

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН ОБОЛОНКИ ДВОЯКОЇ КРИВИНИ З ДВОМА КОЛІНЕАРНИМИ ТРІЩИНАМИ ПРИ ЗГІНАЛЬНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

*Розглядається ізотропна оболонка двоякої кривини, послаблена двома наскрізними колінеарними тріщинами, береги яких контактують при згині оболонки. Розв'язок задачі отримано за допомогою методу сингулярних інтегральних рівнянь і чисельного методу механічних квадратур. Проведено числове дослідження залежностей коефіцієнтів інтенсивностей зусиль і моментів від розміру тріщин, відстані між ними та від кривини серединної поверхні оболонки.*

**Вступ.** Дослідженню напружено-деформованого стану оболонок присвячена значна кількість робіт. У випадку, коли оболонка знаходиться під дією згинального навантаження, відбувається контакт берегів тріщини. У роботах [1–6] для розв'язання задачі про згин пологої сферичної оболонки використовується модель, у якій враховується контакт берегів уздовж лінії тріщини на зовнішній поверхні оболонки.

У роботах [7, 8] отримано теоретичні результати, які були перевірені методом скінченних елементів. Отримано результати щодо впливу контакту берегів тріщини на коефіцієнти інтенсивності.

У цій роботі методику, розроблену в [6], у поєднанні з моделлю [5] поширено на оболонки двоякої кривини з тріщинами під дією згинального навантаження.

**Постановка задачі.** Розглядаємо ізотропну оболонку двоякої кривини сталої товщини  $h$  з двома колінеарними наскрізними тріщинами завдовжки  $2\ell$  кожна, які розташовані вздовж лінії кривини. Оболонка знаходиться під дією симетричного відносно лінії тріщин згинального навантаження. Задачу будемо досліджувати за допомогою двовимірної теорії оболонок, у рамках якої тріщини моделюються як математичні розрізи серединної поверхні оболонки. Виходячи з лінійності задачі, напружений стан в оболонці подаємо у вигляді суми напруженого стану в оболонці без тріщин при заданому зовнішньому навантаженні, яке вважаємо відомим (і яке будемо позначати величинами з зірочками), та шуканого додаткового (збуреного) напруженого стану, викликаного наявністю тріщин.

Дослідимо вплив контакту берегів тріщин унаслідок згину оболонки на її напружено-деформований стан.

Система координат  $Oxuz$  орієнтована вздовж ліній головних кривин оболонки з центром у середині розрізу  $L$ .

Зважаючи на симетрію задачі відносно осі абсцис, запишемо крайові умови контакту на лінії розрізу [1–6]:

$$[v] = \frac{h}{2} |\theta_2| \geq 0, \quad M_2 = -M_2^* + \frac{h}{2} T_2 \operatorname{sgn} [\theta_2], \quad T_2 \leq 0, \quad x \in L. \quad (1)$$

У формулах (1)  $[v]$  – стрибок компоненти вектора переміщень на серединній поверхні оболонки,  $[\theta_2]$  – стрибок кута повороту нормалі;  $T_2$  – мембранне зусилля,  $M_2$  – згинальний момент.

**Інтегральні рівняння задачі.** Методику дослідження напруженого стану оболонок двоякої кривини з концентраторами напружень було розроблено у роботах донецької школи механіків [1, 6]. Збурений напружений стан описується за допомогою рівнянь теорії пологих оболонок. Методика базується на застосуванні двовимірного інтегрального перетворення Фур'є, апарата теорії узагальнених функцій, використання спеціальних функцій

$$G_{n,v}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{v-n} K_{v+n}(z) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{n+k} \frac{\Gamma(v+k)}{(n-k)!} \left(\frac{2}{z}\right)^{2k}, \quad (2)$$

фундаментальних розв'язків рівнянь статички пологих оболонок та інтегральних представлень переміщень, зусиль і моментів [1, 6].

Враховуючи, що тріщини перебувають в однакових умовах (задача, яку розглядаємо, є симетричною), достатньо задовольнити граничні умови на контурі  $L_1$ , що відповідає одному із розрізів. Система граничних інтегральних рівнянь запишеться через похідні від стрибків переміщення і кута повороту нормалі [1, 6]:

$$\begin{aligned} \pi T_2(\ell(\tau + \gamma), 0) &= -\frac{B}{4\ell} \int_{-1}^1 \left( \left( \mathcal{K}_{11}(t - \tau) - \mathcal{K}_{11}(t - \tau + 2\gamma) \right) \frac{d[v]}{dt} \right) + \\ &\quad + \left( \mathcal{K}_{13}(t - \tau) - \mathcal{K}_{13}(t - \tau + 2\gamma) \right) a(1 - v)(3 + v) \frac{d[\theta_2]}{dt} dt, \\ \pi M_2(\ell(\tau + \gamma), 0) &= -\frac{Ba}{4\ell} \int_{-1}^1 \left( \left( \mathcal{K}_{31}(t - \tau) - \mathcal{K}_{31}(t - \tau + 2\gamma) \right) \frac{d[v]}{dt} \right) + \\ &\quad + \left( \mathcal{K}_{33}(t - \tau) - \mathcal{K}_{33}(t - \tau + 2\gamma) \right) a(1 - v)(3 + v) \frac{d[\theta_2]}{dt} dt, \quad (3) \end{aligned}$$

де

$$\mathcal{K}_{11}(x, y) = (1 + 2 \sin^2 \varphi) \frac{\cos \varphi}{r} - 2\tilde{\beta}^2 r \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(1)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi,$$

$$\mathcal{K}_{31}(x, y) = 2\tilde{\beta}^2 r \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(2)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi,$$

$$\mathcal{K}_{13}(x, y) = \frac{1}{(1 - v)(3 + v)} \mathcal{K}_{31}(x, y),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{33}(x, y) &= \left( 1 - \frac{2(1 - v)}{3 + v} \sin^2 \varphi \right) \frac{\cos \varphi}{r} - \\ &\quad - \frac{2\tilde{\beta}^2 r}{(1 - v)(3 + v)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{(3)}(\tilde{\beta}r) \cos(2n - 1)\varphi, \end{aligned}$$

$$a_n^{(1)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| \cos^3 \theta \cos((2n - 1)\theta) \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$\begin{aligned} a_n^{(2)}(s) &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d^2 \cos \theta (v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \cos(2n - 1)\theta \times \\ &\quad \times \operatorname{Re} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta, \end{aligned}$$

$$a_n^{(3)}(s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} |d^2| (v \cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2 \frac{\cos((2n - 1)\theta)}{\cos \theta} \operatorname{Im} G_{n,n-1}(s|d|\sqrt{i}) d\theta,$$

$$B = Eh, \quad a = \frac{h}{\sqrt{12(1 - v^2)}}, \quad |\tau| < 1, \quad \gamma = \frac{d}{\ell}.$$

Тут  $2d$  – відстань між центрами тріщин;  $T_2$  і  $M_2$  – інтегральні подання зусиль і моменту відповідно.

Підставляючи вирази (3) у крайові умови (1) і виключаючи з рівнянь стрибок  $[v]$ , отримуємо сингулярне інтегральне рівняння для визначення знакосталого за припущенням стрибка повороту нормалі [1]

$$\begin{aligned}
M_2^* = & \frac{1}{4\pi\ell} \frac{Bah}{2\sqrt{3(1-v^2)}} \int_{-1}^1 \frac{d[\theta_2]}{dt} (3(1-v^2)(\mathcal{K}_{11}(t-\tau) - \mathcal{K}_{11}(t-\tau+2\gamma)) + \\
& + 2 \operatorname{sgn} M_2^* \sqrt{3(1-v^2)} (\mathcal{K}_{31}(t-\tau) - \mathcal{K}_{31}(t-\tau+2\gamma)) + \\
& + \mathcal{K}_{33}(1-v)(3+v)(\mathcal{K}_{33}(t-\tau) - \mathcal{K}_{33}(t-\tau+2\gamma))) dt. \quad (4)
\end{aligned}$$

Тут враховано, що  $\operatorname{sgn} [\theta_2] = -\operatorname{sgn} M_2^*$ .

Шукані функції з рівняння (4) слід підпорядкувати ще додатковій умові неперервності кута повороту на кінцях розрізу:

$$[\theta_2](\pm \ell) = 0. \quad (5)$$

Розв'язок сформульованої задачі побудовано за допомогою методу механічних квадратур. Цей метод дозволяє звести СІР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень невідомих підінтегральних функцій у певних точках (вузлах інтерполяційного поліному). Розв'язавши її і побудувавши інтерполяційний поліном, знаходимо значення невідомих функцій у довільних точках проміжку інтегрування, зокрема у вершинах тріщин.

**Аналіз результатів.** Числовий розв'язок сформульованої задачі (4), (5) отримано для ізотропного матеріалу з  $\nu = 0.3$ . Коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль у вершинах тріщини обчислювали за формулами

$$K_M^\pm = \pm (3 - 2\nu - \nu^2) \frac{D}{4} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[\theta_2]}{dt}(t),$$

$$K_T^\pm = \mp \frac{B}{4} \lim_{t \rightarrow \pm 1} \sqrt{1-t^2} \frac{d[v]}{dt}(t).$$

Дослідження проводили для випадку, коли тріщини розташовані на внутрішній лицьовій поверхні оболонки ( $M_2^* > 0$ ).

Залежності безрозмірних значень коефіцієнтів інтенсивності зусиль і моментів від параметра взаємного розташування дефектів  $\rho = \ell/d$  будували для фіксованих значень параметра  $\lambda = R_2/R_1$  кривини оболонки та параметра  $\beta = c\ell = \frac{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}} \ell$ , де  $R = \min(|R_1|, |R_2|)$ .

На рис. 1 і рис. 2 відображено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T = hK_T/M^*\ell$  і моменту  $\tilde{K}_M = K_M/m\ell$  від відстані  $\rho$  між тріщинами при фіксованому значенні  $\beta = 1$ . Криві побудовано для значень  $\lambda = -1, 0, 1$ .

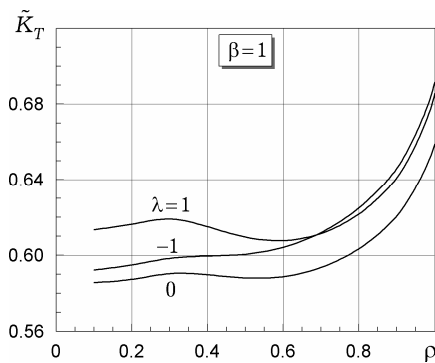


Рис. 1. Залежності коефіцієнта інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\beta = 1$  для різних значень параметра кривини  $\lambda$ .

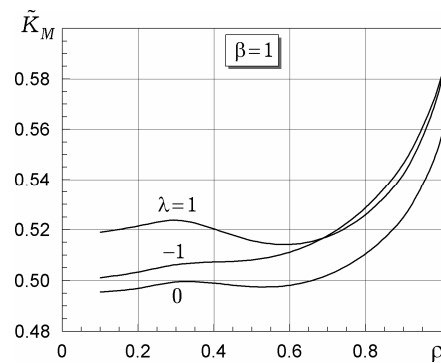


Рис. 2. Залежності коефіцієнта інтенсивності моменту  $\tilde{K}_M$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\beta = 1$  для різних значень параметра кривини  $\lambda$ .

На рис. 3 – рис. 8 зображено залежності коефіцієнтів інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T$  і моменту  $\tilde{K}_M$  від відстані  $\rho$  між тріщинами при фіксованих значеннях параметра кривини  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = -1$  і  $\lambda = 1$  відповідно. Криві побудовано для значень параметра  $\beta = 0, 0.5, 1$ .

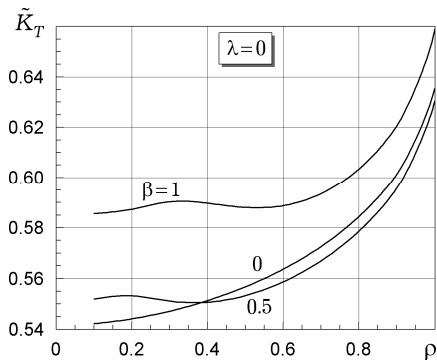


Рис. 3. Залежності коефіцієнта інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = 0$  для різних значень параметра  $\beta$ .

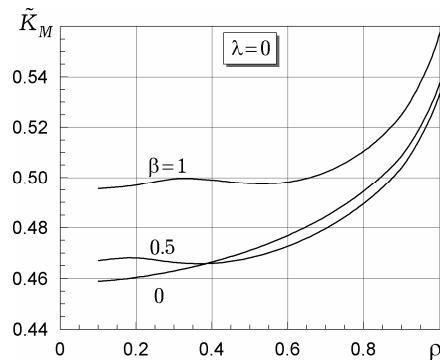


Рис. 4. Залежності коефіцієнта інтенсивності моменту  $\tilde{K}_M$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = 0$  для різних значень параметра  $\beta$ .

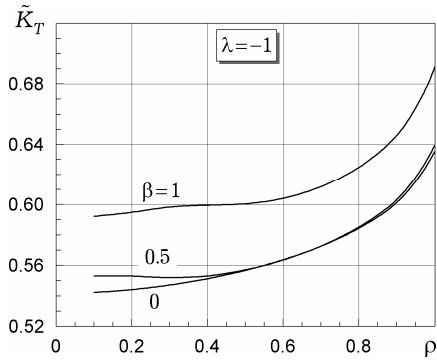


Рис. 5. Залежності коефіцієнта інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = -1$  для різних значень параметра  $\beta$ .

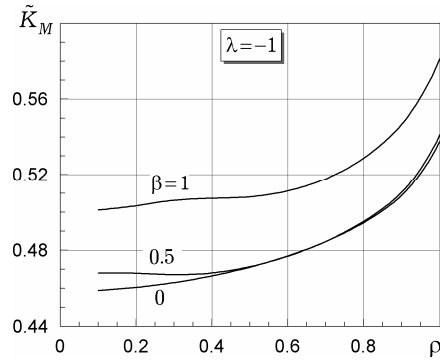


Рис. 6. Залежності коефіцієнта інтенсивності моменту  $\tilde{K}_M$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = -1$  для різних значень параметра  $\beta$ .

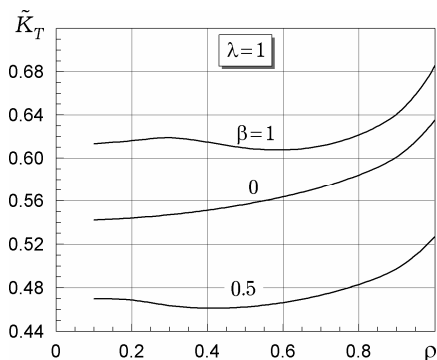


Рис. 7. Залежності коефіцієнта інтенсивності зусилля  $\tilde{K}_T$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = 1$  для різних значень параметра  $\beta$ .

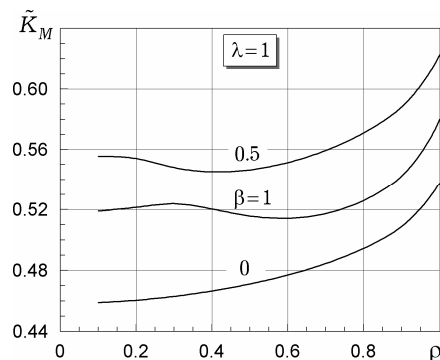


Рис. 8. Залежності коефіцієнта інтенсивності моменту  $\tilde{K}_M$  від  $\rho$  при фіксованому значенні  $\lambda = 1$  для різних значень параметра  $\beta$ .

Отримані тут результати у граничних випадках збігаються з одержаними у роботі [5].

**Висновки.** Зі збільшенням кривини оболонки та розміру тріщини значення коефіцієнта інтенсивності зусиль і моментів зростає, що призводить до зменшення несучої здатності оболонки.

Залежність коефіцієнтів від відстані між тріщинами є немонотонною, а також вона посилюється зі зменшенням відстані.

1. Довбня Е. Н., Силкина А. А. К оценке погрешности применения теории специальной ортотропии при расчете оболочек произвольной кривизны с двумя параллельными трещинами // Вісн. Донецьк. ун-ту. Сер. А. – 2004. – № 1. – С. 139–143.
2. Шацький І. П. Задача о разрезе с контактирующими кромками в изгибаемой пологой оболочке // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 5. – С. 164–173.
3. Шацький І. П., Маковийчук Н. В. Равновесие пологой сферической оболочки с учетом контакта берегов трещины при изгибе // Теорет. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 146–150.
4. Шацький І. П. Інтегральні рівняння задачі згину пологої оболонки, ослабленої розрізом з контактуючими кромками // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1991. – № 2. – С. 26–29.
5. Шацький І., Маковийчук М. Рівновага сферичної пологої оболонки з урахуванням закриття колінеарних тріщин за згину // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2010. – Вып. 12. – С. 189–195.
6. Шевченко В. П., Довбня Е. Н., Цванг В. А. Ортотропные оболочки с трещинами (разрезами) // Гузь А. Н., Космодамианский А. С., Шевченко В. П. и др. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – 387 с. – (Механика композитов / Под ред. А. Н. Гузя: В 12 т. – Т. 7.) – С. 212–249.
7. Liu R., Zhao J., Wu X. J. An improved shell theory applied for failure analysis of pressure vessels // ASME-2011. Pressure Vessels and Piping Conf. – 2011. – Vol. 3. – P. 715–726.
8. Rong Liu, Tie Zhang, Wu X. J., Wang C. H. Determination of stress intensity factors for a cracked shell under bending with improved shell theories // J. Aerosp. Eng. – 2006. – 19, No. 1. – P. 21–28.

#### **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ОБОЛОЧКИ ДВОЙКОЙ КРИВИЗНЫ С ДВУМЯ КОЛЛИНЕАРНЫМИ ТРЕЩИНАМИ ПРИ ИЗГИБАЮЩЕМ НАГРУЖЕНИИ**

*Рассматривается изотропная оболочка двойкой кривизны, ослабленная двумя сквозными коллинеарными трещинами, берега которых контактируют при изгибе оболочки. Решение задачи построено с помощью метода сингулярных интегральных уравнений и численного метода механических квадратур. Проведено численное исследование зависимостей коэффициентов интенсивностей усилий и моментов от размера трещин, расстояния между ними и кривизны срединной поверхности оболочки.*

#### **STRESS STATE OF THE SHELL OF DOUBLE CURVATURE WITH TWO COLLINEAR CRACKS UNDER BENDING LOADING**

*The isotropic shell of double curvature, weakened by two through collinear cracks, whose edges are in contact with the bending of the shell is considered. Solution of the problem is constructed by using the method of singular integral equations and numerical method of mechanical quadratures. Numerical investigation of the dependences of the force intensity factors and moment intensity factors on the size of the cracks, the distance between them and curvature of the middle surface of shell is carried out.*

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано  
24.09.12