

ПРО ЕФЕКТИВНИЙ ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ ДИНАМІЧНИХ НАПРУЖЕНЬ У ШАРУВАТИХ КІЛЬЦЕВИХ ПЛАСТИНКАХ НА ОСНОВІ ФОРМУЛИ ПРУДНІКОВА ДЛЯ ОБЕРНЕННЯ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Запропоновано алгоритм розв'язування осесиметричної динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідного кільця, навантаженого змінними в часі нормальними зусиллями. Розрахунок напружень у пластинках із довільною кількістю шарів проведено на основі обчислення зображення Лапласа за допомогою модифікованої формули Пруднікова для його обернення. Встановлено характерні особливості у розподілі динамічних напружень в однорідних і кусково-однорідних пластинках.

Для визначення і дослідження напруженого стану багат шарових пружних конструкцій найпоширенішими методами є інтегральні перетворення Лапласа, Фур'є, скінченні перетворення Ганкеля за радіальною змінною, числові методи граничних і скінченних елементів, а також метод, у якому застосовуються скінченні різниці тільки за часом [4–9]. Застосування інтегральних перетворень супроводжується складністю, яка полягає у проблемі обернення, тобто поверненні до оригіналу.

У пропонованій роботі розрахунок напружень у пластинках з довільною кількістю шарів проведено з використанням алгоритму, що ґрунтується на перетворенні Лапласа та обчисленні зображення за допомогою формули Пруднікова для його обернення [2]. Запропоновано також способи підвищення ефективності формули обернення для розв'язування динамічних задач стосовно до ударних навантажень шляхом покращення збіжності рядів.

Постановка задачі та основні рівняння. Приймемо, що пластинка складається з N шарів $r_{j-1} < r < r_j$, $j = 1, \dots, N$, r_0 і r_N – радіуси внутрішньої і зовнішньої меж пластинки, r – радіальна координата. Позначимо через ν_j , E_j коефіцієнт Пуассона та модуль Юнга для j -го шару, $c_{1,j}$ – швидкість поширення поздовжніх хвиль. Розглянемо детальніше випадок, коли до межі пластинки при $r = r_0$ і $r = r_N$ прикладено нормальні, незалежні від кутової координати, зусилля p_a і p_b , а в початковий момент часу задано переміщення та швидкості пластинки.

Рівняння теорії пружності для j -го шару мають вигляд [7]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{u_j}{r^2} - \frac{1}{c_{1,j}^2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} = 0, \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad (1)$$

де u_j – радіальні переміщення.

Напруження за плоского напруженого стану визначаються за формулами

$$\sigma_r = A_j \frac{du_j}{dr} + B_j \frac{u_j}{r}, \quad \sigma_\theta = B_j \frac{du_j}{dr} + A_j \frac{u_j}{r}, \quad (2)$$

де $A_j = \frac{2G_j}{1-\nu_j}$, $B_j = \nu_j A_j$.

Співвідношення (2) справджуються і для випадку плоскої деформації, якщо у них замінити ν_j на $\frac{\nu_j}{1-\nu_j}$, тобто тоді $A_j = \frac{2G_j(1-\nu_j)}{1-2\nu_j}$, $B_j = \frac{\nu_j}{1-\nu_j} A_j$.

Введемо нові змінні $\rho = \frac{r}{r_*}$, $\tau = \frac{c_* t}{r_*}$, $U_j = \frac{2G_* u_j}{r_*}$, де r_* , c_* , G_* – характерні (вибрані для одного із шарів) розмір, швидкість поширення хвиль і модуль зсуву.

Запишемо рівняння (1) у безрозмірному вигляді

$$\frac{\partial^2 U_j}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U_j}{\partial \rho} + \frac{U_j}{\rho^2} - \mu_j^2 \frac{\partial^2 U_j}{\partial \tau^2} = 0, \quad \rho_{j-1} < \rho < \rho_j, \quad (3)$$

де $\mu_j = c_*/c_{1,j}$, $\rho_j = r_j/r_*$.

Напруження визначаються за формулами

$$\sigma_r = \alpha_j \frac{dU_j}{d\rho} + \beta_j \frac{U_j}{\rho}, \quad \sigma_\theta = \beta_j \frac{dU_j}{d\rho} + \alpha_j \frac{U_j}{\rho}, \quad (4)$$

де $\alpha_j = \frac{\gamma_j}{1 - \nu_j}$, $\beta_j = \nu_j \alpha_j$, $\gamma_j = \frac{G_j}{G_*}$.

Граничні умови у нових змінних мають вигляд

$$\begin{aligned} \sigma_r = p_0 = p_a, \quad \rho = a, \\ \sigma_r = p_N = p_b, \quad \rho = b, \end{aligned} \quad (5)$$

де $a = r_0/r_*$, $b = r_N/r_*$.

На основі умов ідеального механічного контакту отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_r(\rho_j - 0) = \sigma_r(\rho_j + 0), \\ U_j(\rho_j - 0) = U_{j+1}(\rho_j + 0), \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned} \quad (6)$$

Тут і далі прийнято, що в початковий момент часу переміщення та швидкості пластинки дорівнюють нулеві.

Застосувавши до рівняння і граничних умов перетворення Лапласа за часовою координатою τ , отримаємо задачу в зображеннях. Розв'язок цієї задачі для неоднорідної пластинки на проміжку $\rho_{j-1} < \rho < \rho_j$ запишемо у вигляді [3]

$$\tilde{U}_j = \sigma_{j-1} \varphi_j(\rho) + \sigma_j \psi_j(\rho), \quad \tilde{\sigma}_r = \sigma_{j-1} f_j(\rho) + \sigma_j g_j(\rho), \quad (7)$$

де $\sigma_j = \tilde{\sigma}_r(\rho_j)$, $\varphi_j, \psi_j, f_j, g_j$ – відомі функції. Тут хвильками позначено перетворення Лапласа від відповідної функції.

Використовуючи умови неперервності переміщень на стику j -го і $(j+1)$ -го шарів при $j = 1, \dots, N-1$ та граничні умови

$$\sigma_0 = \tilde{p}_a, \quad \sigma_N = \tilde{p}_b, \quad (8)$$

поставлену задачу в зображеннях зведемо до розв'язування такої системи $N-1$ рівнянь:

$$\begin{aligned} B_1 \sigma_1 + C_1 \sigma_2 = -A_1 \tilde{p}_a, \\ A_j \sigma_{j-1} + B_j \sigma_j + C_j \sigma_{j+1} = 0, \quad j = 2, \dots, N-2, \\ A_{N-1} \sigma_{N-2} + B_{N-1} \sigma_{N-1} = -C_{N-1} \tilde{p}_b. \end{aligned} \quad (9)$$

Ефективним для розв'язування системи рівнянь (9) є метод прогонки, який вимагає мінімальної кількості операцій при обчисленнях і забезпечує стійкість розрахунків при довільній кількості шарів.

Чисельно-аналітична формула обернення перетворення Лапласа. Знаходження оригіналів (функції $f(\theta)$) на проміжку $0 < \theta < \ell$ проводили за допомогою формули чисельно-аналітичного обернення перетворення Лапласа

са, яка має вигляд [2]

$$f(\theta) \cong \frac{1}{\ell} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp(s_n \theta) + R, \quad (10)$$

де $0 < \theta < \ell$, $F_n = \tilde{f}(s_n)$, $s_n = \frac{c + 2\pi ni}{\ell}$, R – залишковий член формули [2], c, ℓ – параметри.

Питання вибору параметрів c, ℓ докладно проаналізовано у [2]. При виборі параметра $c \geq 6$ величина R є малою і нею можна знехтувати [2], що підтвердили виконані розрахунки при різних значеннях c .

У формулу обернення входить ряд, який у розглядуваному випадку може збігатися повільно, особливо при ударних навантаженнях. Тому слід покращити збіжність рядів, які входять у формулу обернення. Для цього виділимо повільно загасаючі складові в зображеннях розв'язку при $s \rightarrow \infty$. Для цього використаємо асимптотичні співвідношення для модифікованих функцій Бесселя:

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}} (1 + O(1/z)),$$

$$I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^z}{\sqrt{z}} (1 + O(1/z)).$$

Зокрема, для нескінченної області із круговим отвором для перетворень Лапласа від напружень при $r_* = r_0$ отримаємо

$$\tilde{\sigma}_r = F_r(m, \rho) \tilde{p}_0 + \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-m\rho} \tilde{p}_0,$$

$$\tilde{\sigma}_\theta = F_\theta(m, \rho) \tilde{p}_0 + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-m\rho} \tilde{p}_0,$$

де

$$F_r(m, \rho) = \frac{(\alpha - \beta) \frac{K_1(m\rho)}{\rho} + \alpha m K_0(m\rho)}{(\alpha - \beta) K_1(m) + \alpha m K_0(m)} - \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-m(\rho-1)},$$

$$F_\theta(m, \rho) = -\frac{(\alpha - \beta) \frac{K_1(m\rho)}{\rho} - \beta m K_0(m\rho)}{(\alpha - \beta) K_1(m) + \alpha m K_0(m)} - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{\rho}} e^{-m(\rho-1)},$$

де $m = \mu s$.

Звідси з використанням теореми запізнення напруження запишемо у вигляді

$$\sigma_r = S_r + \sqrt{\frac{a}{\rho}} p_a (\tau - \mu(\rho - 1)), \quad \sigma_\theta = S_\theta + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} \sqrt{\frac{1}{\rho}} p_a (\tau - \mu(\rho - 1)),$$

де S_r, S_θ – оригінали для зображень $F_r(m, \rho) \tilde{p}_a$ і $F_\theta(m, \rho) \tilde{p}_b$.

Ці оригінали знаходимо за допомогою формули обернення (10), причому ряд в цій формулі є швидкозбіжним. Це впливає із того, що функції F_r, F_θ мають порядок $O(s^{-3/2})$ при великих значеннях параметра s перетворення Лапласа. Оскільки зображення \tilde{p}_a, \tilde{p}_b також загасають при великих значеннях s , отримуємо, що коефіцієнти рядів мають порядок $O(n^{-m})$ при великих значеннях n . Тут найменшим є $m = 5/2$ у випадку ударного (стрибокподібного) навантаження.

Для випадку однорідного кільця аналогічно запишемо

$$\tilde{\sigma}_r = \tilde{p}_a F_r(\rho) + \tilde{p}_b G_r(\rho) + \tilde{p}_a L_r(\rho) + \tilde{p}_b P_r(\rho),$$

$$\tilde{\sigma}_\theta = \tilde{p}_a F_\theta(\rho) + \tilde{p}_b G_\theta(\rho) + \tilde{p}_a L_\theta(\rho) + \tilde{p}_b P_\theta(\rho),$$

де $F_r = f - L_r$, $F_\theta = f_\theta - L_\theta$, $G_r = g - P_r$, $G_\theta = g_\theta - P_\theta$,

$$L_r = \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-m(\rho-a)} \frac{1 - e^{-2m(b-\rho)}}{1 - e^{-2m(b-a)}},$$

$$P_r = \sqrt{\frac{a}{\rho}} e^{-m(b-\rho)} \frac{1 - e^{-2m(\rho-a)}}{1 - e^{-2m(b-a)}},$$

$$L_\theta = \frac{\beta}{\alpha} L_r, \quad P_\theta = \frac{\beta}{\alpha} P_r.$$

Оригінали від напружень знаходимо подібно, як і для нескінченної області із круговим отвором. При знаходженні оригіналів, що відповідають зображенням $\tilde{p}_a L_r(\rho)$, $\tilde{p}_b P_r(\rho)$, використовуємо теорему запізнення. В результаті оригінали для цих зображень отримуємо у вигляді

$$\sqrt{\frac{a}{\rho}} [S_a(\tau - \mu(\rho - a)) - S_a(\tau - \mu(2b - a - \rho))],$$

$$\sqrt{\frac{a}{\rho}} [S_b(\tau - \mu(b - \rho)) - S_b(\tau - \mu(b + \rho - 2a))],$$

де $S_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty} p_m(t - n\Delta)$, $m = a, b$, $\Delta = 2\mu(b - a)$.

Приклади розрахунку. Розглянемо нескінченну пластинку із коловим отвором радіуса r_0 , до внутрішньої межі якої прикладено сталі зусилля $pS(\tau)$, де $S(\tau)$ – функція Гевісайда. У початковий момент часу пластинка нерухома. У розглядуваному випадку використано формулу обернення з покращеною збіжністю.

Розраховані на межі колового отвору залежності колових напружень від часу τ при коефіцієнті Пуассона $\nu = 1/3$ наведено на рис. 1 суцільною лінією (ці дані узгоджуються з відомими у літературі [5, 6]).

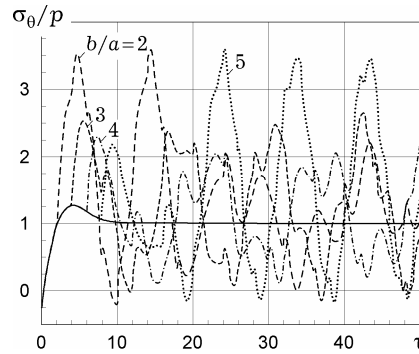


Рис. 1. Відносні колові напруження на межі кільця.

Аналогічні результати розрахунків для кільця при $b/a = 2, 3, 4, 5$ за прикладених зусиль до внутрішньої межі наведено на рис. 1 штриховими лініями.

Із аналізу результатів виконаних обчислень видно, що розподіл напружень для широких кілець має складний характер. Для вузьких кілець напруження швидко виходять на асимптотичний режим і набувають синусоїдального характеру.

Розглянемо випадок, коли зусилля на межі зростають неперервно від нульових у початковий момент часу до максимальних значень у момент $\tau = d$, залишаючись надалі сталими, тобто

$$p_a = P_a H(\tau), \quad p_b = P_b H(\tau),$$

де

$$P_a = \text{const}, \quad P_b = \text{const}, \quad H(\tau) = \begin{cases} \tau/d, & \tau < d, \\ 1, & \tau \geq d. \end{cases}$$

Цим зусиллям відповідають зображення, які входять у формулу обернення і мають такий вигляд:

$$\tilde{p}_a(s) = P_a \frac{1}{d} \frac{1 - e^{-sd}}{s^2}, \quad \tilde{p}_b(s) = P_b \frac{1}{d} \frac{1 - e^{-sd}}{s^2}.$$

Виконано розрахунки залежності напружень у нескінченній пластинці та однорідному кільці від часової координати за різних значень параметра d . У розглянутому випадку у формулі обернення збіжність рядів висока (оскільки $\tilde{p}_{a,b} = O(s^{-2})$ при $s \rightarrow \infty$). У зв'язку з цим оригінали знаходили безпосередньо за формулою (10) без покращення збіжності. На основі проведених розрахунків встановлено, що при $d \approx 0.1 \div 0.5$ напруження практично збігаються із напруженнями, що відповідають ударному навантаженню $pS(\tau)$, які знаходили за вказаними вище співвідношеннями з покращенням збіжності рядів. Звідси випливає, що обчислення динамічних напружень в однорідних і кусково-однорідних кільцях можна проводити безпосередньо із використанням формули (10) (без достатньо складних і громіздких співвідношень, які виникають при покращенні збіжності рядів), причому такий розв'язок можна використати і для дослідження навантажень, що мають ударний характер.

Розраховані для кільця з відношенням $b/a = 2$ колові напруження на внутрішній межі при значеннях $d = 1, 2, 5$ наведено на рис. 2.

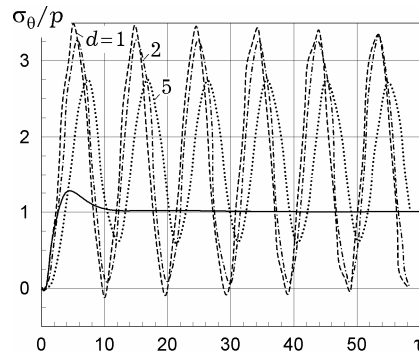


Рис. 2. Відносні напруження на внутрішній межі кільця для різних значень параметра d .

Із рисунка видно, що при $d > 2$, починаючи з деякого моменту часу, розподіл напружень практично описується синусоїдою, причому на перехідному періоді (до виходу на асимптотичний режим) напруження є невеликими за величиною.

У зв'язку з цим розглянемо задачу про знаходження елементарного асимптотичного розв'язку задачі, який справджується при великих значеннях часу для випадку, коли $p_a = P_a H(\tau)$, $p_b = P_b H(\tau)$.

Після перетворень асимптотичний розв'язок запишемо у вигляді [1]

$$\sigma_r(\rho, \tau) \approx \sigma_r^{\text{stat}} \left(1 - \frac{\sin m\tau - \sin m(\tau - d)}{dm} \right) = \sigma_r^{\text{stat}} \left(1 - A \cos m \left(\tau - \frac{d}{2} \right) \right),$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta}(\rho, \tau) &\approx \sigma_{\theta}^{\text{stat}} \left(1 - \frac{\sin m\tau - \sin m(\tau - d)}{dm} \right) = \\ &= \sigma_{\theta}^{\text{stat}} \left(1 - A \cos m \left(\tau - \frac{d}{2} \right) \right),\end{aligned}\quad (11)$$

де $A = \left(\sin \frac{md}{2} \right) \left(\frac{md}{2} \right)^{-1}$; σ_r^{stat} і $\sigma_{\theta}^{\text{stat}}$ – статичні напруження в кільці, зумовлені прикладеними до його меж зусиллями $p_a = P_a$, $p_b = P_b$.

Тут сталу m знаходимо як перший корінь рівняння

$$Y(b)J(a) - J(b)Y(a) = 0,$$

де

$$J(\rho) = \frac{(\beta - \alpha)J_1(m\rho)}{\rho + \alpha m J_0(m\rho)}, \quad Y(\rho) = \frac{(\beta - \alpha)Y_1(m\rho)}{\rho + \alpha m Y_0(m\rho)},$$

$J_0(z)$, $J_1(z)$, $Y_0(z)$, $Y_1(z)$ – функції Бесселя першого та другого родів.

Розраховані напруження у кільці при $b/a = 1.5$, $d = 1$ і $\rho = a$ за строгим підходом зображено кривою 1 на рис. 3. Асимптотичний розподіл напружень, розрахований за формулами (11), наведено кривою 1', а в нескінченній пластинці (при $b/a \rightarrow \infty$) – кривою 1''. На цьому ж рисунку аналогічні напруження при $\rho = (a + b)/2$ зображено кривими 2, 2', 2'', відповідно. Подібні результати при $b/a = 2$ у такому ж порядку наведено на рис. 4.

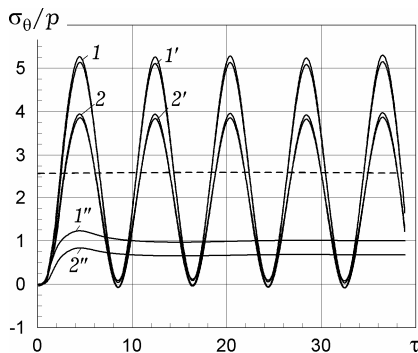


Рис. 3. Напруження в кільці при $b/a = 1.5$.

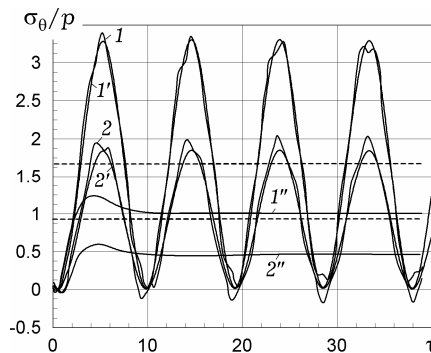


Рис. 4. Напруження в кільці при $b/a = 2$.

Із наведених на рис. 3, рис. 4 результатів розрахунків бачимо, що наближений розв'язок (11) дає змогу проводити розрахунок динамічних напружень у кільцях за елементарними формулами. Такий розв'язок є практично точним для вузьких кілець при $b/a \leq 1.5$ (рис. 3) та достатньо точним і для широких кілець – при $b/a = 2$ (рис. 4).

У зв'язку з цим проведено дослідження залежності амплітуди коливань A від відношення b/a , які необхідні для застосування розв'язку (11). Залежність величини A від відношення b/a при різних значеннях параметра d наведено на рис. 5.

Із результатів розрахунків, наведених на рис. 5, видно, що при малих значеннях d амплітуда коливань при всіх відношеннях радіусів практично дорівнює одиниці. Зазначимо, що в цьому випадку максимальні динамічні напруження вдвічі переважають статичні. При збільшенні параметра d (який характеризує час виходу навантаження на задане значення) амплітуда коливань зменшується. В усіх випадках максимальні асимптотичні динамічні напруження не можуть більше ніж вдвічі переважати відповідні статичні напруження.

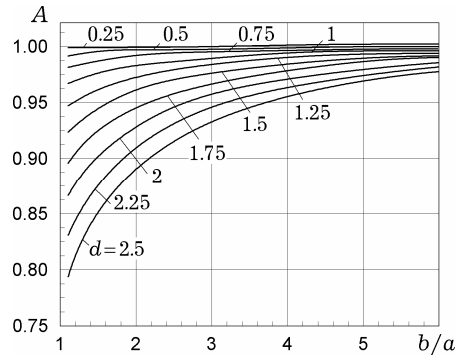


Рис. 5. Амплітуда коливань в усталеному режимі.

Прийемо, що зусилля на межі виходять на максимальні значення плавніше (функції, що описують зусилля, і перша похідна від них є неперервними):

$$p_a = P_a H_1(\tau), \quad p_b = P_b H_1(\tau),$$

$$H_1(\tau) = \begin{cases} 2\left(\frac{\tau}{d}\right)^2, & \tau < \frac{d}{2}, \\ 1 - 2\left(\frac{\tau}{d} - 1\right)^2, & \frac{d}{2} < \tau < d, \\ 1, & \tau \geq d. \end{cases}$$

Зображення Лапласа від функції H_1 набуде вигляду

$$\tilde{H}_1 = \frac{d}{2} \frac{(1 - e^{-S})^2}{S^3}, \quad S = \frac{d}{2} s.$$

Збіжність рядів у формулі (10) у цьому випадку є особливо високою, оскільки $\tilde{H}_1 = O(s^{-3})$ при $s \rightarrow \infty$.

Результати розрахунків радіальних (рис. 6а) і колових (рис. 6б) напружень у кільці при $b/a = 2$, $d = 40$, зумовлених прикладеними до внутрішньої межі зусиллями, що описуються ламаною функцією (з використанням функції $H(\tau)$), зображено на рисунках суцільними лініями. Кривим 1, 2, 3 відповідають напруження при $\rho = a, 1.5a, b$. Аналогічні результати для випадку зусиль, заданих гладкими функціями, наведено на рисунках штриховими лініями 1', 2', 3'.

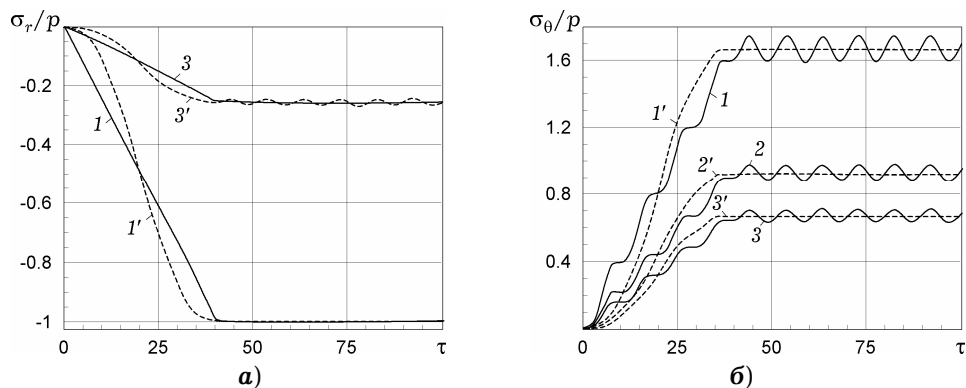


Рис. 6. Напруження в кільці при кусково-неперервних і гладких зусиллях.

Із рисунків видно, що зусилля, прикладені до пластинки, неістотно відрізняються між собою (криві 1 і 1' на рис. 6а). У той же час напруження, що відповідають гладкому навантаженню, змінюються монотонно, а при

кусково-неперервному навантаженні напруження мають коливний характер. Зазначимо, що проведені розрахунки показали, що при менших значеннях часу виходу зусиль на максимальні (при $d < 5$) напруження, що відповідають двом типам навантаження, менше відрізняються між собою і мають коливний характер. Звідси випливає, що вибором розподілу навантаження можна уникнути коливань (вібрації) кільця.

Виконано дослідження для неоднорідного кільця при $b/a = 2$, яке складається із двох шарів з межею розділу $1.5a$, до внутрішньої межі якого прикладено зусилля, що описується лінійно змінною на початковій стадії функцією.

Розраховані радіальні та колові напруження на межах пластинки та на стику однорідних шарів при однакових їх механічних характеристиках для значення $d = 1$ наведено на рис. 7а і рис. 7б. На рис. 7а наведено радіальні напруження при $\rho = a, 1.5a, b$ відповідно. На рис. 7б криві 1 відповідають колові напруження на внутрішній межі пластинки, кривим 2 і 2' – напруження зсередини і зовні межі розділу матеріалів, кривій 3' – напруження на зовнішній межі.

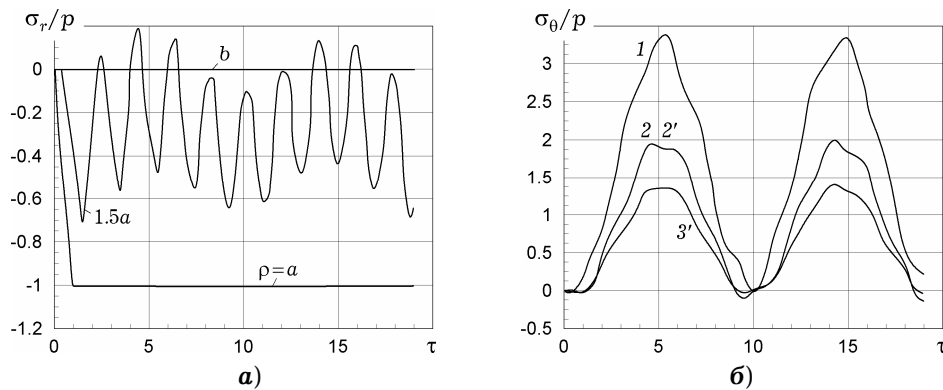


Рис. 7. Напруження в однорідному кільці.

Аналогічні розрахунки радіальних і колових напружень у випадку, коли шари мають різні модулі зсуву ($G_1 \neq G_2$), наведено на рис. 8 (при $\gamma_2 = G_2/G_1 = 2$) і на рис. 9 (при $\gamma_2 = 0.5$).

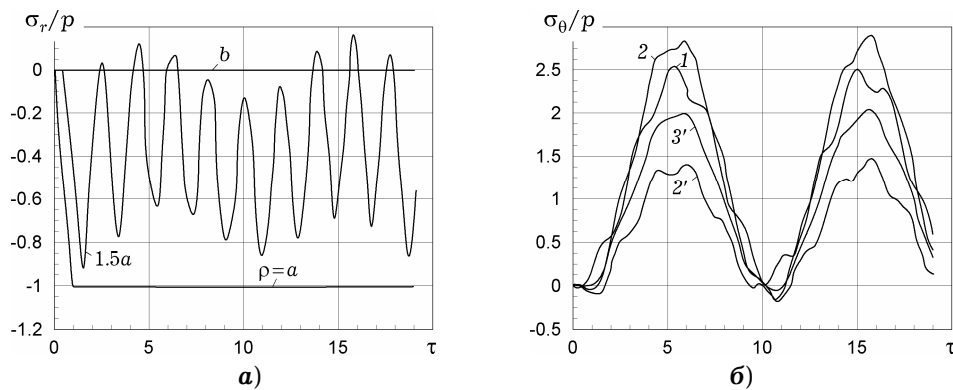


Рис. 8. Напруження в кільці при жорсткішому зовнішньому шарі ($\gamma_2 = G_2/G_1 = 2$).

Із аналізу наведених результатів обчислень можна зробити висновки про те, що нормальні напруження мають істотно коливний характер і є значно меншими за величиною порівняно з коловими; найбільші колові напруження виникають при жорсткішому внутрішньому шарі і досягають максимуму на внутрішній межі пластинки; при жорсткішому зовнішньому шарі максимальні колові напруження виникають у ньому на межі розділу, причому на внутрішній межі напруження є меншими за величиною.

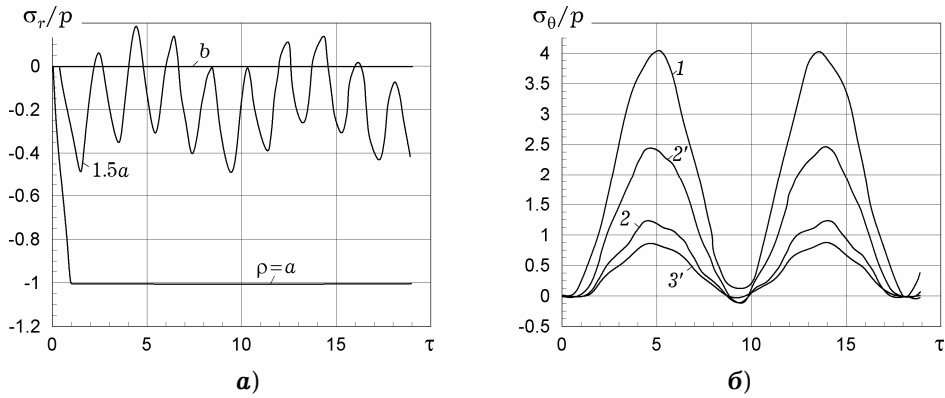


Рис. 9. Напруження в кільці при жорсткішому внутрішньому шарі ($\gamma_2 = G_2/G_1 = 0.5$).

Для чотиришарової пластинки при $b/a = 2$ з однаковими розмірами шарів проведено дослідження впливу жорсткості матеріалу шарів. Для значень відношення модулів зсуву шарів до модуля зсуву першого шару $\gamma_i = G_i/G_1 = 1, 1.333, 1.667, 2$, $i = 1, 2, 3, 4$ (збільшення жорсткості матеріалів в шарах), колові напруження на стиках шарів наведено на рис. 10. Тут кривим 1 і 5' відповідають напруження на внутрішній і зовнішній межах пластинки, а кривими 2', 2, 3', 3, 4', 4 зображено напруження на межах розділу матеріалів відповідно зсередини та ззовні.

Аналогічні дані для випадку, коли жорсткість матеріалів в шарах монотонно зменшується ($\gamma_i = 2, 1.667, 1.333, 1$, $i = 1, 2, 3, 4$), наведено у такому ж порядку на рис. 11.

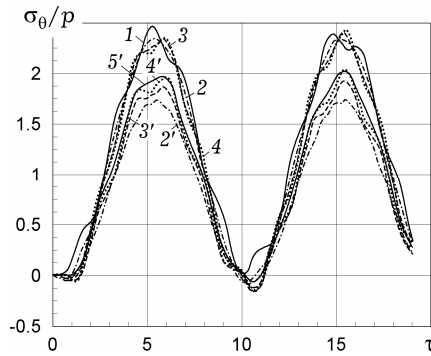


Рис. 10. Напруження у чотиришаровій пластинці при збільшенні жорсткості в шарах у напрямку до зовнішньої межі ($\gamma_i = G_i/G_1 = 1, 1.333, 1.667, 2$).

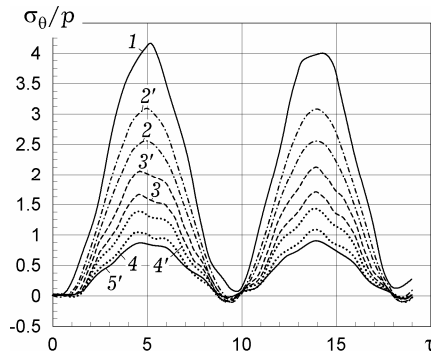


Рис. 11. Напруження у чотиришаровій пластинці при зменшенні жорсткості в шарах у напрямку до зовнішньої межі ($\gamma_i = G_i/G_1 = 2, 1.667, 1.333, 1$).

Із аналізу результатів розрахунків, наведених на рис. 10 і рис. 11, можемо зробити такі висновки: найменші напруження виникають за монотонного зростання модуля зсуву шарів (при зростанні радіальної координати), причому напруження неістотно відрізняються уздовж шару. У пластинці за монотонного спадання модуля зсуву (залежно від радіальної координати) колові напруження значно зростають, причому вони максимальні на внутрішній межі пластинки, а на стиках різнорідних шарів ці напруження монотонно спадають.

Висновки. Запропоновано алгоритм розв'язування осесиметричної динамічної задачі теорії пружності для кусково-однорідного кільця, який базується на перетворенні Лапласа та формулі обернення Пруднікова. Наведено способи покращення збіжності рядів, що входять у формулу обернення: покращення збіжності рядів шляхом виділення у членах ряду повільно збіжних складових з їх подальшим аналітичним підсумовуванням, а також заміна ударного (стрибкоподібного) навантаження у початковий момент часу лінійною або квадратичною функцією. Алгоритм апробовано для задачі про коловий отвір у пружній нескінченній пластині, навантажений одиничним ударом по всьому краю. Одержані результати добре узгоджуються з відомими в літературі [5, 6]. З використанням розробленого алгоритму розраховано напруження в однорідних і неоднорідних, широких та вузьких кільцях за різної жорсткості та різних (гладких, кусково-неперервних) динамічних навантажень. Встановлено характерні особливості у розподілі динамічних напружень в однорідних та кусково-однорідних пластинках. Наведено елементарний розв'язок, який дозволяє визначати асимптотичний розподіл напружень у пружних кільцях при великих значеннях часу.

1. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. – Москва: Высш. шк., 1970. – 712 с.
2. Кушнір Р. М., Максимович В. М., Соляр Т. Я. Визначення нестационарних температур на основі уточнених формул обернення перетворення Лапласа // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2002. – 38, № 2. – С. 18–26.
Te same: *Kushnir R. M., Maksymovych V. M., Solyar T. Ya.* Determination of nonstationary temperatures with the help of improved formulas of the inverse Laplace transformation // *Mater. Sci.* – 2002. – 38, No. 2. – P. 172–184.
3. Кушнір Р. М., Соляр Т. Я. Определение динамических напряжений в слоистых кольцевых пластинках с использованием модифицированной формулы Прудникова // Теорет. и прикл. механика. – 2013. – Вып. 7 (53). – С. 131–136.
4. Онишко Л. Й., Сенюк М. М. Напружений стан порожнистого двошарового циліндра під динамічним навантаженням // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2009. – 45, № 1. – С. 55–61.
Te same: *Onyshko L. I., Senyuk M. M.* Stressed state of a hollow two-layer cylinder under dynamic loads // *Mater. Sci.* – 2009. – 45, No. 1. – P. 57–65.
5. Саврук М. П., Онишко Л. Й., Сенюк М. М. Плоска динамічна осесиметрична задача для порожнистого циліндра // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 2008. – 44, № 1. – С. 7–13.
Te same: *Savruk M. P., Onyshko L. I., Senyuk M. M.* A plane dynamic axisymmetric problem for a hollow cylinder // *Mater. Sci.* – 2008. – 44, No. 1. – P. 1–9.
6. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. – Київ: Наук. думка, 1968. – 888 с.
7. Сагомоян А. Я. Волны напряжения в сплошных средах. – Москва: Изд-во Моск. гос. ун-та, 1985. – 416 с.
8. Тимошенко С. П., Гудьер Дж. Теория упругости. – Москва: Наука, 1975. – 576 с.
9. Suzuki S. Dynamic behavior of the ring subjected to distributed impulsive load // *Ing. Archiv.* – 1977. – 46, No. 4. – P. 245–251.

ОБ ЭФФЕКТИВНОМ ПОДХОДЕ К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ НАПРЯЖЕНИЙ В СЛОИСТЫХ КОЛЬЦЕВЫХ ПЛАСТИНКАХ НА ОСНОВАНИИ ФОРМУЛЫ ПРУДНИКОВА ДЛЯ ОБРАЩЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Предложен алгоритм решения осесимметричной динамической задачи теории упругости для кусочно-однородного кольца, нагруженного переменными во времени нормальными усилиями. Расчет напряжений в пластинках с произвольным количеством слоев проведен на основании вычисления изображения Лапласа с помощью модифицированной формулы Прудникова для его обращения. Установлены характерные особенности в распределении динамических напряжений в однородных и кусочно-однородных пластинках.

ON EFFECTIVE APPROACH TO DETERMINE THE DYNAMIC STRESSES IN LAYERED CIRCULAR PLATES BASED ON PRUDNIKOV INVERSION FORMULA FOR LAPLACE TRANSFORM

An algorithm for solving the axially symmetric dynamic problem of elasticity theory for a piecewise-homogeneous ring, loaded by time-variable normal forces is offered. Calculations of stresses in the plates with an arbitrary number of layers are performed on the basis of calculation of Laplace transform using the modified Prudnikov formula for its inversion. Characteristic features in the distribution of dynamic stresses in homogeneous and piecewise-homogeneous plates are ascertained.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
16.05.13