu) при $\ell = 0.02$ м, $\alpha = 20^\circ$ і при різних частотах f (значенням $f = 3, 5, 8, 12, 15, 20, 30$ ГГц відповідають криві 1–7).

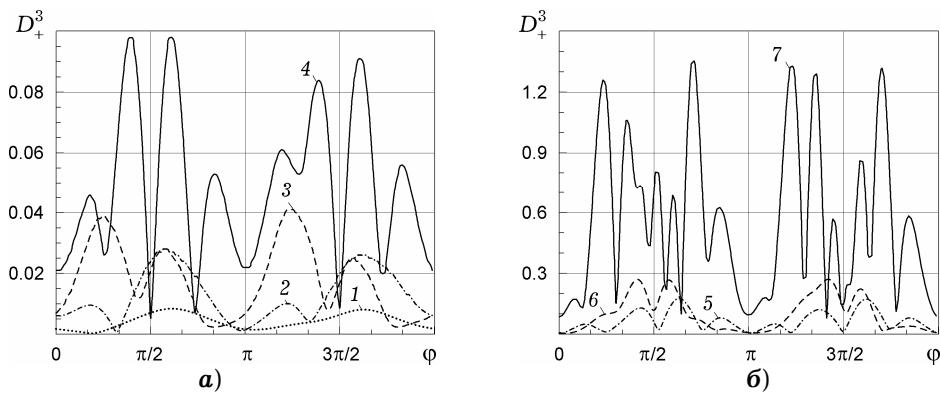


Рис. 6. Залежність $D_+^3(\varphi)$ для імпедансу міді (Cu) при різних частотах: **а)** криві 1–4 ($f = 3, 5, 8, 12$ ГГц); **б)** криві 5–7 ($f = 15, 20, 30$ ГГц).

Висновки. З використанням чисельного методу дискретних особливостей [5] побудовано дискретну математичну модель задачі дифракції монохроматичної E -поляризованої хвилі на щілинах в імпедансній площині. В результаті розв'язання отриманої СЛАР знайдено основні наближені значення електродинамічних характеристик розсіяних полів.

Наведено результати обчислювального експерименту, зокрема діаграми напрямленості розсіяного поля над стрічками залежно від порядку передканторової решітки та різних значень поверхневого імпедансу для надпровідників, різних металів, частот, кута падіння плоскої монохроматичної E -поляризованої хвилі.

Обчислення засвідчили, що залежність діаграми напрямленості розсіяного поля $D_+^N(\varphi)$ від порядку N передканторової решітки має таку властивість: при збільшенні N збільшується довжина амплітуди та кількість пелюсток; залежність від різних імпедансів металів і надпровідників має таку властивість: пелюстки зберігають форму, а змінюється лише довжина амплітуди пелюсток, причому для металів найбільшу амплітуду має нікель,

а найменшу – мідь, для надпровідників найбільшу амплітуду має – олово, а ніобій і свинець мають схожі амплітуди, хоча найменшу амплітуду має свинець; залежність від кута падіння має таку властивість: діаграма напрямленості повертається під відповідним кутом та збільшується довжина амплітуди і кількість пелюсток; залежність від частоти має таку властивість: зі збільшенням частоти зростають величина і кількість максимумів діаграм напрямленості.

1. *Ахиезер Н. И.* Лекции об интегральных преобразованиях: Уч. пособие для вузов. – Харьков: Вища шк.: Изд-во при Харьк. ун-те, 1984. – 122 с.
Te same: *Akhiezer N. I.* Lectures on integral transforms. – Providence (R. I.): AMS, 1988. – 108 p.
2. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1949. – 800 с.
Te same: *Watson G. N.* A treatise on the theory of bessel functions // Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. – 804 p.
3. *Гандель Ю. В.* Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов: Уч. пособие. – Харьков: Изд-во ХНУ, 2002. – 92 с.
4. *Гандель Ю. В.* Параметрические представления сингулярных интегральных преобразований и краевые задачи математической физики // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – Киев: Институт математики НАН Украины, 1995. – С. 65–66.
5. *Гандель Ю. В., Душкин В. Д.* Математические модели двумерных задач дифракции: сингулярные интегральные уравнения и численные методы дискретных особенностей. – Харьков: Акад. ВВ МВД Украины, 2012. – 544 с.
6. *Ильинский А. С., Слепян Г. Я.* Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1983. – 232 с.
7. *Кравченко В. Ф.* Электродинамика сверхпроводящих структур. Теория, алгоритмы и методы вычислений. – Москва: Физматлит, 2006. – 270 с.
8. *Colton D., Kress R.* Integral equation methods in scattering theory. – New York: J. Wiley & Sons, 1983. – xii + 271 p.
9. *Estrada R., Kanwal R. P.* Singular integral equations. – Boston: Birkhäuser, 2000. – x + 427 p.
10. *Lifanov I. K., Poltavskii L. N., Vainikko G. M.* Hypersingular integral equations and their application. – London, New York, Washington: CRC Press, 2004. – 408 p.
11. *Mandelbrot B.* The fractal geometry of nature. – New York: W. H. Freeman & C., 1983. – 468 p.
12. *Nesvit K. V.* Discrete mathematical model of diffraction on pre-Cantor set of slits in impedance plane and numerical experiment // Int. J. Math. Models Methods Appl. Sci. (North Atlant. Univ. Union, USA). – 2013. – 7, No. 11. – P. 897–906.
13. *Wallén H., Lindell I. V., Sihvola A.* Mixed-impedance boundary conditions // IEEE Trans. Anten. Propag. – 2011. – 59, No. 5. – P. 1580–1586.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ E-ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ВОЛНЫ НА ЩЕЛЯХ В ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Статья посвящена задаче дифракции плоской монохроматической E-поляризованной волны на щелях в импедансной плоскости. Построена дискретная математическая модель граничных интегральных уравнений задачи. Проведен численный эксперимент с использованием эффективного численного метода дискретных особенностей.

DISCRETE MATHEMATICAL MODEL OF DIFFRACTION PROBLEM OF E-POLARIZED WAVE ON SLITS IN IMPEDANCE PLANE

This article focuses on diffraction problem of E-polarized wave on the slits in the impedance plane. Discrete mathematical model of boundary integral equations of this problem is constructed. Numerical experiment with the use of efficient numerical discrete singularities method is carried out.

Харків. нац. ун-т імені В. Н. Каразіна, Харків

Одержано
10.02.13