

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ С ЗАЦЕМЛЕННОЙ БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ ПРИ УЧЕТЕ СОБСТВЕННОГО ВЕСА

Рассматривается упругий цилиндр с учетом собственного веса, на нижнем основании которого заданы условия скользящей заделки, к верхнему основанию приложена осесимметричная нормальная нагрузка, а боковая поверхность закреплена. При помощи интегрального преобразования Ханкеля задача сведена к интегральному уравнению первого рода относительно нормального напряжения на закремленной цилиндрической поверхности. После нахождения особенностей искомой функции решение интегрального уравнения разыскивается в виде ряда по многочленам Якоби. Получены результаты вычислений нормального напряжения на закремленной поверхности цилиндра как с учетом, так и без учета его собственного веса.

Одним из часто используемых элементов конструкций является упругий цилиндр конечной длины. Этим объясняется широкий круг публикаций, посвященных исследованию его напряженного состояния. Обзор основных результатов достижений в этой области механики до 1963 г. приведен в [1], а в монографии [7] – после 1963 г. Тем не менее, несмотря на большое количество приближенных численных методов решения осесимметричных задач теории упругости для сплошных цилиндров конечной длины, аналитических методов, позволяющих построить решение в виде явной функциональной зависимости от вида нагрузки и геометрических параметров цилиндра, недостаточно. Попытки получения точных решений были предприняты в работах [3] и [4], где решение строится в виде разложения по тригонометрическим или гиперболическим функциям и функциям Бесселя, что приводит к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений. В работе [6] для получения точного решения использован аппарат p -аналитических функций. Однако ни в одной из этих работ не приводится численная реализация предложенных алгоритмов решения. Из последних работ следует упомянуть работы [5] и [14], где с использованием методов суперпозиции и разложений в ряды Фурье – Бесселя решение задач не только сведено к бесконечным системам линейных алгебраических уравнений, но и при помощи метода усовершенствованной редукции получены числовые значения напряжений в цилиндре. В работе [17] решение задачи о напряженном состоянии кругового цилиндра, загруженного по торцам и по цилиндрической поверхности, также строится в виде рядов Фурье – Бесселя, что приводит к необходимости решать бесконечные системы линейных алгебраических уравнений для нахождения коэффициентов этих представлений. В работах [18] и [19] этих же авторов приведены численные результаты для задач, когда цилиндр загружен осесимметричной нормальной нагрузкой по торцам или по цилиндрической поверхности. Во всех публикациях, в том числе и выполненных в последнее время, не учитывается действие объемных сил в виде собственного веса материала, что приводит к решению неоднородных уравнений Ламе. Исключение составляет работа [20], где дается численное решение задачи о напряженном состоянии полого цилиндра под действием собственного веса материала. Аналитический путь решения таких задач намечен в работе [11], где также указано, как при выполнении условий скользящей заделки по цилиндрической поверхности можно построить точное решение осесимметричной задачи для конечного упругого цилиндра.

Целью данной работы является определение полей смещений и напряжений в конечном упругом цилиндре под действием осесимметричной нагрузки при выполнении условий второй основной задачи на его боковой по-

верхности при учете собственного веса цилиндра. С помощью интегрального преобразования Ханкеля, применяемого непосредственно к неоднородным уравнениям Ламе, в пространстве трансформант формируется векторная краевая задача. Ее решение разыскивается при помощи аппарата матричного дифференциального исчисления и матричной функции Грина. Последняя строится на основе ее билинейного разложения, что позволило существенно сократить выкладки и анализ окончательных аналитических формул.

Задача сводится к сингулярному интегральному уравнению I-го рода относительно неизвестного нормального напряжения на заземленной цилиндрической поверхности. Выявление истинного характера особенности неизвестной функции позволяет использовать ее представление в виде ряда по соответствующим многочленам Якоби. Последующая ортогонализация по этой системе многочленов сводит задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений I-го рода.

1. Рассматривается осесимметричная задача для упругого цилиндра, заданного в цилиндрической системе координат соотношениями $0 \leq r \leq a$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq z \leq h$. Искомыми функциями являются смещения $u_r(r, z)$ и $u_z(r, z)$, которые должны удовлетворять осесимметричным уравнениям Ламе с объемными силами в виде собственного веса [8], которые удобней записать в виде

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} u_r \right] + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{2}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0,$$

$$\frac{2}{\alpha + 1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = \frac{(\alpha - 1)\gamma}{(\alpha + 1)G},$$

где $\alpha = 3 - 4\mu$; μ – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига и γ – удельный вес материала цилиндра.

Напряжения выражаются через смещения формулами

$$\begin{pmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \frac{4G}{\alpha - 1} \left[(1 - \mu) \begin{pmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_r \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r \end{pmatrix} \right], \quad \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right).$$

Будем считать, что цилиндр опирается на абсолютно жесткое гладкое основание, то есть на нижнем основании $z = 0$ заданы условия скользящей заделки:

$$u_z|_{z=0} = 0, \quad \tau_{zr}|_{z=0} = 0,$$

откуда получаем, что $\frac{\partial u_r}{\partial z}|_{z=0} = 0$.

К верхнему основанию $z = h$ приложена осесимметричная нормальная нагрузка:

$$\sigma_z|_{z=h} = -p(r), \quad \tau_{zr}|_{z=h} = 0.$$

Боковая поверхность цилиндра $r = a$ заземлена:

$$u_r|_{r=a} = 0, \quad u_z|_{r=a} = 0.$$

Необходимо найти смещения и напряжения в упругом цилиндре как решения сформулированной задачи.

Перейдем к безразмерным координатам $\rho = a^{-1}r$, $\zeta = h^{-1}z$ и величинам $u(\rho, \zeta) = u_r(a\rho, h\zeta)$, $w(\rho, \zeta) = u_z(a\rho, h\zeta)$, $\sigma_\rho(\rho, \zeta) = \sigma_r(a\rho, h\zeta), \dots$. Система уравнений Ламе примет вид

$$\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) - \frac{1}{\rho^2} u \right] + \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} + \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \frac{\partial^2 w}{\partial \rho \partial \zeta} = 0,$$

$$\frac{2\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right) + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) + \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \zeta^2} = \frac{\gamma a^2 (\alpha-1)}{G(\alpha+1)}, \quad (1)$$

где $\alpha = ah^{-1}$.

Краевые условия на нижнем и верхнем основаниях цилиндра примут вид

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0} = 0, \quad w|_{\zeta=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho u) + \alpha \bar{\mu} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right) \right|_{\zeta=1} = -\frac{a(\alpha-1)}{4G\mu} P(\rho), \quad \left. \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial w}{\partial \rho} \right) \right|_{\zeta=1} = 0, \quad (3)$$

где $\bar{\mu} = \mu^{-1}(1-\mu) = (3-\alpha)^{-1}(\alpha+1)$, $P(\rho) = p(a\rho)$.

Краевые условия на боковой поверхности цилиндра будут следующими:

$$u|_{\rho=1} = 0, \quad w|_{\rho=1} = 0. \quad (4)$$

2. Для сведения поставленной краевой задачи (1)–(4) к одномерной воспользуемся конечными интегральными преобразованиями Ханкеля [13]

$$\begin{aligned} u_k(\zeta) &= \int_0^1 u(\rho, \zeta) J_1(\lambda_k \rho) \rho d\rho, & u(\rho, \zeta) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\zeta) \frac{J_1(\lambda_k \rho)}{J_1^2(\lambda_k)}, \\ w_k(\zeta) &= \int_0^1 w(\rho, \zeta) J_0(\lambda_k \rho) \rho d\rho, & w(\rho, \zeta) &= 2 \sum_{k=1}^{\infty} w_k(\zeta) \frac{J_0(\lambda_k \rho)}{J_1^2(\lambda_k)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где λ_k , $k = 1, 2, \dots$, – положительные корни уравнения $J_0(\lambda) = 0$.

В пространстве трансформант система уравнений (1) примет вид

$$\begin{aligned} u_k''(\zeta) - \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda_k^{*2} u_k(\zeta) - \frac{2\lambda_k^*}{\alpha-1} w_k'(\zeta) &= -\frac{a}{G\alpha^2} J_1(\lambda_k) \chi(\zeta), \\ \frac{2\lambda_k^*}{\alpha+1} u_k'(\zeta) + w_k''(\zeta) - \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} w_k(\zeta) &= \frac{\gamma ah(\alpha-1)}{G\alpha^2(\alpha+1)\lambda_k^*} J_1(\lambda_k), \quad 0 < \zeta < 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\lambda_k^* = \frac{1}{\alpha} \lambda_k$, а $\chi(\zeta) = \frac{G(\alpha+1)}{a(\alpha-1)} \left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = \sigma_\rho|_{\rho=1}$ – неизвестная функция. Краевые условия (2), (3) в пространстве трансформант будут такими:

$$u_k'(0) = 0, \quad w_k(0) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda_k^* u_k(1) + \bar{\mu} w_k'(1) = -\frac{h(\alpha-1)}{4G\mu} P_k, \quad u_k'(1) - \lambda_k^* w_k(1) = 0, \quad (8)$$

где $P_k = \int_0^1 P(\rho) J_0(\lambda_k \rho) \rho d\rho$.

Запишем полученную краевую задачу в векторном виде, для чего введем векторы

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\zeta) &= \begin{pmatrix} u_k(\zeta) \\ w_k(\zeta) \end{pmatrix}, & \mathbf{f}(\zeta) &= \begin{pmatrix} f_1(\zeta) \\ f_2(\zeta) \end{pmatrix} = \frac{aJ_1(\lambda_k)}{G\alpha^2} \begin{pmatrix} -\chi(\zeta) \\ \gamma h \frac{\alpha-1}{(\alpha+1)\lambda_k^*} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{p} &= \begin{pmatrix} -\frac{h(\alpha-1)}{4G\mu} P_k \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и матрицы

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -(\alpha - 1)^{-1} \\ (\alpha + 1)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} \lambda_k^* & 0 \\ 0 & -\lambda_k^* \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\mu} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда краевую задачу (6)–(8) запишем в виде неоднородного векторного уравнения

$$L[\mathbf{y}(\zeta)] = \mathbf{I}\mathbf{y}''(\zeta) + 2\lambda_k^*\mathbf{B}\mathbf{y}'(\zeta) - \lambda_k^{*2}\mathbf{C}\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{f}(\zeta), \quad 0 < \zeta < 1, \quad (9)$$

с операторами краевых условий

$$U_0[\mathbf{y}(\zeta)] = \mathbf{A}_0\mathbf{y}(0) + \mathbf{B}_0\mathbf{y}'(0) = 0,$$

$$U_1[\mathbf{y}(\zeta)] = \mathbf{A}_1\mathbf{y}(1) + \mathbf{B}_1\mathbf{y}'(1) = \mathbf{p}. \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица.

При решении задачи (9), (10) будем придерживаться схемы работы [10]. Сперва построим общее решение однородного векторного уравнения (9), а затем, построив матричную функцию Грина, найдем частное решение неоднородного уравнения.

3. Для построения общего решения однородного векторного уравнения (9) следует решить однородное матричное уравнение

$$L[\mathbf{Y}(\zeta)] = 0, \quad 0 < \zeta < 1, \quad (11)$$

где $\mathbf{Y}(\zeta)$ – матрица второго порядка.

Решение уравнения (11) строим в виде $\mathbf{Y}(\zeta) = e^{\zeta s}\mathbf{I}$, где s – комплексный параметр. Тогда $L[e^{\zeta s}\mathbf{I}] = \mathbf{M}(s)e^{\zeta s}$, где матрица

$$\mathbf{M}(s) = \mathbf{I}s^2 + 2\lambda_k^*\mathbf{B}s - \lambda_k^{*2}\mathbf{C} =$$

$$= \begin{pmatrix} s^2 - (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1}\lambda_k^{*2} & -2\lambda_k^*(\alpha - 1)^{-1}s \\ 2\lambda_k^*(\alpha + 1)^{-1}s & s^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1}\lambda_k^{*2} \end{pmatrix}.$$

Решение матричного уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{Y}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c \mathbf{M}^{-1}(s)e^{s\zeta} ds,$$

где c – замкнутый контур, охватывающий полюсы обратной матрицы $\mathbf{M}^{-1}(s)$, которая имеет вид

$$\mathbf{M}^{-1}(s) = \frac{1}{(s^2 - \lambda_k^{*2})^2} \begin{pmatrix} s^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1)^{-1}\lambda_k^{*2} & 2\lambda_k^*(\alpha - 1)^{-1}s \\ -2\lambda_k^*(\alpha + 1)^{-1}s & s^2 - (\alpha + 1)(\alpha - 1)^{-1}\lambda_k^{*2} \end{pmatrix}.$$

Рассматривая замкнутые контуры c_+ и c_- , охватывающие соответственно полюсы второго порядка $s = \lambda_k^*$ и $s = -\lambda_k^*$, и используя теорему о вычетах, получим два линейно независимых решения матричного уравнения (11):

$$\mathbf{Y}_+(\zeta) = \frac{1}{2} e^{\lambda_k^* \zeta} \begin{pmatrix} \frac{\alpha + \lambda_k^* \zeta}{(\alpha + 1)\lambda_k^*} & \frac{\zeta}{\alpha - 1} \\ -\frac{\zeta}{\alpha + 1} & \frac{\alpha - \lambda_k^* \zeta}{(\alpha - 1)\lambda_k^*} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_-(\zeta) = \frac{1}{2} e^{-\lambda_k^* \zeta} \begin{pmatrix} -\frac{\alpha - \lambda_k^* \zeta}{(\alpha + 1)\lambda_k^*} & -\frac{\zeta}{\alpha - 1} \\ \frac{\zeta}{\alpha + 1} & -\frac{\alpha + \lambda_k^* \zeta}{(\alpha - 1)\lambda_k^*} \end{pmatrix},$$

первое из которых является растущим на бесконечности, а второе – убывающим.

Общее решение однородного матричного уравнения (11) имеет вид

$$\mathbf{Y}(\zeta) = \mathbf{Y}_+(\zeta)\mathbf{C}_+ + \mathbf{Y}_-(\zeta)\mathbf{C}_-,$$

где \mathbf{C}_\pm – матрицы-константы второго порядка.

Общее решение однородного векторного уравнения (9) будет определяться формулой

$$\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{Y}_+(\zeta)\mathbf{C}_1 + \mathbf{Y}_-(\zeta)\mathbf{C}_2,$$

где $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2$ – векторы-константы второго порядка.

Если теперь удовлетворить краевым условиям (7) при $\zeta = 0$, то трансформанты смещений можно записать в виде

$$\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{Y}_0(\zeta) \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{Y}_0(\zeta) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{\lambda_k^*} \operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta + \zeta \operatorname{sh} \lambda_k^* \zeta & \zeta \operatorname{sh} \lambda_k^* \zeta \\ -\zeta \operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta & \frac{\alpha}{\lambda_k^*} \operatorname{sh} \lambda_k^* \zeta - \zeta \operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta \end{pmatrix}, \quad (12)$$

а \mathbf{C}_1 и \mathbf{C}_2 – произвольные постоянные.

Построенные функции (12) удовлетворяют однородной системе уравнений (6) и краевым условиям (7).

4. Для нахождения частного решения неоднородного векторного уравнения (9) построим матрицу Грина. С этой целью заменим краевые условия (8) на однородные условия гладкого контакта на верхнем основании:

$$u_k'(1) = 0, \quad w_k(1) = 0,$$

т. е. второй оператор краевых условий в (10) заменим на

$$U_1[\mathbf{y}(\zeta)] = \mathbf{A}_0 \mathbf{y}(1) + \mathbf{B}_0 \mathbf{y}'(1) = 0. \quad (13)$$

Введем матричное интегральное преобразование

$$\mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} u_{kn}^c \\ w_{kn}^s \end{pmatrix} = \int_0^1 \mathcal{H}(\zeta, \alpha_n) \mathbf{y}(\zeta) d\zeta$$

с ядром

$$\mathcal{H}(\zeta, \alpha_n) = \begin{pmatrix} \cos \alpha_n \zeta & 0 \\ 0 & \sin \alpha_n \zeta \end{pmatrix}, \quad \alpha_n = \pi n.$$

Применив его к неоднородному уравнению (9) и удовлетворяя при этом операторам краевых условий (13) и первому из (10), получим

$$\mathbf{M}_0(\alpha_n) \mathbf{y}_n = -\mathbf{f}_n,$$

где

$$\mathbf{f}_n = \begin{pmatrix} f_{1n}^c \\ f_{2n}^s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_0(\alpha_n) = \begin{pmatrix} \alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda_k^{*2} & \frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha-1} \\ \frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha+1} & \alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} \end{pmatrix}.$$

Найдя теперь обратную матрицу

$$\mathbf{M}_0^{-1}(\alpha_n) = \frac{1}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \begin{pmatrix} \alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} & -\frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha-1} \\ -\frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha+1} & \alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda_k^{*2} \end{pmatrix},$$

имеем

$$\mathbf{y}_n = -\mathbf{M}_0^{-1}(\alpha_n) \mathbf{f}_n.$$

Теперь воспользуемся формулой обращения

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(\zeta) &= -\mathbf{y}_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}(\zeta, \alpha_n) \mathbf{y}_n = \\ &= -\mathbf{y}_0 - 2 \int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}(\zeta, \alpha_n) \mathbf{M}_0^{-1}(\alpha_n) \mathcal{H}(t, \alpha_n) \right] \mathbf{f}(t) dt, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{y}_0 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\lambda_k^{*2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \int_0^1 \mathbf{f}(t) dt.$$

После преобразований получим следующее выражение для частного решения:

$$\mathbf{y}(\zeta) = \int_0^1 \mathbf{G}(\zeta, t) \mathbf{f}(t) dt.$$

Здесь матрица Грина $\mathbf{G}(\zeta, t)$ имеет вид

$$\mathbf{G}(\zeta, t) = -\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\lambda_k^{*2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \begin{pmatrix} G_{11}(\zeta, t) & G_{12}(\zeta, t) \\ G_{21}(\zeta, t) & G_{22}(\zeta, t) \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$G_{11}(\zeta, t) = \left(\alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} \right) \cos \alpha_n \zeta \cos \alpha_n t,$$

$$G_{12}(\zeta, t) = -\frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha-1} \cos \alpha_n \zeta \sin \alpha_n t,$$

$$G_{21}(\zeta, t) = -\frac{2\alpha_n \lambda_k^*}{\alpha+1} \sin \alpha_n \zeta \cos \alpha_n t,$$

$$G_{22}(\zeta, t) = \left(\alpha_n^2 + \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \lambda_k^{*2} \right) \sin \alpha_n \zeta \sin \alpha_n t.$$

Таким образом, построено решение одномерной задачи

$$\mathbf{y}(\zeta) = \mathbf{Y}_0(\zeta) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \int_0^1 \mathbf{G}(\zeta, t) \mathbf{f}(t) dt, \quad (15)$$

которое удовлетворяет неоднородной системе уравнений (6) и краевым условиям (7) на нижнем основании $\zeta = 0$.

Входящие в равенство (15) постоянные C_1 и C_2 найдем, удовлетворив оставшимся крайевым условиям (8). В результате получим выражения для трансформант смещений

$$\begin{aligned}
u_k(\zeta) &= -\frac{hP_k \mathcal{M}_k(\zeta)}{4G\Delta_k} - \frac{aJ_1(\lambda_k)}{G\alpha^2} \int_0^1 \left[\frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{4\Delta_k} \mathcal{A}_k(t) - \mathcal{B}_k(\zeta, t) \right] \chi(t) dt - \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma h J_1(\lambda_k)}{G\alpha^2} \left[\frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{2\Delta_k \lambda_k^*} \mathcal{D}_k - \frac{4}{\alpha+1} \mathcal{C}_k(\zeta) \right], \\
w_k(\zeta) &= \frac{hP_k \mathcal{N}_k(\zeta)}{4G\Delta_k} - \frac{aJ_1(\lambda_k)}{G\alpha^2} \int_0^1 \left[\frac{\mathcal{N}_k(\zeta)}{4\Delta_k} \mathcal{A}_k(t) + \frac{4\lambda_k^*}{\alpha+1} \mathcal{B}_k^*(\zeta, t) \right] \chi(t) dt - \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma h J_1(\lambda_k)}{G\alpha^2 \lambda_k^*} \left[\frac{\mathcal{N}_k(\zeta)}{2\Delta_k} \mathcal{D}_k + 2\mathcal{C}_k^*(\zeta) \right], \tag{16}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_k &= \lambda_k^* + \text{sh } \lambda_k^* \text{ ch } \lambda_k^*, \\
\mathcal{M}_k(\zeta) &= 2\zeta \text{ sh } \lambda_k^* \text{ sh } \lambda_k^* \zeta - 2 \text{ ch } \lambda_k^* \text{ ch } \lambda_k^* \zeta + \frac{\alpha-1}{\lambda_k^*} \text{ sh } \lambda_k^* \text{ ch } \lambda_k^* \zeta, \\
\mathcal{N}_k(\zeta) &= 2\zeta \text{ sh } \lambda_k^* \text{ ch } \lambda_k^* \zeta - 2 \text{ ch } \lambda_k^* \text{ sh } \lambda_k^* \zeta - \frac{\alpha+1}{\lambda_k^*} \text{ sh } \lambda_k^* \text{ sh } \lambda_k^* \zeta, \\
\mathcal{A}_k(t) &= \frac{3-\alpha}{\alpha+1} \frac{1}{\lambda_k^*} - 2\lambda_k^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \alpha_n t}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \left(\alpha_n^2 - \frac{3-\alpha}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} \right), \\
\mathcal{B}_k(\zeta, t) &= \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \frac{1}{\lambda_k^{*2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \alpha_n \zeta \cos \alpha_n t}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \left(\alpha_n^2 + \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} \right), \\
\mathcal{B}_k^*(\zeta, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n \sin \alpha_n \zeta \cos \alpha_n t}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2}, \\
\mathcal{C}_k(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \cos \alpha_n \zeta, \\
\mathcal{C}_k^*(\zeta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n) \sin \alpha_n \zeta}{\alpha_n (\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \alpha_n^2 + \lambda_k^{*2} \right), \\
\mathcal{D}_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{(\alpha_n^2 + \lambda_k^{*2})^2} \left(\alpha_n^2 + \frac{\alpha+5}{\alpha+1} \lambda_k^{*2} \right). \tag{17}
\end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь формулами обращения (5) для преобразований Ханкеля, получим выражения для смещений, например, для $u(\rho, \zeta)$:

$$\begin{aligned}
u(\rho, \zeta) &= -\frac{h}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \mathcal{M}_k(\zeta) J_1(\lambda_k \rho)}{\Delta_k J_1^2(\lambda_k)} - \\
&\quad - \frac{2a}{G\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k \rho)}{J_1(\lambda_k)} \int_0^1 \left[\frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{4\Delta_k} \mathcal{A}_k(t) - \mathcal{B}_k(\zeta, t) \right] \chi(t) dt - \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma h}{G\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_k \rho)}{J_1(\lambda_k)} \left[\frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{\Delta_k \lambda_k^*} \mathcal{D}_k - \frac{8}{\alpha+1} \mathcal{C}_k(\zeta) \right]. \tag{18}
\end{aligned}$$

5. Полученные формулы для смещений (см. (18)) содержат неизвестную функцию $\chi(\zeta)$. Для ее отыскания удовлетворим оставшемуся краевому условию на цилиндрической поверхности

$$u|_{\rho=1} = 0, \quad 0 < \zeta < 1.$$

В результате приходим к интегральному уравнению I-го рода:

$$\int_0^1 [R_1(\zeta, t) + R_2(\zeta, t)]\chi(t) dt = F(\zeta) + F_\gamma(\zeta), \quad 0 < \zeta < 1, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} R_1(\zeta, t) &= \frac{1}{\alpha + 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{\Delta_k \operatorname{sh}^2 \lambda_k^*} [(\alpha - 1) \operatorname{ch} \lambda_k^* t \operatorname{sh} \lambda_k^* - 2\lambda_k^* \operatorname{ch} \lambda_k^* t \operatorname{ch} \lambda_k^* + \\ &\quad + 2\lambda_k^* t \operatorname{sh} \lambda_k^* t \operatorname{sh} \lambda_k^*], \\ R_2(\zeta, t) &= \frac{2}{\alpha + 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^* \operatorname{sh} \lambda_k^*} \left[\alpha \operatorname{ch} \lambda_k^* (1 - (\zeta + t)) + \alpha \operatorname{ch} \lambda_k^* (1 - |\zeta - t|) - \right. \\ &\quad \left. - \lambda_k^* (\zeta + t) \operatorname{sh} \lambda_k^* (1 - (\zeta + t)) - \lambda_k^* |\zeta - t| \operatorname{sh} \lambda_k^* (1 - |\zeta - t|) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\lambda_k^*}{\operatorname{sh} \lambda_k^*} \operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta \operatorname{ch} \lambda_k^* t \right], \\ F(\zeta) &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k \mathcal{M}_k(\zeta)}{\Delta_k J_1(\lambda_k)}, \\ F_\gamma(\zeta) &= \frac{2\gamma h}{\alpha + 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathcal{M}_k(\zeta)}{\Delta_k \lambda_k^*} t h \frac{\lambda_k^*}{2} \left(\frac{\alpha + 3}{2\lambda_k^*} - \frac{1}{\operatorname{sh} \lambda_k^*} \right) - \\ &\quad - \frac{4\gamma h}{\alpha + 1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^{*3} \operatorname{sh} \lambda_k^*} \left\{ \operatorname{ch} \lambda_k^* (1 - \zeta) - \operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \lambda_k^* \zeta \operatorname{sh} \lambda_k^* (1 - \zeta) + \lambda_k^* (1 + \zeta) \operatorname{sh} \lambda_k^* \zeta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_k^*}{\operatorname{sh} \lambda_k^*} [\operatorname{ch} \lambda_k^* \zeta - \operatorname{ch} \lambda_k^* (1 + \zeta)] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

При получении формул (20) были просуммированы ряды, входящие в выражения (17), при помощи формул 5.1.25.4, 5.1.25.6, 5.1.25.25, 5.25.27, 5.4.5.1, 5.4.5.2, 5.4.5.11 и 5.4.5.12 из [12].

Анализ ядер $R_k(\zeta, t)$, $k = 1, 2$, показывает, что входящие в них ряды содержат как экспоненциально убывающие слагаемые (при $\lambda_k^* \rightarrow \infty$), так и слагаемые вида $\frac{1}{\lambda_k^*} e^{-\lambda_k^* |\zeta - t|}$, $\frac{1}{\lambda_k^*} e^{-\lambda_k^* (\zeta + t)}$, $\frac{1}{\lambda_k^*} e^{-\lambda_k^* (2 - \zeta - t)}$. Отсюда следует, что ядро интегрального уравнения (19) имеет логарифмические особенности при $\zeta = t$ и $\zeta = t = 1$.

Слагаемое $F_\gamma(\zeta)$ в правой части интегрального уравнения (19) представляет из себя ряд, сходящийся при $\zeta \in [0, 1]$, а ряд в $F(\zeta)$ сходится, если трансформанта внешней нагрузки $P_k = O((\lambda_k^*)^{-1/2-\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$.

Исследуем теперь характер особенностей неизвестной функции $\chi(\zeta)$ на концах промежутка $[0, 1]$, принимая во внимание, что $\chi(\zeta)$ – нормальное напряжение σ_ρ на цилиндрической поверхности $\rho = 1$. Пренебрегая кривизной цилиндра, можно интерпретировать данную задачу как задачу для клина, на гранях которого заданы условия разных видов. При $\zeta = 1$ имеем ситуацию «защемление/загруженный край». Тогда согласно [15] напряжение имеет степенную особенность порядка $\beta = -0.205$ при $\mu = 1/4$ и $\beta = -0.310$ при $\mu = 1/3$. При $\zeta = 0$ имеем ситуацию «защемление/гладкий контакт» и, как показано в [9], напряжение в этом случае особенности не имеет.

6. Выявленный характер особенной неизвестной функции $\chi(\zeta)$ требует искать решение интегрального уравнения (19) в виде ряда по многочленам Якоби

$$\chi(\zeta) = (1 - \zeta)^\beta \sum_{m=0}^{\infty} \chi_m P_m^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta), \quad 0 < \zeta < 1, \quad (21)$$

где χ_m – неизвестные коэффициенты.

Подставим представление (21) в уравнение (19) и проведем ортогонализацию полученного выражения по системе многочленов $\{P_s^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta)\}$. Для этого умножим его обе части на $P_s^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta)$ и проинтегрируем по ζ от 0 до 1. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений I-го рода

$$\sum_{m=0}^{\infty} (\mathcal{A}_{sm}^{(1)} + \mathcal{A}_{sm}^{(2)}) \chi_m = F_s + F_s^\gamma, \quad s = 0, 1, \dots, \quad (22)$$

где

$$\mathcal{A}_{sm}^{(i)} = \int_0^1 P_s^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta) d\zeta \int_0^1 R(\zeta, t) (1 - t)^\beta P_m^{(0, \beta)}(1 - 2t) dt \quad i = 1, 2,$$

$$F_s = \int_0^1 F(\zeta) P_s^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta) d\zeta, \quad F_s^\gamma = \int_0^1 F_\gamma(\zeta) P_s^{(0, \beta)}(1 - 2\zeta) d\zeta.$$

Остановимся на вычислении коэффициентов и правой части системы (22). Так как в ядре $R_1(\zeta, t)$ переменные ζ и t разделены, то при вычислении $\mathcal{A}_{sm}^{(i)}$, F_s и F_s^γ возникнут интегралы вида ($x = 1 - 2\zeta$):

$$\mathcal{J}_+^{(i)}(q, s) = \int_{-1}^1 (1 + x)^i e^{-q(1+x)} P_s^{(0, \beta)}(x) dx,$$

$$\mathcal{J}_-^{(i)}(q, s) = \int_{-1}^1 (1 - x)^i e^{-q(1-x)} P_s^{(0, \beta)}(x) dx, \quad i = 0, 1.$$

Эти интегралы могут быть вычислены в явном виде следующим образом. При помощи формул 10.8.16 из [2] запишем $P_s^{(0, \beta)}(x)$ в виде многочленов от $(1 + x)$ и $(1 - x)$ соответственно. Далее, интегрируя по частям, получим, что

$$\mathcal{J}_-^{(0)}(q, s) = \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s + \beta + 1)_j}{(j!)^2} f_j(q),$$

$$\mathcal{J}_-^{(1)}(q, s) = 2 \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s + \beta + 1)_j}{(j!)^2} f_{j+1}(q),$$

$$J_+^{(0)}(q, s) = (-1)^s \frac{(\beta + 1)_s}{s!} \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s + \beta + 1)_j}{j! (\beta + 1)_j} f_j(q),$$

$$J_+^{(1)}(q, s) = 2(-1)^s \frac{(\beta + 1)_s}{s!} \sum_{j=0}^s \frac{(-s)_j (s + \beta + 1)_j}{j! (\beta + 1)_j} f_{j+1}(q),$$

где

$$f_0(q) = \frac{1}{q} (1 - e^{-2q}),$$

$$f_j(q) = \frac{1}{q} \left[\frac{j!}{(2q)^j} - e^{-2q} \left(1 + \sum_{i=1}^j \frac{j(j-1)\dots(j-i+1)}{(2q)^i} \right) \right], \quad j = 1, 2, \dots$$

Двойной интеграл в $\mathcal{A}_{sm}^{(2)}$ и интеграл по t в $\mathcal{A}_{sm}^{(1)}$ вычисляли численно по формуле Гаусса.

Вычисления проводились для двух видов внешней нагрузки:

– равномерно распределенной $P(\rho) = P_* - \text{const}$, для которой транс-

$$\text{форманта Ханкеля } P_k = \frac{P_*}{\alpha \lambda_k^*} J_1(\lambda_k);$$

– параболической $P(\rho) = a^2 P_* (1 - \rho^2)$, для которой трансформанта

$$\text{Ханкеля } P_k = \frac{4h^2 P_*}{\alpha \lambda_k^{*3}} J_1(\lambda_k).$$

При вычислениях значения корней λ_k были взяты из работы [16].

Численный анализ показал, что удержание в системе (20) пятнадцати уравнений вполне достаточно для получения трех верных знаков после запятой в окончательном результате.

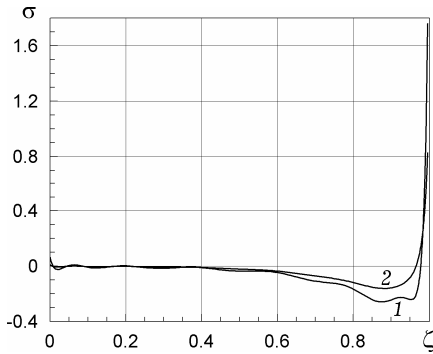


Рис. 1

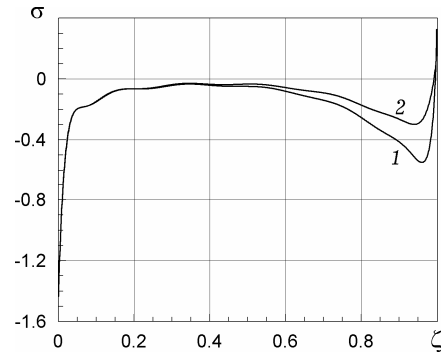


Рис. 2

Вычисления проводились для стального цилиндра с такими механическими и геометрическими параметрами: $\mu = 0.25$, $\gamma = 7.65 \cdot 10^4 \text{ Н/м}^3$, $a = 1 \text{ м}$, $h = 4 \text{ м}$, $P_* = 10^6 \text{ Н/м}^3$). На рис. 1 приведены значения напряжений $\sigma = \sigma_\rho|_{p=1} P_*^{-1}$ без учета веса цилиндра в зависимости от безразмерной координаты ζ для равномерно-распределенной и параболической нагрузок (кривые 1 и 2). На рис. 2 приведены напряжения $\sigma = \sigma_\rho|_{p=1} P_*^{-1}$ уже для случая учета собственного веса при тех же исходных данных.

Из приведенных рисунков видно, что при приближении к точке $\zeta = 1$ напряжения становятся положительными и неограниченно возрастают.

1. *Абрамян Б. Л., Александров А. Я.* Осесимметричная задача теории упругости // Тр. II Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. – Москва: Наука, 1966. – Вып. 3. – С. 7–37.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. – Т. 2. – Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – Москва: Наука, 1974. – 296 с.
То же: *Bateman H., Erdélyi A.* Higher transcendental functions. – Vol. 2: Bessel functions, parabolic cylinder functions, and orthogonal polynomials. – New York: McGraw-Hill, 1953. – 396 p.
3. *Бухаринов Г. Н.* К задаче о равновесии упругого круглого цилиндра // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. Математика, физика, химия. – 1952. – № 2. – С. 23–33.
4. *Валов Г. М.* Об осесимметричной деформации сплошного кругового цилиндра конечной длины // Прикл. математика и механика. – 1962. – **26**, № 4. – С. 650–667.
5. *Вігак В. М., Токовий Ю. В.* Точний розв'язок осесимметричної задачі теорії пружності в напруженнях для суцільного циліндра певної довжини // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2003. – Вип. 1. – С. 55–60.
6. *Капишевский О. О.* О применении p -аналитических функций в осесимметричной задаче теории упругости // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Математика і механіка. – 1962. – № 5, вип. 1. – С. 76–89.
7. *Колтунов М. А., Васильев Ю. Н., Черных В. А.* Упругость и прочность цилиндрических тел. – Москва: Высш. шк., 1975. – 526 с.
8. *Новацкий В.* Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
То же: *Nowacki W.* Thermoelasticity. – London: Pergamon, 1962. – 628 p.
9. *Партон В. З., Перлин П. И.* Методы математической теории упругости. – Москва: Наука, 1981. – 688 с.
10. *Попов Г. Я.* О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и их применении к краевым задачам механики // Прикл. механика. – 2003. – **39**, № 12. – С. 46–73.
То же: *Popov G. Ya.* New transforms for the resolving equations in elastic theory and new integral transforms, with applications to boundary-value problems of mechanics // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 12. – P. 1400–1424.
11. *Попов Г. Я.* Осесимметричные краевые задачи теории упругости для цилиндров и конусов конечной длины // Докл. РАН. – 2011. – **439**, № 2. – С. 192–197.
12. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. – Москва: Наука, 1981. – 800 с.
13. *Снеддон И.* Преобразование Фурье. – Москва: Изд-во иностр. лит., 1955. – 667 с.
То же: *Ian N. Sneddon.* Fourier transforms. – New York: McGraw-Hill, 1951. – 542 p.
14. *Токовий Ю. В.* Осесимметричні напруження в скінченному пружному циліндрі під дією нормального тиску, рівномірно розподіленого по частині бічної поверхні // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2010. – Вип. 8. – С. 144–151.
15. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Наука, 1968. – 402 с.
16. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции. – Москва: Наука, 1977. – 344 с.
То же: *Jahnke E., Emde F., Lösch F.* Tafeln höherer Funktionen. – Stuttgart: B. G. Teubner, 1960. – XII + 318 S.
17. *Chau K. T., Wei X. X.* Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part I. Analytic solution // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 40. – P. 5707–5732.
18. *Chau K. T., Wei X. X.* Finite solid circular cylinders subjected to arbitrary surface load. Part II. Application to double-punch test // Int. J. Solids Struct. – 2000. – **37**, No. 40. – P. 5733–5744.
19. *Chau K. T., Wei X. X.* A new analytic solution for the diametral point load strength test on finite solid circular cylinders // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 9. – P. 1459–1481.
20. *Conte S. D., Miller K. Z., Sensenig C. B.* The numerical solution of axisymmetric problems in elasticity // In: Ballistic missile and space technology. – New York–London: Acad. Press, 1960. – No. 4. – P. 173–202.

ОСЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРУЖНОГО ЦИЛІНДРА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ З ЗАЩЕМЛЕНОЮ БІЧНОЮ ПОВЕРХНЕЮ ПРИ ВРАХУВАННІ ВЛАСНОЇ ВАГИ

Розглядається пружний циліндр під дією власної ваги, на нижній основі якого задано умови ковзного закріплення, до верхньої основи прикладено осесиметричне нормальне навантаження, а бічна поверхня защемлена. За допомогою інтегрального перетворення Ганкеля задачу зведено до інтегрального рівняння I-го роду відносно нормального напруження на защемленій циліндричній поверхні. Після знаходження особливостей невідомої функції розв'язок інтегрального рівняння розшукується у вигляді ряду за многочленами Якобі. Обчислено значення нормальних напружень на защемленій поверхні циліндра як з урахуванням, так і без урахування власної ваги.

AXISYMMETRIC PROBLEM FOR AN ELASTIC CYLINDER OF FINITE LENGTH WITH FIXED LATERAL SURFACE WITH REGARD FOR NATURAL WEIGHT

An elastic cylinder with regard for natural weight and the conditions of the sliding fixity on the bottom basis is considered. The normal axisymmetric loading is applied to the upper basis, and the lateral surface is fixed. With the help of integral Hankel transform the problem is reduced to the integral equation of the first kind with respect to the normal stresses on the fixed cylindrical surface. After the estimating the singularities of the unknown function the solution of the integral equation is expressed in the form of the series by the Jacobi polynomials. The results of the calculations of the normal stress on the fixed surface both in view of, and without taking into account the natural weight of the cylinder, are obtained.

Одесс. нац. ун-т имени И. И. Мечникова, Одесса

Получено
27.02.13