

УСЛОВИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Для задачи прохождения волн в двухслойной жидкости конечной глубины со свободной поверхностью проанализированы корни дисперсионного уравнения для различных значений отношения плотностей. В предельных случаях было показано соответствие полученных корней ранее известным результатам. Показано существование двух линейно независимых решений задачи первого приближения, а также исследована форма свободной поверхности и поверхности контакта.

Введение. Теоретическое и экспериментальное исследование волновых процессов в гидродинамических системах является одной из наиболее актуальных проблем гидромеханики. Отметим некоторые работы (1967–2007 гг.), посвященные проблеме распространения волн в слоистых средах: (Davis, Acrivos, 1967) [23], (Segur, Hammack, 1982) [31], (Yuen, Lake, 1982) [39], (Ablowitz, Segur, 1980) [13], (Whitham, 1980) [38], (Lu, Chwang, 2005) [29], Selezov, Korsunsky, 1992) [32], Selezov, Huq, 1997) [35], Selezov et al. 1997) [34], а также (Selezov et al., 1999) [33]. В работе (Серебряный и др., 2005) [11] исследованы нелинейные внутренние волны и солитоны в шельфовой зоне Японского моря. Выявлены основные закономерности направленности распространения внутренних волн на шельфе и вблизи материкового склона. В статье (Chi-Min Liu, 2005) [21] исследуется передаточная функция и влияние эффектов второго порядка на волновой профиль. Отметим также работы (Holloway et al., 2000) [27] и (Shingareva, Celaya, 2007) [36].

Короткий обзор достижений в исследовании волновых движений в жидкостях (за 1999–2008 гг.) представлен в 2009 г. в работе (Селезов и др., 2009) [9], где детально описаны результаты, полученные в (Vincze et al., 2007) [37], (Макаренко, Мальцева, 2008) [5], (Debsarma, Das, 2007) [24], (Carr, Davies, 2006) [20], (Наси́ев, 2006) [26], (Buick, Martin, 2003) [16], (Choi, Camassa, 1999) [22], (Camassa et al., 2006) [17].

Информация о новых результатах по рассматриваемой проблеме приводится ниже.

В работе (Camassa, Viotti, 2012) [19] исследуется новая модель уединенных внутренних волн, описываемых уравнением Эйлера для непрерывно стратифицированной несжимаемой жидкости в приближении Буссинеска. Полученные решения распространяются на двухслойные системы непрерывной стратификации, а также охватывают нетривиальные особенности внутренней структуры пикноклина.

В работе (Kakinuma et al., 2012) [28] рассмотрено взаимодействие как поверхностных, так и внутренних волн с упругой пластиной на поверхности контакта или свободной поверхности. Смоделированы внутренние и поверхностные волны в зависимости от точечной нагрузки.

Экспериментальное исследование профилей двумерных гравитационных стоячих волн проведено в работах (Килиниченко, Секерж-Зенькович, 2007–2008) [3, 4]. Установлено, что для таких волн имеет место система вторичных циркуляционных течений, охватывающих всю толщу жидкости.

В работе (Григорьев и др., 2010) [2] исследованы закономерности реализации гравитационного нелинейного волнового движения в двухслойной стратифицированной жидкости, для конечной глубины верхнего, более легкого слоя. Рассмотрены особенности реализации нелинейного внутреннего резонансного взаимодействия гравитационных волн, порожденных свободной поверхностью и поверхностью контакта жидких сред. Показано, что в расчетах второго порядка малости реализуются как вырожденные, так и вторичные комбинационные резонансные взаимодействия.

В (Camassa et al., 2010) [18] исследовали нелинейные волны в двухслойной жидкости со свободной поверхностью. В (Debsama et al., 2010) [25] рассматривались полностью нелинейные длинные волны в двухслойной жидкости.

В данной статье методом многомасштабных разложений исследуется не только распространение отдельных внутренних или поверхностных волн, но и их взаимодействие. Указанным методом распространение и устойчивость волновых пакетов на границе раздела полубесконечных жидкостей впервые исследовал Найфе (Nayfeh, 1976) [30]. Задачи, в которых учитывается поверхностное натяжение, что существенно влияет на распространение капиллярно-гравитационных волн, где имеет место вклад высоких гармоник в волновой процесс в целом, рассмотрены в публикациях (Авраменко, 2001) [1], (Селезов, Авраменко, 2000) [10], (Селезов и др., 2005–2006) [7, 8]. В этих работах методом многомасштабных разложений исследованы двухслойные системы вида «полупространство – полупространство», «слой – полупространство» и система «слой – слой», а также представлено обоснование методологических нюансов метода многомасштабных разложений.

Распространение и взаимодействие внутренних и поверхностных волн методом многомасштабных разложений в системе «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью» исследовалось в следующих работах. В работе (Селезов и др., 2009) [9] изучалось нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных волн. Проведен детальный анализ первого линейного приближения. В (Selezov, Avramenko, Naradovuu, 2010–2011) [10, 14] исследовались решения второго приближения, а также вопросы устойчивости и формы поверхностных и внутренних волн. В (Avramenko, Naradovuu, 2012) [15] рассматривалось взаимодействие поверхностных и внутренних волн во втором приближении.

1. Постановка задачи и метод решения. Исследуется задача о распространении внутренних и поверхностных волн конечной амплитуды на поверхности жидкого слоя $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$ с плотностью ρ_1 и верхнего жидкого слоя $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$ с плотностью ρ_2 . Слои разделены поверхностью контакта $z = \eta(x, t)$, а верхний слой ограничен сверху свободной поверхностью $z = \eta_0(x, t)$.

При решении учитываем силы поверхностного натяжения на поверхности контакта и на свободной поверхности. Сила тяжести направлена перпендикулярно поверхности раздела в отрицательном z -направлении, жидкости считаются несжимаемыми (рис. 1).

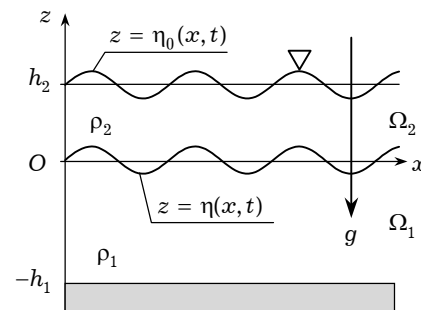


Рис. 1

Введем безразмерные величины с помощью характерной длины L , максимального отклонения свободной поверхности a , плотности нижнего слоя ρ_1 , характерного времени $(L/g)^{1/2}$, где g – ускорение свободного падения. Безразмерные коэффициенты поверхностного натяжения на свободной поверхности и на поверхности контакта имеют вид $(T^*, T_0^*) = (T, T_0)/(L^2 \rho g)$, где $\rho = \rho_2/\rho_1$.

Математическая постановка задачи имеет вид (звездочки опущены) [9]:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_j &= 0 && \text{в} && \Omega_j, \\ \eta_{,t} - \varphi_{j,z} &= -\alpha \varphi_{j,x} \eta_{,x} && \text{на} && z = \alpha \eta(x, t), \quad j = 1, 2, \\ \eta_{0,t} - \varphi_{2,z} &= -\alpha \varphi_{2,x} \eta_{0,x} && \text{на} && z = \alpha \eta_0(x, t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \varphi_{1,t} - \rho\varphi_{2,t} + (1 - \rho)\eta + 0.5\alpha[(\nabla\varphi_1)^2 - \rho(\nabla\varphi_2)^2] - \\
& \quad - T(1 + \alpha^2\eta_{,x}^2)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0 \quad \text{на} \quad z = \alpha\eta(x, t), \\
& \varphi_{2,t} + \eta_0 + 0.5\alpha(\nabla\varphi_2)^2 - T_0(1 + \alpha^2\eta_{0,x}^2)^{-3/2}\eta_{0,xx} = 0 \quad \text{на} \quad z = \alpha\eta_0(x, t), \\
& \varphi_{1,z} = 0, \quad z = -h_1. \tag{1}
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha = a/L$ – коэффициент нелинейности; $\eta(x, t)$ – отклонение поверхности контакта; $\eta_0(x, t)$ – отклонение свободной поверхности. Считаем, что коэффициент нелинейности значительно меньше единицы, поэтому данная модель описывает слабонелинейную двухслойную систему с дисперсией.

Для определения приближенного решения задачи (1) для малых, но конечных амплитуд, применим метод многомасштабных разложений до третьего порядка:

$$\begin{aligned}
\eta(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\
\eta_0(x, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{0n}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \\
\varphi_j(x, z, t) &= \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, \tag{2}
\end{aligned}$$

где $x_n = \alpha^n x$, $t_n = \alpha^n t$ – масштабные переменные.

Подстановка разложений (2) в задачу (1) приводит к трем линейным задачам относительно неизвестных функций η_1 , η_{01} , φ_{11} , φ_{21} , η_2 , η_{02} , φ_{21} , φ_{22} , η_3 , η_{03} , φ_{31} , φ_{32} , которые являются слагаемыми в многомасштабных разложениях потенциалов, отклонения поверхности контакта и свободной поверхности [1].

2. Корни дисперсионного уравнения. Постановка задачи в первом линейном приближении имеет вид

$$\begin{aligned}
& \varphi_{j1,x_0x_0} + \varphi_{j1,zz} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \\
& \eta_{1,t_0} - \varphi_{j1,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \\
& \eta_{01,t_0} - \varphi_{21,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = h_2, \\
& \varphi_{11,t_0} - \rho\varphi_{21,t_0} + (1 - \rho)\eta_1 - T\eta_{1,x_0x_0} = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \\
& \varphi_{21,t_0} + \eta_{01} - T_0\eta_{01,x_0x_0} = 0 \quad \text{на} \quad z = h_2, \\
& \varphi_{11,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = -h_1. \tag{3}
\end{aligned}$$

В работе [1] при исследовании первого линейного приближения было получено дисперсионное соотношение между частотой волны ω и волновым числом k в виде

$$\omega^2 \operatorname{cth}(kh_1) + \rho\omega^2 \left(\frac{\omega^2 - (k + T_0k^3) \operatorname{cth}(kh_2)}{\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0k^3)} \right) = (1 - \rho)k + Tk^3,$$

которое при условии $\omega^2 \operatorname{cth}(kh_2) - (k + T_0k^3) \neq 0$ можно свести к биквадратному уравнению

$$\begin{aligned}
& \omega^4(\rho + \operatorname{cth}(kh_1) \operatorname{cth}(kh_2)) - \omega^2[(\operatorname{cth}(kh_1) + \rho \operatorname{cth}(kh_2))(k + T_0k^3) + \\
& \quad + \operatorname{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)] + \\
& \quad + (k + T_0k^3)(k - \rho k + Tk^3) = 0. \tag{4}
\end{aligned}$$

Уравнение (4) имеет две независимые пары корней, которые являются частотами волн:

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^2 = & \frac{1}{2(\rho + \text{cth}(kh_1) \text{cth}(kh_2))} [(\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2))(k + T_0 k^3) + \\ & + \text{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3) \mp \\ & \mp \{[(\text{cth}(kh_1) + \rho \text{cth}(kh_2))(k + T_0 k^3) + \\ & + \text{cth}(kh_2)(k - \rho k + Tk^3)]^2 - \\ & - 4(\rho + \text{cth}(kh_1) \text{cth}(kh_2))(k + T_0 k^3)(k - \rho k + Tk^3)\}^{1/2}]. \quad (5) \end{aligned}$$

Согласно (5) для линейной задачи (3) существуют две пары линейно независимых решений

– для ω_1 :

$$\begin{aligned} \eta_1^{(1)} &= A \sin(kx - \omega_1 t), \\ \eta_{01}^{(1)} &= \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2)} A \sin(kx - \omega_1 t), \\ \varphi_{11}^{(1)} &= -\frac{A}{\omega_1 \text{ch}(kh_1)} \text{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_1 t), \\ \varphi_{21}^{(1)} &= -\frac{A \omega_1 \text{th}(kh_1)(\omega_1^2 \text{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \text{ch}(k(h_2 - z)))}{(\omega_1^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2))^2} \times \\ & \times \cos(kx - \omega_1 t); \quad (6) \end{aligned}$$

– для ω_2 :

$$\begin{aligned} \eta_1^{(2)} &= \frac{\omega_2^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2)}{\omega_2^2} B \sin(kx - \omega_2 t), \\ \eta_{01}^{(2)} &= B \sin(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{11}^{(2)} &= -\frac{\omega_2^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2)}{\omega_2^3 \text{ch}(kh_1)} B \text{ch}(k(h_1 + z)) \cos(kx - \omega_2 t), \\ \varphi_{21}^{(2)} &= -\frac{B \text{th}(kh_1)(\omega_2^2 \text{sh}(k(h_2 - z)) - (k + T_0 k^3) \text{ch}(k(h_2 - z)))}{\omega_2(\omega_2^2 \text{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \text{sh}(kh_2))} \times \\ & \times \cos(kx - \omega_2 t). \quad (7) \end{aligned}$$

Ниже проведен анализ корней дисперсионного уравнения для двух предельных случаев однородной жидкости, а также для случая неоднородной жидкости.

3. Анализ условий прохождения волн.

3.1. Предельные случаи. Проведем анализ корней (5) дисперсионного уравнения (4). Сравним полученные решения с известным решением дисперсионного уравнения, полученным при исследовании задачи о распространении волн в системе «слой со свободной поверхностью»

$$\omega_0 = \sqrt{k \text{th}(hk)}, \quad (8)$$

где h – глубина слоя.

Рассмотрим два предельных случая для исследуемой системы «слой с твердым дном – слой со свободной поверхностью». Первый предельный случай возникает при равенстве плотностей обоих слоев, то есть описывается равенством $\rho_1 = \rho_2$. В этом случае отношение плотностей $\rho = \rho_2/\rho_1 = 1$, таким образом, получается один слой жидкости толщиной $h_1 + h_2$, ограниченный твердым дном и свободной поверхностью.

Рассмотрим зависимость от толщины нижнего слоя h_1 корней ω_1 , ω_2 , определяемых формулами (5), дисперсионного уравнения (4), а также корня ω_0 дисперсионного уравнения в системе «слой со свободной поверхностью» (рис. 2). Параметры принимают следующие значения: $T = T_0 = 0$, $h_2 = 1$. Заметим, что для подтверждения справедливости предельного перехода все графики приведены на промежутке $h_1 > -1$, что абсолютно справедливо для слоя жидкости толщиной $h_1 + h_2$ при $h_2 = 1$. На рис. 2а построен график зависимости ω_0 от параметра h_1 . На рис. 2б приведены графики зависимости корней ω_1 и ω_2 дисперсионного уравнения от толщины нижнего слоя. Из рис. 2 видно, что частота ω_1 совпадает с ω_0 на отрезке $h_1 \in [-1, 0]$, а затем становится равной нулю, при этом ω_2 совпадает с ω_0 для всех $h_1 > 0$. При увеличении толщины нижнего слоя частоты ω_2 и ω_0 устремляются к предельному значению, равному \sqrt{k} .

Отметим, что график зависимости ω_1 от h_1 и график зависимости ω_2 от h_1 стыкуются в точке, которая соответствует значению $h_1 = 0$. Этому значению h_1 соответствует на рис. 2б точка с координатами $(0, \sqrt{k \operatorname{th}(kh_2)})$.

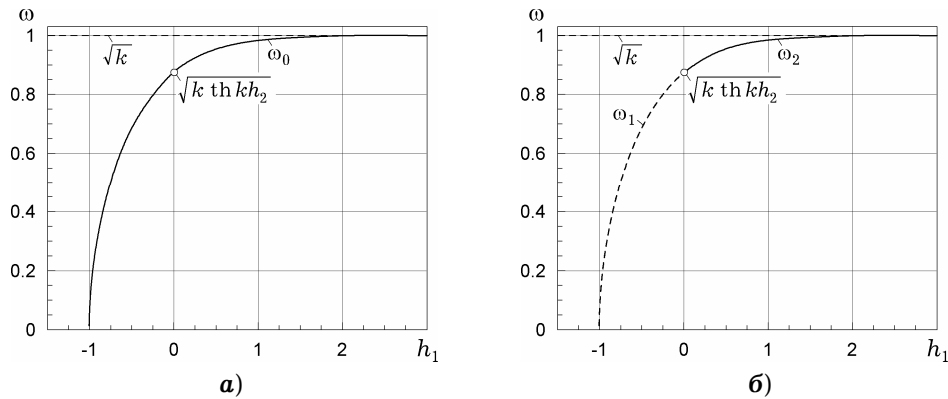


Рис. 2

Второй предельный случай описывается равенством $\rho_2 = 0$. На рис. 3а построен график зависимости ω_0 от толщины слоя $h = h_1$. На рис. 3б построены графики зависимости корней дисперсионного уравнения ω_1 и ω_2 от толщины нижнего слоя.

Из рис. 3а видно, что значение частоты ω_1 совпадает с ω_0 на отрезке $h_1 \in [0, 1]$, а потом становится равным нулю, а ω_2 совпадает с ω_0 для всех $h_1 > 1$. Особенность возникает при значении $h_1 = 1$, т.е. при равенстве толщин верхнего и нижнего слоев. На рис. 3б этому случаю соответствует точка с координатами $(1, \sqrt{k \operatorname{th}(kh_2)})$. Как и в предыдущем случае, при увеличении толщины нижнего слоя величины частот ω_2 и ω_0 устремляются к предельному значению, равному \sqrt{k} .

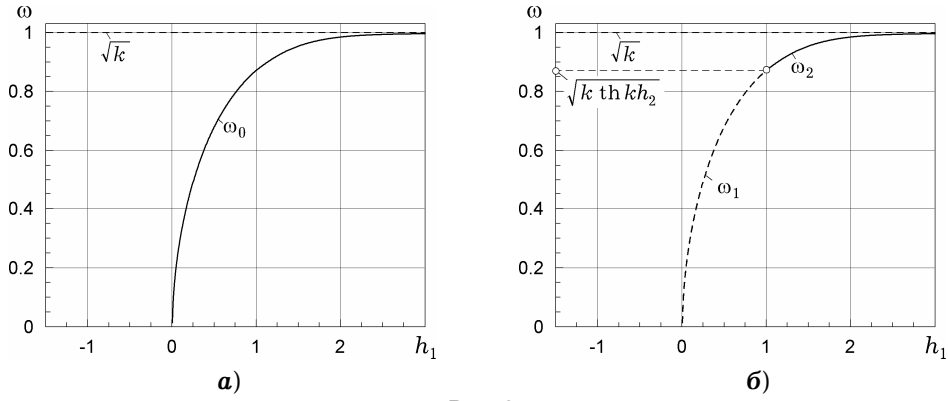


Рис. 3

3.2. Случай неоднородной жидкости слоистой системы. Рассмотрим корни дисперсионного уравнения при $\rho_1 \neq \rho_2$ и $\rho > 0$. Для сравнения с результатами, полученными в предыдущем пункте, рассмотрим два случая: 1) значение отношения плотностей ρ близко к нулю и 2) значения ρ близко к единице. На рис. 4 показаны графики зависимостей частот ω_1 и ω_2 от толщины нижнего слоя.

Как видно, даже небольшое изменение величины соотношения плотностей (порядка 0.01) значительно влияет на частоты волн (рис. 4). В отличие от предельных случаев, здесь ω_1 определена для всех $h_1 > 0$. При этом при $\rho = 0.99$, когда $h_1 = 0$, ω_1 переходит в ω_2 в точке $(0, \sqrt{k \operatorname{th}(kh_2)})$, как и в случае $\rho_1 = \rho_2$ (рис. 4а), но, в отличие от предельного случая $\omega_1 \neq 0$, при $h_1 > 0$.

При $\rho = 0.01$ наблюдается аналогичная картина (рис. 4б), но в этом случае ω_1 устремляется к предельному значению $\sqrt{k \operatorname{th}(kh_2)}$, а ω_2 устремляется к предельному значению \sqrt{k} при $h_1 \rightarrow +\infty$.

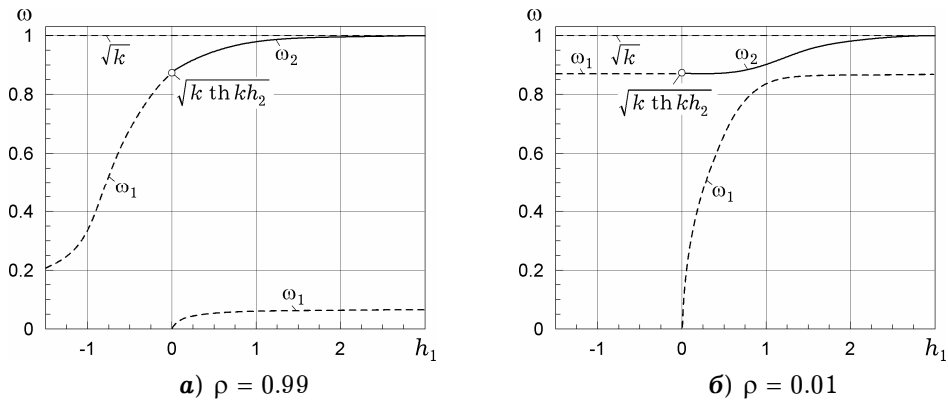


Рис. 4

При $\rho_1 \neq \rho_2$ можно рассматривать внутренние и поверхностные волны, которые задаются следующим образом:

$$\eta_1 = A \sin(kx - \omega_1 t) + \frac{\omega_2^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)}{\omega_2^2} B \sin(kx - \omega_2 t),$$

$$\eta_{01} = \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 \operatorname{ch}(kh_2) - (k + T_0 k^3) \operatorname{sh}(kh_2)} A \sin(kx - \omega_1 t) + B \sin(kx - \omega_2 t).$$

Заметим, что аналогичные выражения для внутренних и поверхностных волн были получены из других соображений в работе [1].

На рис. 5 приведен вид отклонений свободной поверхности η_1 и поверхности контакта η_{01} , а также их составляющие $\eta_{01}^{(1)}$, $\eta_{01}^{(2)}$, $\eta_1^{(1)}$, $\eta_1^{(2)}$, соответствующие различным парам частот, для отношения плотностей $\rho = 0.99$ в момент времени $t = 0$, когда η_1 достигает максимума, а η_{01} – минимума. Пунктирными линиями на рис. 5 отмечены уровни $A = 0.1$, $h_2 = 1$, $B + h_2 = 1.05$.

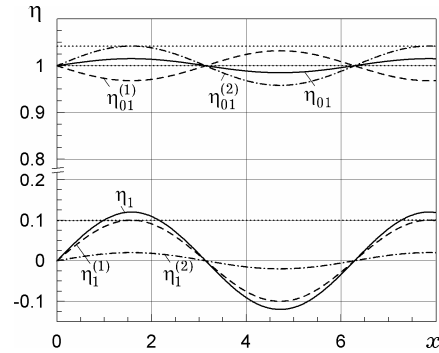


Рис. 5

На рис. 6 показаны отклонения η_1 и η_{01} и их составляющих в момент времени $t = 6$. Здесь наблюдается противоположная картина: η_1 – достигает максимума, а η_{01} – минимума.

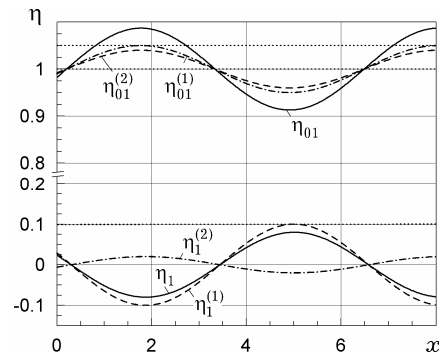


Рис. 6

Пульсация η_1 и η_{01} объясняется наложением максимумов и минимумов решений, которые отвечают разным парам корней дисперсионного уравнения. Это происходит вследствие того, что волна $\eta_1^{(1)}$ с частотой ω_1 (а значит, и ее отклик на свободной поверхности $\eta_{01}^{(1)}$) движется медленнее, чем волна $\eta_{01}^{(2)}$ с частотой ω_2 (а значит и ее отклик на поверхности контакта $\eta_1^{(2)}$), т.е. скорости движения $\eta_1^{(2)}$ и $\eta_{01}^{(2)}$ выше скоростей движения $\eta_1^{(1)}$ и $\eta_{01}^{(1)}$, соответственно.

Выводы. В рамках исследования условий прохождения волн в двухслойной жидкости проанализировано дисперсионное соотношение. Установлено наличие двух линейно независимых решений первого линейного приближения, по одному для каждой пары решений дисперсионного уравнения. При анализе корней дисперсионного уравнения выявлено, что в предельных случаях для однородной жидкости решения соответствуют ранее из-

вестным результатам для системы «слой с твердым дном и свободной поверхностью». При увеличении толщины нижнего слоя одна из пар решений становится равной нулю, а другая устремляется к предельному значению, которое зависит от волнового числа. В случае неоднородной жидкости обе пары корней ненулевые, хотя предельное значение для второй пары сохраняется прежним. Исследована форма свободной поверхности и поверхности контакта, отмечено наличие пульсации волновых поверхностей, обусловленных различными скоростями распространения внутренней и поверхностной гармоник, а также их откликов.

1. Авраменко О. В. Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісн. Харків. нац. ун-ту. Сер. Математика, прикл. математика і механіка. – 2001. – Вип. 50. – С. 122–128.
2. Григорьев А. И., Федоров М. С., Ширяева С. О. Волновое движение в поле силы тяжести на свободной поверхности и на границе стратификации слоисто-неоднородной жидкости. Нелинейный анализ // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2010. – № 5. – С. 130–140.
3. Килиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование волн Фарадея максимальной высоты // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2007. – № 6. – С. 103–110.
4. Килиниченко В. А., Секерж-Зенькович С. Я. Экспериментальное исследование вторичных стационарных течений в поверхностных волнах Фарадея // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2008. – № 1. – С. 141–148.
5. Макаренко Н. Н., Мальцева Ж. Л. Асимптотические модели внутренних стационарных волн // Прикл. механика и техн. физика. – 2008. – 49, № 4. – С. 151–161.
6. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околорезонансных волновых числах // Динам. системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 58–67.
7. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В. Нелинейная устойчивость распространения волновых пакетов в двухслойной жидкости // Прикл. гідромеханіка. – 2006. – 8 (80), № 4. – С. 60–65.
8. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В. Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикл. гідромеханіка. – 2005. – 7(79), № 1. – С. 80–89.
9. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Гуртовий Ю. В., Наратовий В. В. Нелинейное взаимодействие внутренних и поверхностных гравитационных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – 52, № 1. – С. 72–83.
То же: Selezov I. T., Avramenko O. V., Gurtoviy Yu. V., Naradoviy V. V. Nonlinear interaction of internal and surface gravity waves in a two-layer fluid with free surface // J. Math. Sci. – 2010. – 168, No. 4. – P. 590–602.
10. Селезов И. Т., Авраменко О. В., Наратовий В. В. Особенности распространения слабонелинейных волн в двухслойной жидкости со свободной поверхностью // Динам. системы. – 2011. – 1(29), № 1. – С. 53–68.
11. Серебряный А. Н., Фурдуев А. В., Ардов А. А., Охрименко Н. Н. Шум внутренней волны большой амплитуды в океане // Докл. РАН. – 2005. – 402, № 4. – С. 543–547.
12. Тарапов И. Е. Механика сплошной среды: В 3 ч. – Ч. 3: Механика невязкой жидкости. – Харьков: Золотые страницы, 2005. – 332 с.
13. Ablowitz M. J., Segur H. Long internal waves in fluids of great depth // Stud. Appl. Math. – 1980. – 62. – P. 249–262.
14. Avramenko O. V., Naradoviy V. V., Selezov I. T. Multiscale modeling of the wave interaction in two-layer fluid with free surface // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2010. – 7, № 2. – С. 2–9.
15. Avramenko O., Naradoviy V. Stability of wave-packets in the two-layer fluid with free surface and rigid bottom // Contemporary problems of mathematics, mechanics and computing sciences. – Kharkiv, 2011. – Vol. 1. – P. 5–12.
16. Buick J. M., Martin A. J. Comparison of a lattice Boltzmann simulation of steep internal waves and laboratory measurements using particle image velocimetry // Eur. J. Mech. B-Fluids. – 2003. – 22, No. 1. – P. 27–38.
17. Camassa R., Choi W., Michallet H., Rusàs P.-O., Sveen J. On the realm of validity of strongly nonlinear asymptotic approximations for internal waves // J. Fluid. Mech. – 2006. – 549. – P. 1–23.

18. *Camassa R., Rusås P.-O., Saxena A., Tiron R.* Fully nonlinear periodic internal waves in a two-fluid system of finite depth // *J. Fluid Mech.* – 2010. – **652**. – P. 259–298.
19. *Camassa R., Viotti C.* A model for large-amplitude internal waves with finite-thickness pycnocline // *Acta Appl. Math.* – 2012. – No. 1. – P. 75–84.
20. *Carr M., Davies P. A.* The motion of an internal solitary wave of depression over a fixed bottom boundary in a shallow, two-layer fluid // *Phys. Fluids.* – 2006. – **18**. – P. 016601-1–016601-10.
21. *Chi-Min Liu.* Second-order random internal and surface waves in a two-fluid system // *Geophys. Res. Lett.* – 2006. – **33**, No. 6. – DOI: 10.1029/2005GL025477.
22. *Choi W., Camassa R.* Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* – 1999. – **396**. – P. 1–36.
23. *Davis R. E., Acrivos A.* Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.* – 1967. – **29**. – P. 593–607.
24. *Debsarma S., Das K. P.* Fourth-order nonlinear evolution equations for a capillary-gravity wave packet in the presence of another wave packet in deep water // *Phys. Fluids.* – 2007. – **19**. – P. 097101-1–097101-16.
25. *Debsarma S., Das K. P., Kirby J. T.* Fully nonlinear higher-order model equations for long internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* – 2010. – **654**. – P. 281 – 303.
26. *Haciyev B. I.* Unstationary waves in two-layered fluid caused by normal loading at the interface // *Proc. IMM (Inst. of Mathematics and Mechanics) NAS of Azerbaijan.* – 2006. – P. 119–126.
27. *Holloway P., Pelinovsky E., Talipova T.* Internal tide transformation and oceanic internal solitary waves // *Environmental Stratified Flows* / Ed. R. Grimshaw. – Boston: Kluwer Acad. Publ., 2000. – 284 p. – Chapt. 2: P. 29–60.
28. *Kakinuma T., Yamashita K., Nakayama K.* Surface and internal waves due to a moving load on a very large floating structure // *J. Appl. Math.* – 2012. – 14 p.
29. *Lu D. Q., Chwang A. T.* Interfacial waves due to a singularity in a system of two semi-infinite fluids // *Phys. Fluids.* – 2005. – **17**. – P. 102107-1–102107-9.
30. *Nayfeh A.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // *Trans. ASME. J. Appl. Mech. Ser. E.* – 1976. – **43**, No. 4. – P. 584–588.
31. *Segur H., Hammack J. L.* Soliton models of long internal waves // *J. Fluid Mech.* – 1982. – **118**. – P. 285–304.
32. *Selezov I. T., Korsunsky S. V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal-electrolyte // *Int. Conf. MHD Processes to Protection of Environment (Kiev – Odessa, Ukraine, 24–29 June 1992).* – Part 1. – P. 111–117.
33. *Selezov I. T., Mironchuk M. V., Huq P.* Evolution equation for waves forced by a slender obstacle in a two-layer fluid // *Доп. НАН України.* – 1999. – № 4. – С. 77–82.
34. *Selezov I., Avramenko O., Nayfeh A., Huq P., Zeegers N.* Propagation of water wave-packets at the interface of layer and half-space fluid // *Proc. 2nd Int. Conf. «Asymptotics in Mechanics» (St-Petersburg, Russia, 13–16 October 1996)* / Ed. by A. Nayfeh and K. Rozhdestvensky. – St-Petersburg: St-Petersburg State Marine Techn. Univ., 1997. – P. 245–252.
35. *Selezov I., Huq P.* Asymptotic-heuristic analysis of nonlinear water wave propagation in two- and three-layer fluids // *Proc. 2nd Int. Conf. «Asymptotics in Mechanics» (St-Petersburg, Russia, 13–16 October 1996)* / Ed. by A. Nayfeh and K. Rozhdestvensky. – St-Petersburg: St-Petersburg State Marine Techn. Univ., 1997. – P. 237–244.
36. *Shingareva I., Celaya C. L.* On frequency-amplitude dependences for surface and internal standing waves // *J. Comput. Appl. Math.* – 2007. – **200**, No. 2. – P. 459–470.
37. *Vincze M., Kozma P., Gyure B., Janosi I. M., Szabo K. G., Tel T.* Amplified internal pulsations on a stratified exchange flow excited by interaction between a thin sill and external seiche // *Phys. Fluids.* – 2007. – **19**. – P. 108108-1–108108-4.
38. *Whitham G. B.* Linear and nonlinear waves. – New York: J. Wiley & Sons Inc., 1980. – 636 p.
То же: *Уизем Дж. Б.* Линейные и нелинейные волны. – Москва: Мир, 1977. – 622 с.
39. *Yuen H. C., Lake B. M.* Nonlinear dynamics of deep-water waves // *Adv. Appl. Mech.* – 1982. – **22**. – P. 33–45.

УМОВИ ПРОХОДЖЕННЯ ХВИЛЬ У ДВОШАРОВІЙ РІДИНІ З ВІЛЬНОЮ ПОВЕРХНЕЮ

Для задачі проходження хвиль у двошаровій рідині скінченної глибини з вільною поверхню проаналізовані корені дисперсійного рівняння при різних значень відношення густин. В граничних випадках було показано відповідність отриманих коренів раніше відомим результатам. Показано існування двох лінійно незалежних розв'язків першого лінійного наближення, а також досліджена форма вільної поверхні та поверхні контакту.

CONDITIONS OF WAVE PROPAGATION IN TWO-LAYER FLUID WITH FREE SURFACE

The roots of the dispersion equation are analyzed for the problem of wave propagation in two-layer fluid of finite depth with a free surface. It is shown in the limiting cases that the obtained roots are matched the previously known results. The existence of two linearly independent solutions of the first linear approximation is shown, and the form of the free surface and the contact surface is investigated.

¹ Гос. пед. ун-т, Кировоград,

² Ін-т гидромеханики НАН України, Киев

Получено

11.02.13