УДК 519.6: 539.3

І. І. Прокопишин

СХЕМИ ДЕКОМПОЗИЦІЇ ОБЛАСТІ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ШТРАФУ ДЛЯ ЗАДАЧ ПРО ІДЕАЛЬНИЙ КОНТАКТ ПРУЖНИХ ТІЛ

На основі методу штрафу запропоновано ряд континуальних паралельних схем декомпозиції області для розв'язування задач про ідеальний механічний контакт пружних тіл. Доведено теореми про збіжність деяких із цих схем. Досліджено питання оптимального вибору ітераційних параметрів. Показано зв'язок отриманих схем з методами декомпозиції області без штрафу.

Вступ. До методів декомпозиції області (МДО) відносять математичні методи, за допомогою яких розв'язування крайових задач математичної фізики у складних областях можна звести до розв'язування послідовності задач в окремих підобластях. У випадку, коли задачі в окремих підобластях на кожній ітерації можна розв'язувати незалежно одну від одної, такі МДО називають паралельними.

Схеми декомпозиції області також класифікують за типом граничних умов, що задаються на спільних межах підобластей. Якщо на спільних межах задано крайові умови першого роду, такі схеми МДО називають схемами Діріхле. Крайовим умовам другого та третього роду відповідають методи декомпозиції області Неймана та Робіна (Пуанкаре).

Перевагою МДО є можливість застосовувати різні математичні моделі та методи для розв'язування задач в окремих підобластях, а також організовувати розпаралелення обчислень.

Одні із перших алгоритмів МДО для розв'язування крайових задач для рівняння Пуассона було запропоновано у роботах [8, 10], а для задач теорії пружності − у праці [16]. Значний вклад у розвиток методів декомпозиції області внесли автори праць [1, 11, 16, 21, 25, 26]. Сучасний стан досліджень стосовно методів декомпозиції області викладено в роботах [11, 21, 25, 26].

Важливим завданням є не лише розробка алгоритмів МДО для розв'язування певного класу задач, а й математичне обґрунтування цих алгоритмів і теоретичне доведення їхньої збіжності.

У цій статті запропоновано на континуальному рівні клас паралельних ітераційних схем МДО для розв'язування задач про ідеальний контакт багатьох лінійно пружних тіл скінченних розмірів. Розроблені схеми декомпозиції області базуються на методі штрафу та ітераційних методах для варіаційних рівнянь у гільбертових просторах. Здійснено математичне обґрунтування цих схем і доведено збіжність деяких з них, запропоновано ряд методів оптимального вибору ітераційних параметрів, показано зв'язок розроблених МДО зі схемами декомпозиції області без штрафу.

1. Постановка задачі. У тривимірному просторі введемо декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, базисні вектори якої позначимо через $\mathbf{e}_i$, $i = 1,2,3$. Розглянемо задачу про ідеальний контакт N пружних тіл $\Omega_\alpha \subset \mathbb{R}^3$ з ліпшицевими межами $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$ (рис. 1). Позначимо $\Omega = \bigcup_{\alpha=1}^{N} \Omega_\alpha$.

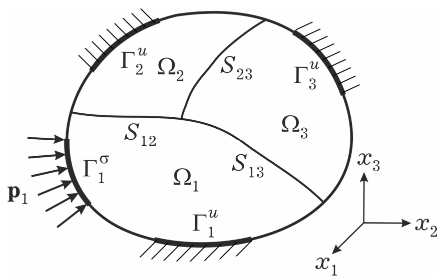

Рис. 1

Напружено-деформований стан у точці $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^\top$ кожного з тіл Ω_α визначають вектор переміщень $\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, симетричні тензори деформацій $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{x}) = \varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ і напружень $\hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{x}) = \sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$. Ці величини задовольняють рівняння лінійної теорії пружності:

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{\alpha ik}(\mathbf{x})}{\partial x_k} + f_{\alpha i}(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1,2,3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{1}$$

$$\sigma_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \sum_{k,\ell=1}^{3} C_{\alpha ijk\ell}(\mathbf{x})\varepsilon_{\alpha k\ell}(\mathbf{x}), \qquad i,j = 1,2,3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{\alpha ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{\alpha i}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right), \qquad i,j = 1,2,3, \qquad \mathbf{x} \in \Omega_\alpha, \tag{3}$$

де $f_{\alpha i}$ – компоненти вектора об'ємних сил $\mathbf{f}_\alpha(\mathbf{x}) = f_{\alpha i}(\mathbf{x})\mathbf{e}_i$, що діють на тіло Ω_α, а $C_{\alpha ijk\ell}$, $\alpha = 1,2,\ldots,N$, – симетричні пружні сталі, які мають властивості [22, с. 77]

$$b_\alpha \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{\alpha ij}^2 \le \sum_{i,j,k,\ell=1}^{3} C_{\alpha ijk\ell}\varepsilon_{\alpha ij}\varepsilon_{\alpha k\ell} \le d_\alpha \sum_{k,\ell=1}^{3} \varepsilon_{\alpha k\ell}^2, \quad 0 < b_\alpha \le d_\alpha < \infty. \tag{4}$$

На межі $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$ кожного з тіл уведемо ортонормований базис $\boldsymbol{\xi}_\alpha$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha$, $\mathbf{n}_\alpha$, де $\boldsymbol{\xi}_\alpha$ і $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ – одиничні дотичні, а $\mathbf{n}_\alpha$ – одинична зовнішня нормаль. Вектори переміщень і напружень на Γ_α у цьому базисі запишемо так:

$$\mathbf{u}_\alpha = u_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + u_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + u_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha,$$
$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\alpha = \sigma_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + \sigma_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + \sigma_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha.$$

Припустимо, що межа Γ_α складається з трьох частин: Γ_α^u, Γ_α^σ та S_α, таких, що $\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha^u \cup \Gamma_\alpha^\sigma \cup S_\alpha$, $\Gamma_\alpha^u \cap \Gamma_\alpha^\sigma \cap S_\alpha = \varnothing$, $\Gamma_\alpha^u \ne \varnothing$. Тут $S_\alpha = \bigcup_{\beta \in I_\alpha} S_{\alpha\beta} \ne \varnothing$ – поверхня ідеального контакту тіла Ω_α з рештою тіл, $S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}$ – ділянка ідеального контакту між тілами Ω_α та Ω_β, а $I_\alpha \subset \{1,2,\ldots,N\}$, $I_\alpha \ne \varnothing$ – множина індексів усіх тіл, які мають ідеальний контакт із тілом Ω_α.

На частині Γ_α^u поверхні Γ_α задано кінематичні крайові умови (умови Діріхле), які для спрощення варіаційних формулювань вважаємо нульовими, а на частині Γ_α^σ задано статичні крайові умови (умови Неймана):

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = 0, \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^u, \qquad \boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_\alpha(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \Gamma_\alpha^\sigma, \tag{5}$$

де $\mathbf{p}_\alpha = p_{\alpha\xi}\boldsymbol{\xi}_\alpha + p_{\alpha\eta}\boldsymbol{\eta}_\alpha + p_{\alpha n}\mathbf{n}_\alpha$ – вектор заданих граничних навантажень.

На поверхнях $S_{\alpha\beta}$ виконуються умови ідеального механічного контакту:

$$\mathbf{u}_\alpha(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_\beta(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \qquad \beta \in I_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \tag{6}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\sigma}_\beta(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \qquad \beta \in I_\alpha, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N. \tag{7}$$

2. Варіаційні формулювання. Дамо варіаційні формулювання задачі про ідеальний контакт пружних тіл (1)–(3), (5)–(7) у формі проблеми мінімізації квадратичного функціонала та у формі варіаційного рівняння на множині кінематично допустимих переміщень.

Для кожного з тіл Ω_α розглянемо простори Соболєва $V_\alpha = [H^1(\Omega_\alpha)]^3$ та введемо у них замкнуті підпростори $V_\alpha^0 = \{\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha : \mathbf{u}_\alpha = 0 \text{ на } \Gamma_\alpha^u\}$ зі скалярним добутком

$$(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0} = \sum_{i=1}^{3} \int_{\Omega_\alpha} \left[u_{\alpha i} v_{\alpha i} + \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial u_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) \left(\frac{\partial v_{\alpha i}}{\partial x_j} \right) \right] d\Omega$$

і нормою $\|\mathbf{u}_\alpha\|_{V_\alpha^0} = (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{u}_\alpha)_{V_\alpha^0}^{1/2}$.

Значення елементів просторів V_α і V_α^0 на частинах межі області Ω_α будемо розуміти у сенсі слідів [9] і для простоти позначатимемо їх тими ж символами. Слід елемента $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha$ на межі Γ_α^u належить класу $[H^{1/2}(\Gamma_\alpha^u)]^3$, а слід елемента $\mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0$ на межі $\Xi_\alpha = \operatorname{int}(\Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u)$ належить $[H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)]^3$. Надалі будемо вважати, що $\Gamma_\alpha^u = \overline{\Gamma}_\alpha^u$. Тоді $\Xi_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \Gamma_\alpha^u$, $\Gamma_\alpha^\sigma \subset \Xi_\alpha$, $S_{\alpha\beta} \subset \Xi_\alpha \quad \forall \beta \in I_\alpha$.

Розглянемо рефлексивний банахів простір $V_0 = V_1^0 \times V_2^0 \times \ldots \times V_N^0 = \{\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_N)^\top : \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0, \alpha = 1, 2, \ldots, N\}$, який є прямим добутком просторів V_α^0. У просторі V_0 означимо скалярний добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0} = \sum_{\alpha=1}^{N} (\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha)_{V_\alpha^0}$ і норму $\|\mathbf{u}\|_{V_0} = (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{V_0}^{1/2}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0$, та введемо опуклу замкнуту множину кінематично допустимих переміщень:

$$K = \{\mathbf{u} \in V_0 : \mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta = 0 \quad \text{на} \quad S_{\alpha\beta}, \{\alpha, \beta\} \in Q\}, \tag{8}$$

де $Q = \{\{\alpha, \beta\} : \alpha \in \{1, 2, \ldots, N\}, \beta \in I_\alpha\}$ – множина всіх можливих невпорядкованих пар індексів тіл, між якими є ідеальний контакт, $\mathbf{u}_\alpha \in [H_{00}^{1/2}(\Xi_\alpha)]^3$ на $S_{\alpha\beta}$, $\beta \in I_\alpha$.

Очевидно, що множина K, означена формулою (8), є замкненим лінійним підпростором гільбертового простору V_0. Скалярний добуток і норму в просторі K означимо так: $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_K = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0}$, $\|\mathbf{u}\|_K = \|\mathbf{u}\|_{V_0}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in K$.

Введемо у просторі V_0 білінійну форму $A(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ таку, що $A(\mathbf{u}, \mathbf{u})/2$ визначає сумарну енергію пружної деформації тіл:

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{\alpha=1}^{N} a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0,$$

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) : \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \, d\Omega, \tag{9}$$

та лінійну форму $L(\mathbf{u})$, що дорівнює роботі заданих зовнішніх сил:

$$L(\mathbf{u}) = \sum_{\alpha=1}^{N} \ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha), \qquad \mathbf{u} \in V_0,$$

$$\ell_\alpha(\mathbf{u}_\alpha) = \int_{\Omega_\alpha} \mathbf{f}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, d\Omega + \int_{\Gamma_\alpha^\sigma} \mathbf{p}_\alpha \cdot \mathbf{u}_\alpha \, dS, \tag{10}$$

де $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$.

Лема 1. *Нехай межі* $\Gamma_\alpha = \partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, *тіл є ліпшицевими*, $\Gamma_\alpha^u \neq \varnothing$, $\mathbf{f}_\alpha \in [L_2(\Omega_\alpha)]^3$, $\mathbf{p}_\alpha \in [L_2(\Gamma_\alpha^\sigma)]^3$, $C_{\alpha ijk\ell} \in L_\infty(\Omega_\alpha)$ *і виконується умова* (4). *Тоді білінійна форма* A *є симетричною, коерцитивною і неперервною, а лінійна форма* L *– неперервною*:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{v}, \mathbf{u})\}, \tag{11}$$

$$(\exists B_A > 0)\ (\forall \mathbf{u} \in V_0) \qquad \{A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq B_A \|\mathbf{u}\|_{V_0}^2\}, \tag{12}$$

$$(\exists M_A > 0)\ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \quad \{|A(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_A \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}, \tag{13}$$

$$(\exists T_L > 0)\ (\forall \mathbf{u} \in V_0) \qquad \{|L(\mathbf{u})| \leq T_L \|\mathbf{u}\|_{V_0}\}. \tag{14}$$

Коерцитивність (12) білінійної форми є наслідком нерівності Корна [7, с. 114]. Неперервність (13) білінійної форми доводиться за допомогою нерівності Шварца та обмеженості пружних сталих. Властивість (14) випливає із теореми про сліди [7, с. 110].

Із застосуванням результатів праці [7] можна довести такі теореми.

Теорема 1. *Задача ідеального контакту* (1)–(3), (5)–(7) *у слабкому розумінні еквівалентна задачі мінімізації квадратичного функціонала у просторі* K:

$$F(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u} \in K}. \tag{15}$$

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді задача* (15) *має єдиний розв'язок* $\bar{\mathbf{u}} \in K$, *а її розв'язання еквівалентне розв'язанню лінійного варіаційного рівняння у просторі* K:

$$F'(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in K, \qquad \mathbf{u} \in K. \tag{16}$$

3. Варіаційні формулювання на основі методу штрафу. Зведемо задачу мінімізації (15) у підпросторі $K \subset V_0$ до задачі мінімізації у вихідному просторі V_0, застосовуючи метод штрафу [2, 9, 15]. Уведемо штраф за порушення умови (6) рівності переміщень у вигляді [13, 24]

$$J_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} \sum_{i=1}^{3} (u_{\alpha i} - u_{\beta i})^2 \, dS =$$

$$= \frac{1}{2\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \cdot (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \, dS, \tag{17}$$

де $\theta > 0$ – параметр штрафу, та розглянемо задачу мінімізації такого квадратичного функціонала у просторі V_0:

$$F_\theta(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} A(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - L(\mathbf{u}) + J_\theta(\mathbf{u}) \to \min_{\mathbf{u} \in V_0}. \tag{18}$$

Дослідимо властивості штрафного доданка (17). Функціонал (17) є невід'ємний і двічі диференційовний за Ґато:

$$J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \cdot (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) \, dS, \tag{19}$$

$$J''_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = J'_\theta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{\theta} \sum_{\{\alpha,\beta\} \in Q} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta) \cdot (\mathbf{w}_\alpha - \mathbf{w}_\beta) \, dS. \tag{20}$$

Диференціали Ґато $J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ та $J''_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ лінійні відповідно за $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ та $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$. Крім цього, справджується таке твердження, доведення якого не наводимо.

Лема 2. *Нехай поверхні* $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha, \beta\} \in Q$, *є ліпшицевими. Тоді диференціали Ґато функціонала* (17) *задовольняють умови*

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{J'_\theta(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0,\ J''_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0\}, \tag{21}$$

$$(\exists D > 0)\ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) \quad \{|J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq D \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0},$$

$$|J''_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})| \leq D \|\mathbf{v}\|_{V_0} \|\mathbf{w}\|_{V_0}\}. \tag{22}$$

Ці властивості дали змогу довести наступні дві теореми.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови леми 1 і леми 2. Тоді задача* (18) *має єдиний розв'язок, а її розв'язання еквівалентне розв'язанню у просторі* V_0 *варіаційного рівняння*

$$F'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v}) - L(\mathbf{v}) = 0 \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \qquad \mathbf{u} \in V_0 . \tag{23}$$

Теорема 4. *Нехай виконуються умови леми 1 і леми 2. Крім цього, нехай* $\bar{\mathbf{u}}_\theta \in V_0$ *− розв'язок задачі* (18) (*варіаційного рівняння* (23)) *для* $\theta > 0$, *а* $\bar{\mathbf{u}} \in K$ *− розв'язок задачі* (15) (*варіаційного рівняння* (16)). *Тоді* $\bar{\mathbf{u}}_\theta$ *збігається сильно в просторі* V_0 *до* $\bar{\mathbf{u}}$ *при* $\theta \to 0$, *тобто* $\|\bar{\mathbf{u}}_\theta - \bar{\mathbf{u}}\|_{V_0} \underset{\theta\to 0}{\to} 0$.

Д о в е д е н н я теорем 3 і 4 здійснюються подібно до доведення відповідно теорем 2 і 3 у праці [18]. ♦

Таким чином, із застосуванням методу штрафу розв'язування варіаційного рівняння (16) у замкнутому підпросторі K гільбертового простору V_0 зведено до розв'язування у вихідному просторі V_0 варіаційного рівняння (23), яке залежить від параметра штрафу θ. Далі розглянемо деякі ітераційні методи для розв'язування таких варіаційних рівнянь.

4. Ітераційні методи для варіаційних рівнянь [12]. У рефлексивному банаховому просторі V розглянемо абстрактне нелінійне варіаційне рівняння

$$\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = Y(\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in V, \qquad \mathbf{u} \in V , \tag{24}$$

де $\Phi : V \times V \to \mathbb{R}$ − деякий функціонал, лінійний за $\mathbf{v}$, але нелінійний за $\mathbf{u}$, а $Y : V \to \mathbb{R}$ − неперервна лінійна форма.

Для наближеного розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (24) застосуємо такий стаціонарний ітераційний метод [6, 12, 13, 17, 18, 24]:

$$G(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma[\Phi(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - Y(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad k = 0,1,\dots, \tag{25}$$

де $G(\mathbf{u},\mathbf{v})$ − деяка білінійна форма, задана у V, $\gamma \in \mathbb{R}$ − ітераційний параметр, $\mathbf{u}^k \in V$, $k = 1,2,\dots,$ − k-те наближення до точного розв'язку рівняння (24), а $\mathbf{u}^0 \in V$ − початкове наближення.

Теорема 5. *Нехай виконуються умови*

$$(\forall \mathbf{u} \in V)\ (\exists R_\Phi > 0)\ (\forall \mathbf{v} \in V)\ \{|\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le R_\Phi \|\mathbf{v}\|_V\} , \tag{26}$$

$$(\exists D_\Phi > 0)\ (\forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V)\ \{|\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{w},\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le D_\Phi \|\mathbf{v}\|_V \|\mathbf{w}\|_V\} , \tag{27}$$

$$(\exists B_\Phi > 0)\ (\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V)\ \{\Phi(\mathbf{u}+\mathbf{v},\mathbf{v}) - \Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \ge B_\Phi \|\mathbf{v}\|_V^2\} . \tag{28}$$

Тоді існує єдиний розв'язок $\bar{\mathbf{u}} \in V$ *нелінійного варіаційного рівняння* (24). *Окрім цього, нехай білінійна форма* G *є симетричною:*

$$(\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V)\ \{G(\mathbf{u},\mathbf{v}) = G(\mathbf{v},\mathbf{u})\} ,$$

а також коерцитивною та неперервною:

$$(\exists B_G > 0)\ (\forall \mathbf{u} \in V)\ \{G(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge B_G \|\mathbf{u}\|_V^2\} , \tag{29}$$

$$(\exists M_G > 0)\ (\forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V)\ \{|G(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le M_G \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V\} , \tag{30}$$

і параметр γ *належить інтервалу* $(0, 2\gamma^*)$, *де* $\gamma^* = B_\Phi B_G / D_\Phi^2$. *Тоді для будь-якого* $\mathbf{u}^k \in V$ *задача, що розв'язується на* k*-му кроці,* $k \in \mathbb{N}_0 = \{0,1,\dots\}$, *методу* (25), *має єдиний розв'язок* $\mathbf{u}^{k+1} \in V$, *а послідовність* $\{\mathbf{u}^k\}$, *отримана цим методом, збігається сильно у* V *до розв'язку* $\bar{\mathbf{u}}$ *задачі* (24), *тобто* $\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\|_V \underset{k\to\infty}{\to} 0$. *При цьому справджується оцінка*

$$\left\|\mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G \le q\left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_G, \qquad q = \sqrt{1 - \gamma(2B_\Phi - \gamma D_\Phi^2/B_G)/M_G} < 1, \quad (31)$$

де $\|\cdot\|_G = \sqrt{G(\cdot,\cdot)}$, *а найвища швидкість збіжності в нормі* $\|\cdot\|_G$ *досягається для* $\gamma = \gamma^*$.

Д о в е д е н н я цієї теореми здійснюється подібно до доведення теореми 4 у праці [18] або теореми 3 у роботі [6]. ♦

Для розв'язування варіаційного рівняння (24) також запропоновано нестаціонарний ітераційний метод [12, 13, 18, 23, 24], де білінійна форма G і параметр γ змінюються на кожній ітерації:

$$G^k(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G^k(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma^k[\Phi(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - Y(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in V, \quad k = 0, 1, \ldots. \quad (32)$$

Встановлено умови збіжності цього методу.

Теорема 6. *Нехай нелінійний функціонал* Φ *має властивості* (26)–(28)*, а білінійні форми* G^k, $k = 0, 1, \ldots$, *є симетричними, коерцитивними з константою* $B_G^* \in (0, \infty)$ *і неперервними з константою* $M_G^* \in (0, \infty)$. *Крім цього, нехай виконуються умови*

$$(\exists k_0 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \ge k_0)\ (\forall \mathbf{u} \in V)\ \{G^k(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \ge G^{k+1}(\mathbf{u}, \mathbf{u})\}, \quad (33)$$

$$\left(\exists\, \varepsilon \in (0, \gamma^*),\ \gamma^* = \frac{B_\Phi B_G^*}{D_\Phi^2}\right)\ (\exists k_1 \in \mathbb{N}_0)\ (\forall k \ge k_1) \quad \{\gamma^k \in [\varepsilon, 2\gamma^* - \varepsilon]\}. \quad (34)$$

Тоді $\left\|\mathbf{u}^k - \bar{\mathbf{u}}\right\|_V \underset{k\to\infty}{\to} 0$, *де* $\{\mathbf{u}^k\}$ *– послідовність, отримана методом* (32)*, а* $\bar{\mathbf{u}} \in V$ *– єдиний розв'язок задачі* (24).

Д о в е д е н н я цього твердження подібне до доведення теореми 3.3 у роботі [13]. ♦

5. Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу. Тепер застосуємо описані вище ітераційні методи до розв'язування варіаційного рівняння (23) зі штрафом задачі про ідеальний контакт пружних тіл. Це варіаційне рівняння можемо записати у вигляді (24), де

$$\Phi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \quad Y(\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V, \quad V = V_0. \quad (35)$$

При цьому ітераційний метод (25) запишеться так:

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - \gamma[A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})] \ \forall\, \mathbf{v} \in V, \ k = 0, 1, \ldots. \quad (36)$$

Однак у загальному випадку ітераційні методи (25) і (32), застосовані до розв'язування варіаційного рівняння (23), не приводять до декомпозиції задачі по підобластях Ω_α. Тому запропонуємо такі варіанти цих методів, які на кожному кроці ітераційного процесу реалізують декомпозицію по підобластях, тобто зводять розв'язування нелінійного варіаційного рівняння (23) у всій області Ω до розв'язування послідовності лінійних варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α. Декомпозиції по підобластях можна досягти завдяки певному вибору білінійних форм G та G^k у методах (25) та (32).

Виберемо білінійну форму G у методі (25) таким чином [12, 13, 17, 18, 24]:

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \qquad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0, \quad (37)$$

де $X : V_0 \times V_0 \to \mathbb{R}$ – білінійна форма, яка визначається так [13, 24]:

$$X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}^1} \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha\, dS = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha\, dS,$$

$$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0. \quad (38)$$

Тут $S^1_{\alpha\beta} \subseteq S_{\alpha\beta}$ – деякі задані підмножини ділянок ідеального контакту $S_{\alpha\beta}$, а $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S^1_{\alpha\beta}\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S^1_{\alpha\beta}\}$ – функції, які визначають ці підмножини.

Лема 3 [13]. *Нехай поверхні* $S_{\alpha\beta}$, $\{\alpha,\beta\} \in Q$, *є ліпшицевими. Тоді білінійна форма* X *є симетричною, невід'ємною і неперервною*:

$$(\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{X(\mathbf{u},\mathbf{v}) = X(\mathbf{v},\mathbf{u})\}, \tag{39}$$

$$(\forall \mathbf{u} \in V_0) \qquad \{X(\mathbf{u},\mathbf{u}) \ge 0\}, \tag{40}$$

$$(\exists M_X > 0)\ (\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{|X(\mathbf{u},\mathbf{v})| \le M_X \|\mathbf{u}\|_{V_0} \|\mathbf{v}\|_{V_0}\}. \tag{41}$$

Д о в е д е н н я цієї леми здійснюється подібно до доведення леми 4 у праці [18]. ♦

Ітераційний метод (25) із білінійною формою (37) перепишемо так:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}) + X(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \tag{42}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}^k, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{43}$$

Із теореми 5 отримуємо твердження про збіжність методу (42), (43).

Теорема 7. *Нехай виконуються умови леми 1, леми 2 і леми 3. Тоді, якщо параметр* γ *вибрано з інтервалу* $(0, 2\gamma^*)$, *де* $\gamma^* = B_\Phi B_G / D_\Phi^2$, $B_G = B_A$, $B_\Phi = B_A$, $D_\Phi = M_A + D$, *то послідовність* $\{\mathbf{u}^k\}$, *отримана методом* (42), (43), *збігається сильно у просторі* V_0 *до точного розв'язку* $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$ *варіаційного рівняння* (23).

Д о в е д е н н я. З неперервності (13) білінійної форми $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ і властивості (22) випливає, що функціонал $\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J'_\theta(\mathbf{u},\mathbf{v})$ є неперервним за $\mathbf{v}$, тобто виконується умова (26), де $R_\Phi = R_\Phi(\mathbf{u}) = M_A\|\mathbf{u}\|_V + D\|\mathbf{u}\|_V$, $V = V_0$. З властивостей (12) і (21) випливає, що $\Phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$ задовольняє умову (28), де $B_\Phi = B_A$, а з властивостей (13) і (22) отримаємо виконання умови (27), де $D_\Phi = M_A + D$. Крім цього, з неперервності білінійних форм $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ та $X(\mathbf{u},\mathbf{v})$ отримаємо, що білінійна форма (37) є неперервною (30) з константою $M_G = M_A + M_X$, а з умов (12) і (40) одержимо, що вона є коерцитивною з константою $B_G = B_A$. Симетрія білінійної форми (37) випливає із симетрії білінійних форм $A(\mathbf{u},\mathbf{v})$ та $X(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Отже, виконуються всі умови теореми 5. Тому при $\gamma \in (0, 2\gamma^*)$ метод (42), (43) збігається сильно в просторі V_0 до точного розв'язку $\bar{\mathbf{u}} \in V_0$ варіаційного рівняння (23) з лінійною швидкістю збіжності в нормі $\|\cdot\|_G$. Теорему доведено. ♦

Покажемо, що ітераційний метод (42), (43) приводить до декомпозиції задачі по підобластях. Для цього запишемо цей метод у розширеному вигляді:

$$\sum_{\alpha=1}^N a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta\in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}\cdot\mathbf{v}_\alpha\, dS = \sum_{\alpha=1}^N \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta\in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\alpha^k\cdot\mathbf{v}_\alpha\, dS +$$

$$+ \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^N \sum_{\beta\in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k)\cdot\mathbf{v}_\alpha\, dS \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \tag{44}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\dots,N, \qquad k = 0,1,\dots. \tag{45}$$

Оскільки спільні величини для підобластей відомі з попередньої ітерації, то варіаційне рівняння (44) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь у підобластях Ω_α, і метод (44), (45) еквівалентний ітераційному процесу [13]

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS =$$

$$= \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha^k \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k) \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \tag{46}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\dots,N, \qquad k = 0,1,\dots. \tag{47}$$

На кожній k-й ітерації методу (46), (47) потрібно паралельно розв'язувати N варіаційних задач (46) в окремих тілах Ω_α, які відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна (Пуанкаре) на поверхнях $S_{\alpha\beta}$:

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha\beta}^{k+1} + \frac{\psi_{\alpha\beta}}{\theta} \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} = \frac{1}{\theta}(\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k) + \frac{\psi_{\alpha\beta}}{\theta} \mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \tag{48}$$

де $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha\beta}^{k+1}$ – невідомі напруження на $S_{\alpha\beta}$. Тому ітераційний метод (46), (47) належить до ***паралельних схем Робіна декомпозиції області*** [12, 13, 17, 18, 23, 24].

Вибираючи у білінійній формі (38) різні характеристичні функції $\psi_{\alpha\beta} = \psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x})$, $\beta \in I_\alpha$, $\alpha = 1,2,\dots,N$, тобто різні підмножини $S_{\alpha\beta}^1 \subseteq S_{\alpha\beta}$, отримаємо різні варіанти методу декомпозиції області (46), (47). Так, покладаючи $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv 0$, тобто $S_{\alpha\beta}^1 = \varnothing \;\; \forall \alpha,\beta$, отримаємо ***паралельну схему Неймана*** [13], яка полягає у паралельному розв'язуванні задач із заданими зусиллями $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_{\alpha\beta}^{k+1} = \mathbf{p}_{\alpha\beta}^k = (\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k)/\theta$ на $S_{\alpha\beta}$ на кожному k-му кроці. Інший граничний випадок відповідає $\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) \equiv 1$, тобто $S_{\alpha\beta}^1 = S_{\alpha\beta} \;\; \forall \alpha,\beta$. Тоді одержимо таку ітераційну схему [13]:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} - \mathbf{u}_\beta^k) \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \tag{49}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\dots,N, \qquad k = 0,1,\dots. \tag{50}$$

На кожному k-му кроці цієї схеми необхідно паралельно розв'язувати N варіаційних задач (49), що відповідають задачам теорії пружності із заданими через штраф переміщеннями $\mathbf{u}_\beta^k$ на поверхнях $S_{\alpha\beta}$. Тому ітераційний метод (49), (50) можемо умовно віднести до ***паралельних схем Діріхле*** декомпозиції області.

Окрім цього, функції $\psi_{\alpha\beta}$ можна вибирати по-різному на кожній k-й ітерації, тобто

$$\psi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}) = \psi_{\alpha\beta}^k(\mathbf{x}) = \{0, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta} \setminus S_{\alpha\beta}^k\} \vee \{1, \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}^k\}, \qquad \beta \in I_\alpha,$$

$$\alpha = 1,2,\dots,N, \tag{51}$$

де $S_{\alpha\beta}^k \subseteq S_{\alpha\beta}$ – деякі задані підмножини ділянок ідеального контакту. Тоді отримаємо нестаціонарні схеми декомпозиції області [13, 24], еквівалентні нестаціонарному ітераційному методу (32) для розв'язування рівняння (23) з параметрами $\gamma^k = \gamma$, $k = 0,1,\ldots$, і білінійними формами

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}), \qquad \mathbf{u},\mathbf{v} \in V_0, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{52}$$

$$X^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}^k}\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS = \frac{1}{\theta}\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}^k\mathbf{u}_\alpha\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS\,,$$
$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0. \tag{53}$$

Зазначимо, що білінійні форми G^k у методі (32) можна вибрати і по-іншому, однак не кожен такий вибір приводить до декомпозиції. Наприклад, виберемо білінійні форми G^k таким чином:

$$G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = F_\theta''(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J_\theta''(\mathbf{u}^k,\mathbf{u},\mathbf{v}) = A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + J_\theta'(\mathbf{u},\mathbf{v})\,,$$
$$\mathbf{u},\mathbf{v}\in V_0. \tag{54}$$

Тоді ітераційний метод (32) з білінійними формами (54) при $\gamma^k = 1$, $k=0,1,\ldots$, відповідає неявному методу Ньютона для розв'язування варіаційного рівняння (23). Проте нестаціонарний ітераційний метод (32), (54) не приводить до декомпозиції по підобластях задачі, яка розв'язується на кожній ітерації k.

6. Схеми декомпозиції області з нестаціонарними ітераційними параметрами. Тепер розглянемо побудову схем декомпозиції області для розв'язування варіаційного рівняння (23) з нестаціонарними ітераційними параметрами γ^k, $k = 0,1,\ldots$, і запропонуємо деякі методи вибору цих параметрів.

Застосуємо до розв'язування варіаційного рівняння (23) зі штрафом ітераційний метод (32) з нестаціонарними ітераційними параметрами γ^k, однак зі стаціонарними білінійними формами $G^k(\mathbf{u},\mathbf{v}) = G(\mathbf{u},\mathbf{v})$. Цей метод набуде вигляду

$$G(\mathbf{u}^{k+1},\mathbf{v}) = G(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - \gamma^k[A(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) + J_\theta'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - L(\mathbf{v})] \qquad \forall\,\mathbf{v}\in V_0\,,$$
$$k = 0,1,\ldots. \tag{55}$$

Білінійну форму G у методі (55) виберемо у вигляді (37). Тоді ітераційний метод (55) буде еквівалентний ітераційному процесу

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}) + X(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1},\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) - J_\theta'(\mathbf{u}^k,\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in V_0\,, \tag{56}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1-\gamma^k)\mathbf{u}^k, \qquad k = 0,1,\ldots, \tag{57}$$

який, у свою чергу, еквівалентний такому методу декомпозиції області:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1},\mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) +$$
$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}\psi_{\alpha\beta}\mathbf{u}_\alpha^k\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS +$$
$$+\frac{1}{\theta}\sum_{\beta\in I_\alpha}\int_{S_{\alpha\beta}}(\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k)\cdot\mathbf{v}_\alpha\,dS \qquad \forall\mathbf{v}_\alpha\in V_\alpha^0\,, \tag{58}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \gamma^k\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} + (1-\gamma^k)\mathbf{u}_\alpha^k, \qquad \alpha = 1,2,\ldots,N, \qquad k = 0,1,\ldots. \tag{59}$$

На кожному кроці методу (56), (57) необхідно розв'язувати задачу

$$A(\mathbf{u},\mathbf{v}) + X(\mathbf{u},\mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{z},\mathbf{v}) - J_\theta'(\mathbf{z},\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in V_0, \quad \mathbf{u}\in V_0\,, \tag{60}$$

при $\mathbf{z} = \mathbf{u}^k$.

Припустимо, що виконуються умови леми 1, леми 2 та леми 3. Тоді для будь-якого $\mathbf{z} \in V_0$ існує єдиний розв'язок задачі (60):

$$(\forall \mathbf{z} \in V_0)\ (\exists!\, \mathbf{u} = \mathbf{u}^* \in V_0)\ (\forall \mathbf{v} \in V_0) \qquad \{A(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^*, \mathbf{v}) \equiv$$
$$\equiv L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{z}, \mathbf{v})\}.$$

Звідси випливає, що існує оператор $\mathscr{R} : V_0 \to V_0$, який кожному $\mathbf{z} \in V_0$ ставить у відповідність розв'язок $\mathbf{u}^* \in V_0$ задачі (60).

Отже, ітераційний метод (56), (57), еквівалентний методу декомпозиції області (58), (59), можемо записати так:

$$\tilde{\mathbf{u}}^{k+1} = \mathscr{R}(\mathbf{u}^k), \qquad \mathbf{u}^{k+1} = \gamma^k \tilde{\mathbf{u}}^{k+1} + (1 - \gamma^k)\mathbf{u}^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

або

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \gamma^k (\mathbf{u}^k - \mathscr{R}(\mathbf{u}^k)), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{61}$$

Уведемо ще один оператор $\tilde{\mathscr{R}} : V_0 \to V_0$, $\tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathscr{R}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V_0$. Тоді (61) перепишеться у вигляді

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \gamma^k \tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{u}^k), \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{62}$$

Зазначимо, що, коли $\bar{\mathbf{u}}^* \in V_0$ – точний розв'язок варіаційного рівняння (23), то $\tilde{\mathscr{R}}(\bar{\mathbf{u}}^*) = \bar{\mathbf{u}}^* - \mathscr{R}(\bar{\mathbf{u}}^*) \equiv 0$, тобто задача (23) еквівалентна розв'язанню операторного рівняння

$$\tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{u}) = 0, \qquad \mathbf{u} \in V_0, \tag{63}$$

а метод (62) можна інтерпретувати як деякий ітераційний метод для розв'язування цього рівняння. При цьому величину $\mathbf{w}^k = \tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{u}^k)$ будемо називати нев'язкою операторного рівняння (63) на k-му кроці.

Розглянемо питання вибору ітераційних параметрів γ^k у методі (62).

У праці [14] запропоновано декілька способів вибору ітераційних параметрів для ітераційних методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь: методи мінімальних нев'язок і мінімальних поправок, явний і неявний методи найшвидшого спуску. Здійснимо узагальнення цих методів для випадку ітераційного процесу (62) розв'язування операторного рівняння (63), яке еквівалентне розв'язуванню лінійного варіаційного рівняння (23).

Уведемо оператор $\mathscr{T} : V_0 \to V_0$, який кожному елементу $\mathbf{z} \in V_0$ ставить у відповідність точний розв'язок $\mathbf{u}_* \in V_0$ лінійного варіаційного рівняння

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + X(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = X(\mathbf{z}, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v} \in V_0, \qquad \mathbf{u} \in V_0, \tag{64}$$

а також оператор $\tilde{\mathscr{T}} : V_0 \to V_0$ такий, що $\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}) = \mathbf{z} - \mathscr{T}(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in V_0$. На відміну від $\tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{z})$, оператор $\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z})$ є лінійним за $\mathbf{z}$.

Зазначимо, що подібно до рівняння (60), варіаційне рівняння (64) зводиться до паралельного розв'язування варіаційних рівнянь в окремих тілах Ω_α:

$$a_\alpha(\mathbf{u}_\alpha, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS = \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \mathbf{z}_\alpha \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS +$$
$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{z}_\beta - \mathbf{z}_\alpha) \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS \quad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \quad \mathbf{u}_\alpha \in V_\alpha^0. \tag{65}$$

Із виразу (62) легко отримати таке співвідношення для нев'язок $\mathbf{w}^k = \tilde{\mathscr{R}}(\mathbf{u}^k)$:

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k - \gamma^k \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k). \tag{66}$$

Параметр γ^k виберемо з умови мінімуму норми $\left\|\mathbf{w}^{k+1}\right\|_{V_0}$ нев'язки. Для цього, домноживши скалярно співвідношення (66) само на себе, одержимо

$$\left\|\mathbf{w}^{k+1}\right\|_{V_0}^2 = \left\|\mathbf{w}^k\right\|_{V_0}^2 - 2\gamma^k(\mathbf{w}^k, \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k))_{V_0} + [\gamma^k]^2 \left\|\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k)\right\|_{V_0}^2 .$$

Звідси випливає, що норма $\left\|\mathbf{w}^{k+1}\right\|_{V_0}$ набуде мінімуму, якщо параметр γ^k вибрати таким чином:

$$\gamma^k = \gamma_{N_1}^k = \frac{(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k)_{V_0}}{\left\|\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k)\right\|_{V_0}^2} = \frac{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)_{V_0}}{\left\|\mathbf{v}^k\right\|_{V_0}^2} . \tag{67}$$

Тут $\mathbf{v}^k$ визначається так:

$$\mathbf{v}^k = \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k) = \mathbf{w}^k - \mathscr{T}(\mathbf{w}^k) = \mathbf{w}^k - \tilde{\mathbf{w}}^{k+1},$$

де $\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} \in V_0$ – розв'язок задачі (64) при $\mathbf{z} = \mathbf{w}^k$.

Такий спосіб вибору ітераційного параметра γ^k у методі (62), що еквівалентний ітераційному методу (56), (57) і методу декомпозиції області (58), (59), назвемо ***методом мінімальних нев'язок.***

Параметр γ^k можна вибрати з умови мінімуму іншої норми нев'язки $\mathbf{w}^{k+1}$, яка еквівалентна нормі $\|\cdot\|_{V_0}$.

Якщо ітераційний параметр γ^k вибрати з умови мінімуму енергетичної норми нев'язки $\left\|\mathbf{w}^{k+1}\right\|_G = \sqrt{G(\mathbf{w}^{k+1}, \mathbf{w}^{k+1})}$, то він набуде вигляду

$$\gamma^k = \gamma_{N_2}^k = \frac{(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k)_G}{\left\|\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k)\right\|_G^2} = \frac{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)_G}{\left\|\mathbf{v}^k\right\|_G^2} . \tag{68}$$

Цей спосіб вибору ітераційного параметра назвемо ***методом мінімальних поправок.***

Тепер розглянемо величину $\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{u}^{k+1} - \bar{\mathbf{u}}^*$, де $\bar{\mathbf{u}}^* \in V_0$ – точний розв'язок операторного рівняння (63), тобто варіаційного рівняння (23). Ця величина дорівнює похибці ітераційного методу (62) на k-й ітерації. Неважко показати, що похибка $\mathbf{z}^k$ задовольняє подібне співвідношення, що й нев'язка $\mathbf{w}^k$:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k - \gamma^k \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k) . \tag{69}$$

У методах типу найшвидшого спуску параметр γ^k вибирають з умови мінімуму функціонала $\left\|\mathbf{z}^{k+1}\right\|_*$, де $\|\cdot\|_*$ – деяка норма, еквівалентна нормі $\|\cdot\|_{V_0}$. Виберемо γ^k з умови мінімуму норми $\left\|\mathbf{z}^{k+1}\right\|_{\tilde{\mathscr{T}}} = \sqrt{(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})_{\tilde{\mathscr{T}}}} = \sqrt{(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^{k+1}), \mathbf{z}^{k+1})_{V_0}}$. Домножимо вираз (69) скалярно сам на себе, застосовуючи скалярний добуток $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\tilde{\mathscr{T}}} = (\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{u}), \mathbf{v})_{V_0}$:

$$\left\|\mathbf{z}^{k+1}\right\|_{\tilde{\mathscr{T}}}^2 = \left\|\mathbf{z}^k\right\|_{\tilde{\mathscr{T}}}^2 - 2\gamma^k(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k), \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k))_{V_0} + [\gamma^k]^2(\tilde{\mathscr{T}}(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k)), \tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k))_{V_0} .$$

Враховуючи співвідношення $\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{w}^k$, отримаємо, що $\left\|\mathbf{z}^{k+1}\right\|_{\tilde{\mathscr{T}}}$ досягає мінімуму, якщо параметр γ^k задати у вигляді

$$\gamma^k = \gamma^k_{S_1} = \frac{(\mathbf{w}^k, \mathbf{w}^k)_{V_0}}{(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k)_{V_0}} = \frac{(\mathbf{w}^k, \mathbf{w}^k)_{V_0}}{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)_{V_0}}. \tag{70}$$

Ітераційний метод (62), у якому параметр γ^k обчислюється за формулою (70), назвемо ***явним методом найшвидшого спуску.***

Далі, вибравши параметр γ^k з умови мінімуму норми

$$\|\mathbf{z}^{k+1}\|_{\tilde{A}} = \sqrt{(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})_{\tilde{A}}} = \sqrt{\tilde{A}(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})} = \\ = \sqrt{A(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1}) + J'_\theta(\mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{z}^{k+1})},$$

одержимо

$$\gamma^k = \gamma^k_{S_2} = \frac{\|\mathbf{w}^k\|^2_G}{(\tilde{\mathscr{T}}(\mathbf{w}^k), \mathbf{w}^k)_G} = \frac{\|\mathbf{w}^k\|^2_G}{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)_G}. \tag{71}$$

Такий спосіб вибору ітераційного параметра назвемо ***неявним методом найшвидшого спуску.***

Тепер наведемо детальніше ***алгоритм схем декомпозиції області*** з вибором ітераційних параметрів за формулами (67), (68), (70) та (71).

На кроці $k \in \{0, 1, \dots\}$ для заданих наближень $\mathbf{u}^k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, знаходимо розв'язки $\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$, задач (58) в окремих підобластях Ω_α. Обчислюємо нев'язки $\mathbf{w}^k_\alpha = \mathbf{u}^k_\alpha - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Далі розв'язуємо додаткові задачі (65) у підобластях при $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{w}^k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Знайшовши їхні розв'язки $\tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_\alpha$, обчислюємо величини $\mathbf{v}^k_\alpha = \mathbf{w}^k_\alpha - \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$. Залежно від вибраного методу параметр γ^k обчислюємо за однією із формул (67), (68), (70) або (71). Наступні наближення визначаємо так: $\mathbf{u}^{k+1}_\alpha = \mathbf{u}^k_\alpha - \gamma^k \mathbf{w}^k_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$.

Зазначимо, що, на відміну від стаціонарних методів декомпозиції області (46), (47), у нестаціонарних методах декомпозиції області з вибором ітераційних параметрів за формулами (67), (68), (70) і (71), окрім задач (58), необхідно паралельно розв'язувати у підобластях додаткові задачі (65) для обчислення цих параметрів.

7. Схеми декомпозиції області на основі методу спряжених ґрадієнтів. Застосуємо до розв'язування лінійного варіаційного рівняння (23) зі штрафом такий двокроковий ітераційний метод:

$$G(\mathbf{u}^{k+1}, \mathbf{v}) = \omega^k G(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + (1 - \omega^k) G(\mathbf{u}^{k-1}, \mathbf{v}) - \gamma^k \omega^k [A(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) + \\ + J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - L(\mathbf{v})] \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \quad k = 0, 1, \dots, \tag{72}$$

де G – деяка задана білінійна форма, γ^k, ω^k – ітераційні параметри, а $\mathbf{u}^{-1}$, $\mathbf{u}^0 \in V_0$ – початкові наближення. Якщо $\omega^k = 1$, $\forall k \in \{0, 1, \dots\}$, то ітераційний метод (72) співпадає з однокроковим ітераційним методом (55).

Білінійну форму G у методі (72) виберемо за формулою (37). Тоді цей ітераційний метод можемо записати у наступному еквівалентному вигляді:

$$A(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) + X(\tilde{\mathbf{u}}^{k+1}, \mathbf{v}) = L(\mathbf{v}) + X(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) - J'_\theta(\mathbf{u}^k, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V_0, \tag{73}$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \omega^k \mathbf{u}^k + (1 - \omega^k) \mathbf{u}^{k-1} - \gamma^k \omega^k (\mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}), \qquad k = 0, 1, \dots. \tag{74}$$

Аналогічно, як і в однокрокових методах, варіаційне рівняння (73) розпадається на N незалежних варіаційних рівнянь в окремих підобластях Ω_α. У результаті отримуємо, що ітераційний метод (73), (74) еквівалентний наступному методу декомпозиції області:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) + \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} \psi_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\alpha^k \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS +$$

$$+ \frac{1}{\theta} \sum_{\beta \in I_\alpha} \int_{S_{\alpha\beta}} (\mathbf{u}_\beta^k - \mathbf{u}_\alpha^k) \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \tag{75}$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{k+1} = \omega^k \mathbf{u}_\alpha^k + (1 - \omega^k) \mathbf{u}_\alpha^{k-1} - \gamma^k \omega^k (\mathbf{u}_\alpha^k - \tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}),$$
$$\alpha = 1, 2, \ldots, N, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{76}$$

У праці [14] розглянуто метод спряжених ґрадієнтів вибору ітераційних параметрів для двокрокових ітераційних методів розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Провівши узагальнення цього методу на випадок ітераційного процесу (72) для розв'язування лінійних варіаційних рівнянь вигляду (23), отримаємо такі формули для знаходження ітераційних параметрів γ^k і ω^k:

$$\gamma^k = \gamma_C^k = \frac{\left\| \mathbf{w}^k \right\|_*^2}{(\mathbf{v}^k, \mathbf{w}^k)_*}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \tag{77}$$

$$\omega^0 = \omega_C^0 = 1, \quad \omega^k = \omega_C^k = \left\{ 1 - \frac{\gamma^k}{\gamma^{k-1} \omega^{k-1}} \frac{\left\| \mathbf{w}^k \right\|_*^2}{(\mathbf{v}^{k-1}, \mathbf{w}^{k-1})_*} \right\}^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{78}$$

Тут $\mathbf{w}^k = \mathbf{u}^k - \tilde{\mathbf{u}}^{k+1}$ – нев'язка, $\mathbf{v}^k = \mathbf{w}^k - \tilde{\mathbf{w}}^{k+1}$, де $\tilde{\mathbf{w}}^{k+1} = (\tilde{\mathbf{w}}_1^{k+1}, \tilde{\mathbf{w}}_2^{k+1}, \ldots, \tilde{\mathbf{w}}_N^{k+1})^\top$ – вектор розв'язків $\tilde{\mathbf{w}}_\alpha^{k+1} \in V_\alpha^0$ задач (65) при $\mathbf{z}_\alpha = \mathbf{w}_\alpha^k$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$, а $\|\mathbf{u}\|_* = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})_*}$ – деяка норма у просторі V_0, породжена скалярним добутком $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_*$ у ньому, еквівалентна нормі $\|\mathbf{u}\|_{V_0}$.

Скалярний добуток у формулах (77) та (78) вибирали у вигляді $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_* = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0}$ або $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_* = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_G = G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Спосіб вибору ітераційних параметрів за формулами (77), (78) у методі (73), (74), що еквівалентний методу декомпозиції області (75), (76), назвемо ***явним методом спряжених ґрадієнтів*** у випадку скалярного добутку $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_* = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{V_0}$, а у випадку скалярного добутку $(\mathbf{u}, \mathbf{v})_* = (\mathbf{u}, \mathbf{v})_G$ – ***неявним методом спряжених ґрадієнтів***.

8. Схеми декомпозиції області без штрафу. Покажемо зв'язок між схемами декомпозиції області (46), (47), що запропоновані вище на основі методу штрафу, та методами декомпозиції області без штрафу, що розглядалися у роботах [3–5, 19, 20].

Розглянемо паралельну схему Неймана зі штрафом для випадку ідеального контакту двох тіл ($N = 2$). Запишемо її у вигляді

$$\mathbf{p}_{12}^k = \frac{1}{\theta}(\mathbf{u}_2^k - \mathbf{u}_1^k), \qquad \mathbf{p}_{21}^k = -\mathbf{p}_{12}^k, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}, \tag{79}$$

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) = \ell_1(\mathbf{v}_1) + \int_{S_{12}} \mathbf{p}_{12}^k \cdot \mathbf{v}_1 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1^0,$$

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) = \ell_2(\mathbf{v}_2) + \int_{S_{12}} \mathbf{p}_{21}^k \cdot \mathbf{v}_2 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2^0, \tag{80}$$

$$\mathbf{u}_1^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}_1^k, \qquad \mathbf{u}_2^{k+1} = \gamma \tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1} + (1 - \gamma) \mathbf{u}_2^k, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{81}$$

Віднімемо від другого зі співвідношень у формулі (81) перше та результат поділимо на параметр штрафу $\theta > 0$. Тоді, враховуючи (79), схему Неймана (79)–(81) перепишемо так:

$$\mathbf{p}_{12}^{0} = \frac{1}{\theta}(\mathbf{u}_2^0 - \mathbf{u}_1^0), \qquad \mathbf{p}_{21}^{0} = -\mathbf{p}_{12}^{0}, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}, \tag{82}$$

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) = \ell_1(\mathbf{v}_1) + \int\limits_{S_{12}} \mathbf{p}_{12}^{k} \cdot \mathbf{v}_1 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1^0,$$

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) = \ell_2(\mathbf{v}_2) + \int\limits_{S_{12}} \mathbf{p}_{21}^{k} \cdot \mathbf{v}_2 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2^0, \tag{83}$$

$$\mathbf{p}_{12}^{k+1} = (1-\gamma)\mathbf{p}_{12}^{k} - \frac{\gamma}{\theta}(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}),$$

$$\mathbf{p}_{21}^{k+1} = -\mathbf{p}_{12}^{k+1}, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{84}$$

Ітераційний параметр у методі (82)–(84) виберемо у вигляді $\gamma = \omega\theta$, де $\omega > 0$ – деякий заданий додатний параметр. Тоді (84) набуде вигляду

$$\mathbf{p}_{12}^{k+1} = (1-\omega\theta)\mathbf{p}_{12}^{k} - \omega(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}),$$

$$\mathbf{p}_{21}^{k+1} = -\mathbf{p}_{12}^{k+1}, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{85}$$

Спрямувавши $\theta \to 0$ у формулі (85), одержуємо ***паралельну схему Неймана декомпозиції області без штрафу*** для випадку ідеального контакту двох тіл [13]:

$$a_1(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1}, \mathbf{v}_1) = \ell_1(\mathbf{v}_1) + \int\limits_{S_{12}} \mathbf{p}_{12}^{k} \cdot \mathbf{v}_1 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_1 \in V_1^0,$$

$$a_2(\tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}, \mathbf{v}_2) = \ell_2(\mathbf{v}_2) + \int\limits_{S_{12}} \mathbf{p}_{21}^{k} \cdot \mathbf{v}_2 \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2^0, \tag{86}$$

$$\mathbf{p}_{12}^{k+1} = \mathbf{p}_{12}^{k} - \omega(\tilde{\mathbf{u}}_1^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_2^{k+1}),$$

$$\mathbf{p}_{21}^{k+1} = -\mathbf{p}_{12}^{k+1}, \qquad \mathbf{x} \in S_{12}, \qquad k = 0, 1, \ldots. \tag{87}$$

На дискретному рівні схему Неймана (86), (87) без штрафу детально досліджено у працях [3–5] за участю автора. У роботі [3] вивчено питання про оптимальний вибір ітераційного параметра ω, запропоновано декілька способів його нестаціонарного вибору $\omega = \omega^k$, зокрема, із застосуванням методів мінімальних нев'язок і найшвидшого спуску, розглянуто числову ефективність для випадку задач про ідеальний контакт двох тіл, вивчено вплив зміни ітераційних параметрів та жорсткостей тіл на швидкість збіжності цієї схеми.

Провівши аналогічні перетворення, отримуємо паралельну схему Неймана без штрафу для випадку ідеального контакту довільної скінченної кількості пружних тіл $(N \ge 2)$. Ця схема має такий вигляд:

$$a_\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1}, \mathbf{v}_\alpha) = \ell_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \int\limits_{S_{\alpha\beta}} \mathbf{p}_{\alpha\beta}^{k} \cdot \mathbf{v}_\alpha \, dS \qquad \forall \mathbf{v}_\alpha \in V_\alpha^0, \tag{88}$$

$$\mathbf{p}_{\alpha\beta}^{k+1} = \mathbf{p}_{\alpha\beta}^{k} - \omega(\tilde{\mathbf{u}}_\alpha^{k+1} - \tilde{\mathbf{u}}_\beta^{k+1}), \quad \mathbf{x} \in S_{\alpha\beta}, \quad \beta \in I_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{89}$$

Висновки. Для розв'язування задач про ідеальний контакт багатьох пружних тіл на континуальному рівні запропоновано ряд паралельних схем декомпозиції області типу Робіна, що ґрунтуються на методі штрафу та ітераційних методах для варіаційних рівнянь. На кожному ітераційному кроці цих методів необхідно паралельно розв'язувати лінійні варіаційні рівняння в окремих тілах, що відповідають задачам теорії пружності з умовами Робіна (Пуанкаре) на спільних межах тіл.

Визначено умови існування і єдиності розв'язку варіаційного рівняння зі штрафом, що відповідає задачі ідеального контакту, а також збіжності за параметром штрафу. Доведено теореми про збіжність деяких схем декомпозиції області. Запропоновано декілька способів нестаціонарного вибору ітераційних параметрів схем МДО, зокрема із застосуванням методів мінімальних нев'язок і поправок, явного та неявного методів найшвидшого спуску. Побудовано двокрокові нестаціонарні ітераційні схеми декомпозиції області та запропоновано спосіб вибору ітераційних параметрів цих схем із застосуванням методу спряжених ґрадієнтів. Для випадку паралельної схеми Неймана декомпозиції області здійснено граничний перехід за параметром штрафу та отримано паралельну схему Неймана без штрафу.

1. *Агошков В. И.* Методы разделения области в задачах математической физики // Вычисл. процессы и системы / Под ред. Г. И. Марчука. – 1991. – Вып. 8. – С. 4–51.
2. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – Москва: Мир, 1979. – 574 с.
   Те саме: *Glowinski R., Lions J.-L., Trémolières R.* Analyse numérique des inéquations variationnelles. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1976. – In 2 v.: V. 1. – 268 p.; V. 2. – 290 p.
3. *Григоренко А. Я., Дыяк И. И., Прокопышин И. И.* Применение метода декомпозиции области с использованием гибридных аппроксимаций для решения задач теории упругости // Прикл. механика. – 2008. – **44**, № 11. – С. 18–29.
   Те саме: *Grigorenko A. Ya., Dyyak I. I., Prokopyshin I. I.* Domain decomposition method with hybrid approximations applied to solve problems of elasticity // Int. Appl. Mech. – 2008. – **44**, No. 11. – P. 1213–1222.
4. *Дияк І., Макар І., Прокопишин І.* Числова ефективність гібридних скінченно-граничноелементних апроксимацій задач теорії пружності на підставі методу декомпозиції області // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. Прикл. математика та інформатика. – 2007. – Вип. 12. – С. 93–100.
5. *Дияк І., Матисяк С., Прокопишин І.* Скінченно-граничноелементна схема методу декомпозиції області для плоских задач теорії пружності з несумісними розбиттями підобластей // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2008. – Вип. 7. – С. 40–51.
6. *Дияк І. І., Прокопишин І. І.* Збіжність паралельної схеми Неймана методу декомпозиції області для задач контакту без тертя декількох пружних тіл // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2009. – **52,** № 3. – С. 78–89.
   Те саме: *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I.* Convergence of the Neumann parallel scheme of the domain decomposition method for problems of frictionless contact between several elastic bodies // J. Math. Sci. – 2010. – **171**, No. 4. – P. 516–533.
7. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – Москва: Наука, 1980. – 383 с.
   Те саме: *Duvaut G., Lions J.-L.* Les inéquations en mécanique et en physique. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1972.
8. *Кацнельсон В. Э., Меньшиков В. В.* Об одном аналоге альтернирующего метода Шварца // Теория функций, функц. анализ и их приложения. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1973. – Вып. 17. – С. 206–215.
9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – Москва: Мир, 1972. – 588 с.
   Те саме: *Lions J.-L.* Quelques méthodes de résolution des problèms aux limites non linéares. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1969. – 554 p.
10. *Матеева Э. Й., Пальцев Б. В.* О разделении областей при решении краевых задач для уравнения Пуассона в областях сложной формы // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1973. – **13**, № 6. – С. 1441–1458.
11. *Непомнящих С. В.* Методы декомпозиции области и фиктивного пространства: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.07 «Вычисл. математика». – Новосибирск, 2008. – 29 с.
12. *Прокопишин І.* Методи декомпозиції області для задач про односторонній контакт нелінійно пружних тіл // Фіз.-мат. моделювання та інформ. технології. – 2012. – Вип. 15. – С. 75–87.
13. *Прокопишин І. І.* Схеми декомпозиції області на основі методу штрафу для задач контакту пружних тіл: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.05.02. – «Мат. моделювання та обчисл. методи». – Львів, 2010. – 163 с.

14. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы. – Москва: Наука, 1989. – 439 с.
15. *Сеа Ж.* Оптимизация. Теория и алгоритмы – Москва: Мир, 1973. – 244 с.
    Те саме: *Céa J.* Optimisation: Théorie et algorithmes. – Paris: Dunod Gauthier-Villars, 1971.
16. *Цвик Л. Б.* Обобщение алгоритма Шварца на случай областей, сопряженных без налегания // Докл. АН СССР. – 1975. – **224**, № 2. – С. 309–312.
17. *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I.* Domain decomposition schemes for frictionless multibody contact problems of elasticity // Numerical Mathematics and Advanced Applications 2009: Proc. ENUMATH 2009 (The 8th Eur. Conf. Numer. Math. Adv. Appl., Uppsala, July 2009). – Berlin–Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. – P. 297–305.
18. *Dyyak I. I., Prokopyshyn I. I., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition methods for unilateral multibody contact problems of elasticity: Convergence results // http://arxiv.org/pdf/1208.6478.pdf. – 2012. – 32 p.
19. *El-Gebeily M., Elleithy W. M., Al-Gahtani H. J.* Convergence of the domain decomposition finite element – boundary element coupling methods // Comp. Methods Appl. Mech. Eng. – 2002. – **191,** No. 43. – P. 4851–4867.
20. *Elleithy W. M., Tanaka M., Guzik A.* Interface relaxation FEM–BEM coupling method for elasto-plastic analysis // Eng. Anal. Bound. Elem. – 2004. – **28**, No. 7. – P. 849–857.
21. *Herrera I., Carrillo-Ledesma A., Rosas-Medina A.* A brief overview of non-overlapping domain decomposition methods // Geofís. Int. – 2011. – **50**, No. 4. – P. 445–463.
22. *Kikuchi N., Oden J. T.* Contact problem in elasticity: A study of variational inequalities and finite element methods. – Philadelphia: SIAM, 1988. – 489 p.
23. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Domain decomposition methods for problems of unilateral contact between elastic bodies with nonlinear Winkler covers // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2014. – **98**. – P. 739–748.
24. *Prokopyshyn I. I., Dyyak I. I., Martynyak R. M., Prokopyshyn I. A.* Penalty Robin–Robin domain decomposition schemes for contact problems of nonlinear elasticity // Lect. Notes Comput. Sci. Eng. – 2013. – **91**. – P. 647–654.
25. *Smith B. F., Bjørstad P. E., Gropp W. D.* Domain decomposition: Parallel multilevel methods for elliptic partial differential equations. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996. – 224 p.
26. *Toselli A., Widlund O.* Domain decomposition methods – Algorithms and theory. – Berlin: Springer-Verlag, 2005. – 450 p.

СХЕМЫ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ШТРАФА ДЛЯ ЗАДАЧ ОБ ИДЕАЛЬНОМ КОНТАКТЕ УПРУГИХ ТЕЛ

На основе метода штрафа предложен ряд континуальных параллельных схем декомпозиции области для решения задач об идеальном механическом контакте упругих тел. Доказаны теоремы о сходимости некоторых из этих схем. Исследована проблема оптимального выбора итерационных параметров. Установлена связь предложенных схем с методами декомпозиции области без штрафа.

DOMAIN DECOMPOSITION SCHEMES BASED ON PENALTY METHOD FOR PROBLEMS OF IDEAL CONTACT BETWEEN ELASTIC BODIES

Using the penalty method, a number of parallel domain decomposition schemes on continuous level are proposed to solve the problems of ideal mechanical contact between elastic bodies. The theorems on convergence of some of these schemes are proved. The problem of the optimal choice of iterative parameters is analyzed. The relationship between obtained schemes and domain decomposition methods without penalty is established.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.09.12