УДК 517.94

О. Д. Поліщук

ПРО ВИДІЛЕННЯ ОСОБЛИВОСТЕЙ ПРИ ЧИСЕЛЬНОМУ РОЗВ'ЯЗАННІ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ТЕОРІЇ ПОТЕНЦІАЛУ

Пропонуються методи виділення особливостей в ядрі та густині потенціалу слабосингулярних інтегральних рівнянь Фредгольма для потенціалу простого шару у випадку, коли гранична поверхня має краї, ребра та кутові точки, з використанням проекційних методів розв'язування цих рівнянь і скінченноелементній апроксимації шуканої густини потенціалу.

Вступ. Необхідність розв'язання граничних задач для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$ виникає під час моделювання багатьох фізичних процесів (дифузія, тепловий потік, електростатичне поле, течія ідеальної рідини, пружні рухи твердого тіла, течія грунтових вод тощо) [4, с. 38]. Застосування потенціалу простого шару приводить до необхідності розв'язання слабосингулярних інтегральних рівнянь Фредгольма першого та другого роду. Умови коректної розв'язності таких задач у диференціальній та еквівалентній їй інтегральній постановках у випадку замкнених і розімкнених граничних поверхонь наведені в працях [11, 12]. Отримані результати дозволяють використовувати для чисельного розв'язання таких інтегральних рівнянь проекційні методи (колокації, Бубнова – Гальоркіна, найменших квадратів, найменшої нев'язки тощо), уникаючи застосування ресурсовитратних регуляризаційних процедур. Однак при вирішенні багатьох прикладних проблем, зокрема моделюванні електростатичних полів, які генеруються електрофізичними пристроями складної форми, реалізація числових методів потребує врахування особливостей у ядрі та шуканій густині потенціалу при наближенні до краю, ребра чи кутової точки граничної поверхні, які нерідко зустрічаються в реальних пристроях, наприклад веж високовольтних ліній електропередач, радіолокаційних систем різних типів тощо. Поля, які генеруються такими пристроями, негативно впливають на людський організм і потребують якомога точнішого розрахунку для визначення зон безпеки. Вирішенню цієї проблеми були присвячені, зокрема, праці [1, 3, 5, 8–10], в яких пропонувалися аналітичні методи виділення особливості для конкретного типу поверхні. Застосування скінченноелементних апроксимацій шуканої густини потенціалу при реалізації проекційних методів числового розв'язання інтегральних рівнянь для потенціалу простого шару, еквівалентних граничним задачам для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$, відкриває додаткові можливості для виділення її особливостей і побудови нових універсальних алгоритмів обчислення відповідних інтегралів у коефіцієнтах матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), яка дискретизує відповідне інтегральне рівняння і суттєво підвищує точність його наближеного розв'язку.

Скінченноелементні апроксимації і функція особливості густини потенціалу. Нехай $\tilde{\Gamma}$ – ділянка граничної поверхні $\Gamma \in \mathbb{R}^3$ з прямокутною областю визначення параметрів $\tilde{S} \in \mathbb{R}^2$, в якій згенерована рівномірна прямокутна сітка $\tilde{S}_h$ з кроками h_τ, h_ν, $P = [\tau_0, \tau_1] \times [\nu_0, \nu_1]$ – деякий елемент $\tilde{S}_h$, $\tau_1 - \tau_0 = h_\tau$, $\nu_1 - \nu_0 = h_\nu$.

Зрозуміло, що виділяти особливість у густині потенціалу доцільно лише для елементів сітки, дотичних до країв, ребер чи кутових точок граничної поверхні. До того ж, побудова функції особливості для всієї області визначення параметрів нерідко є достатньо складною проблемою, наприклад, для поверхонь з криволінійними вирізами. Розглянемо елементи матриці системи колокаційних рівнянь, які залежно від типу заданих на $\tilde{\Gamma}$

ISSN 0130–9420. Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2014. – 57, № 1. – С. 26-34.

граничних умов формуються з інтегралів вигляду

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{\rho(\tau,\nu)L(\tau,\nu)J(\tau,\nu)}{|x(\tau,\nu)-\tilde{y}|}\,d\nu\,d\tau\,, \tag{1}$$

$$I_2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \rho(\tau,\nu)L(\tau,\nu)J(\tau,\nu)\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\tilde{y}}}\frac{1}{|x(\tau,\nu)-\tilde{y}|}\,d\nu\,d\tau\,, \tag{2}$$

де $\tilde{y}\in\tilde{\Gamma}$ − точка спостереження; $L(\tau,\nu)$ − базисна функція, визначена на P; $J(\tau,\nu)$ − якобіан перетворення системи координат; $\rho(\tau,\nu)$ − функція особливості густини, яку будуємо у вигляді

$$\rho(\tau,\nu) = \left(\frac{\tau_1-\tau_0}{\tau-\tau_0}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{\nu_1-\nu_0}{\nu-\nu_0}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{\tau_0-\tau_1}{\tau-\tau_1}\right)^{\alpha_3}\left(\frac{\nu_0-\nu_1}{\nu-\nu_1}\right)^{\alpha_4}.$$

Інтеграли вигляду I_1 зустрічаються в коефіцієнтах матриці СЛАР, які дискретизують інтегральне рівняння, еквівалентне задачі Діріхле, або систему інтегральних рівнянь, еквівалентну змішаній задачі, яка містить з-посеред інших умову Діріхле. Інтеграли вигляду I_2 зустрічаються у коефіцієнтах матриці СЛАР, які дискретизують інтегральне рівняння, еквівалентне задачі Неймана, задачі з скісною похідною чи умовою стрибка нормальної похідної шуканої функції або систему інтегральних рівнянь, еквівалентну змішаній задачі, яка містить з-посеред інших перераховані граничні умови.

Зазвичай $\operatorname{mes} P \ll \operatorname{mes}\tilde{S}$, тобто щонайбільше два з індексів α_i, $i = 1,\ldots,4$, можуть бути відмінними від нуля. Якщо P − внутрішній елемент сітки $\tilde{S}_h$ і точка спостереження не належить P, то підінтегральна функція в (1), (2) є гладкою. У цьому випадку для чисельного інтегрування застосовуємо квадратурну формулу Ґаусса з постійною вагою різного степеня точності [7, с. 199].

Виділення особливості в ядрі та густині потенціалу простого шару. Для спрощення викладу вважатимемо, що $\tilde{\Gamma}=[0,1]\times[0,1]$ − одиничний квадрат, який лежить у площині xOy. Параметричне зображення такої ділянки має вигляд

$$x_1 = \tau, \qquad 0\le\tau\le 1\,,$$

$$x_2 = \nu, \qquad 0\le\nu\le 1\,,$$

$$x_3 = 0\,,$$

та якобіан переходу $J(\tau,\nu)=1$.

Якщо P − пригараничний елемент сітки, наприклад $\tau_0=\nu_0=0$, і точка спостереження не належить P, то інтеграл I_1 набуває вигляду

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{\rho(\tau,\nu)L(\tau,\nu)J(\tau,\nu)}{|x(\tau,\nu)-\tilde{y}|}\,d\nu\,d\tau =$$

$$= h_\tau^{\alpha_1}h_\nu^{\alpha_2}\int_0^{h_\tau}\tau^{-\alpha_1}\int_0^{h_\nu}\nu^{-\alpha_2}\frac{L(\tau,\nu)}{|x(\tau,\nu)-\tilde{y}|}\,d\nu\,d\tau\,,$$

для обчислення якого послідовно використовується квадратурна формула, запропонована у [2]:

$$\int_0^1 \varphi(\tau)\tau^{-\gamma}\, d\tau = 2(1-\gamma)^{-1}(2N+1)^{-1}\sum_{k=1}^{N}\varphi(t_k) + R_N\,, \tag{3}$$

де $t_k = \left(\frac{2k}{2N+1}\right)^{1/(1-\gamma)}$, $k = 1,\dots,N$, $|R_N| \le \frac{1}{(2N+1)(1-\gamma)}$. Вибір формули (3) пояснюється простотою залежності від порядку γ особливості.

Нехай P − внутрішній елемент сітки і $\tilde{y} = (y_1, y_2, y_3) = (\tau_0, \nu_0, 0)$. У цьому випадку

$$I_1 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{L(\tau,\nu)}{\sqrt{(\tau-\tau_0)^2 + (\nu-\nu_0)^2}}\, d\nu\, d\tau\,. \tag{4}$$

Проведемо в (4) заміну змінних, перейшовши до полярної системи координат з центром у точці (τ_0, ν_0):

$$\tau = \tau_0 + r\cos\theta, \qquad \nu = \nu_0 + r\sin\theta\,. \tag{5}$$

Тоді

$$I_1 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0(\theta)} L(\tau(r,\theta), \nu(r,\theta)\, dr\, d\theta\,,$$

де $r_0(\theta)$ − функція, яка визначає відстань від точки спостереження до протилежних сторін елемента, не має особливості і для обчислення інтеграла використовується квадратурна формула Ґаусса з постійною вагою.

Якщо P − приграничний елемент $\tilde{\Gamma}$, замість (4) маємо

$$I_1 = h_\tau^{\alpha_1} h_\nu^{\alpha_2} \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{L(\tau,\nu)}{\left[(\tau-\tau_0)^{\alpha_1} + (\nu-\nu_0)^{\alpha_2}\right]\sqrt{(\tau-\tau_0)^2 + (\nu-\nu_0)^2}}\, d\nu\, d\tau\,,$$

і у випадку, коли

$$L(\tau,\nu) = \frac{(\tau-\tau_0)(\nu-\nu_0)}{(\tau_1-\tau_0)(\nu_1-\nu_0)}\,, \tag{6}$$

отримуємо

$$I_1 = h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1} \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{(\tau-\tau_0)^{\alpha_1-1}(\nu-\nu_0)^{\alpha_2-1}}{\sqrt{(\tau-\tau_0)^2 + (\nu-\nu_0)^2}}\, d\nu\, d\tau\,.$$

Використавши заміну змінних (5), отримуємо

$$I_1 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{3-\alpha_1-\alpha_2} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha_1-1}\theta \sin^{\alpha_2-1}\theta r_0^{3-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\, d\theta\,. \tag{7}$$

Підінтегральна функція в (7) не має особливості і для обчислення інтеграла використовується квадратурна формула Ґаусса з постійною вагою.

У випадку, коли

$$L(\tau,\nu) = \frac{(\tau-\tau_0)(\nu-\nu_1)}{(\tau_1-\tau_0)(\nu_0-\nu_1)}\,, \tag{8}$$

отримуємо

$$I_1 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{\alpha_1-1}\theta}{\sin^{\alpha_2}\theta} r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\, d\theta -$$

$$- \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{3-\alpha_1-\alpha_2} \int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha_1-1}\theta \sin^{\alpha_2-1}\theta r_0^{3-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\, d\theta\,. \tag{9}$$

Перший з інтегралів у (9) обчислюємо, розділивши проміжок інтегрування на два відрізки $[0, \varepsilon]$ і $[\varepsilon, \pi/2]$, $\varepsilon = \pi/180$, і замінивши $\sin^{\alpha_2}\theta = \theta^{\alpha_2}$ на відрізку $[0, \varepsilon]$. Наближене значення інтеграла з особливістю знаходимо за допомогою квадратурної формули (3), інших інтегралів − за допомогою квадратурної формули Ґаусса з постійною вагою.

Аналогічним чином діємо, якщо

$$L(\tau,\nu) = \frac{(\tau-\tau_1)(\nu-\nu_0)}{(\tau_0-\tau_1)(\nu_1-\nu_0)}. \tag{10}$$

У цьому випадку маємо

$$I_1 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1}h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{\alpha_2-1}\theta}{\cos^{\alpha_1}\theta}r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\,d\theta -$$

$$-\frac{h_\tau^{\alpha_1-1}h_\nu^{\alpha_2-1}}{3-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha_1-1}\theta\sin^{\alpha_2-1}\theta r_0^{3-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\,d\theta. \tag{11}$$

Перший з інтегралів в (11) обчислюємо, розділивши проміжок інтегрування на два відрізки $[0, \pi/2-\varepsilon]$ і $[\pi/2-\varepsilon, \pi/2]$, $\varepsilon = \pi/180$, і замінивши $\cos^{\alpha_1}\theta = (\pi/2-\theta)^{\alpha_1}$ на відрізку $[\pi/2-\varepsilon, \pi/2]$. Наближене значення інтеграла з особливістю знаходимо за допомогою квадратурної формули (3), інших інтегралів − за допомогою квадратурної формули Ґаусса з постійною вагою.

У випадку, якщо

$$L(\tau,\nu) = \frac{(\tau-\tau_1)(\nu-\nu_1)}{(\tau_0-\tau_1)(\nu_0-\nu_1)} \tag{12}$$

отримуємо

$$I_1 = h_\tau^{\alpha_1-1}h_\nu^{\alpha_2-1}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r_0^{3-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)}{3-\alpha_1-\alpha_2}\cos^{\alpha_1-1}\theta\sin^{\alpha_2-1}\theta -\right.$$

$$-\frac{r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)}{2-\alpha_1-\alpha_2}\left(\frac{h_\nu\cos^{\alpha_1-1}\theta}{\sin^{\alpha_2}\theta}+\frac{h_\tau\sin^{\alpha_2-1}\theta}{\cos^{\alpha_1}\theta}\right)+$$

$$\left.+\frac{h_\tau h_\nu r_0^{1-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)}{(1-\alpha_1-\alpha_2)\cos^{\alpha_1-1}\theta\sin^{\alpha_2-1}\theta}\right]d\theta. \tag{13}$$

При обчисленні інтегралів з особливостями в (13) використовуються ті ж прийоми, що й для (9), (11). Подібно здійснюється виділення особливості у густині потенціалу, якщо елемент сітки дотикається не до кута, а до сторони області визначення параметрів ділянки $\tilde{\Gamma}$.

Виділення особливості в густині та ядрі нормальної похідної потенціалу простого шару. Розглянемо інтеграл типу (2) , якщо P − внутрішній елемент сітки $\tilde{S}_h$ і (τ_0, ν_0) − точка спостереження. У цьому випадку

$$I_2 = \int_{\tau_0}^{\tau_1}\int_{\nu_0}^{\nu_1} L(\tau,\nu)\frac{(\tau-\tau_0)\cos\alpha+(\nu-\nu_0)\cos\beta}{((\tau-\tau_0)^2+(\nu-\nu_0)^2)^{3/2}}\,d\nu\,d\tau, \tag{14}$$

де α − кут між векторами $\mathbf{e}_{y_1}$ і $\mathbf{n}_{y_1}$, β − кут між векторами $\mathbf{e}_{y_2}$ і $\mathbf{n}_{y_2}$, кут між векторами $\mathbf{e}_{y_3}$ і $\mathbf{n}_{y_3}$ для вибраної ділянки $\tilde{\Gamma}$ дорівнює нулеві. Провівши у (14) заміну змінних (5), отримуємо

$$I_2 = \int_0^{\pi/2}\int_0^{r_0(\theta)} \frac{L(\tau(r,\theta), \nu(r,\theta)\psi(\theta,\alpha,\beta)}{r}\, dr\, d\theta,$$

де $\psi(\theta,\alpha,\beta) = \cos\alpha\cos\theta + \cos\beta\sin\theta$. Тоді у випадку, коли базисна функція $L(\tau,\nu)$ означена формулою (6), отримуємо

$$I_2 = \frac{1}{2h_\tau h_\nu}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta\psi(\theta,\alpha,\beta) r_0^2(\theta)\, d\theta. \tag{15}$$

У випадку (8) отримуємо

$$I_2 = \frac{1}{h_\tau h_\nu}\int_0^{\pi/2} \cos\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)(h_\nu r_0(\theta) - \frac{1}{2} r_0^2(\theta)\sin\theta)\, d\theta. \tag{16}$$

У випадку (10) отримуємо

$$I_2 = \frac{1}{h_\tau h_\nu}\int_0^{\pi/2} \sin\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)(h_\tau r_0(\theta) - \frac{1}{2} r_0^2(\theta)\cos\theta)\, d\theta. \tag{17}$$

Підінтегральні функції в інтегралах (15)–(17) є неперервними і для їхнього обчислення застосовуємо квадратурні формули Ґаусса з постійною вагою. Нарешті, у випадку $L(\tau,\nu)$, означеної формулою (12), маємо

$$I_2 = \frac{1}{h_\tau h_\nu}\int_0^{\pi/2} \psi(\theta,\alpha,\beta)\left(\frac{1}{2} r_0^2(\theta)\cos\theta\sin\theta - r_0(\theta)(h_\nu\cos\theta + h_\tau\sin\theta\right) d\theta +$$

$$+ \int_0^{\pi/2} \psi(\theta,\alpha,\beta)\int_0^{r_0(\theta)} \frac{1}{r}\, dr\, d\theta. \tag{18}$$

За наближене значення інтеграла $\int_0^{r_0(\theta)} \frac{1}{r}\, dr$ візьмемо функцію $q(\theta,\delta) = \ln((r_0(\theta) - \delta)/\delta)$, де параметр $\delta \ll r_0(\theta)$.

Якщо P – приграничний елемент сітки $\tilde{S}_h$, наприклад, $\tau_0 = \nu_0 = 0$, замість (15)–(17) отримуємо відповідно інтеграли:

$$I_2 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2} r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\cos^{1-\alpha_1}\theta\sin^{1-\alpha_2}\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)\, d\theta, \tag{19}$$

$$I_2 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2}}{1-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^{1-\alpha_1}\theta}{\sin^{\alpha_2}\theta} r_0^{1-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\psi(\theta,\alpha,\beta)\, d\theta - \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\cos^{1-\alpha_1}\theta\sin^{1-\alpha_2}\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)\, d\theta, \tag{20}$$

$$I_2 = \frac{h_\tau^{\alpha_1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{1-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^{1-\alpha_2}\theta}{\cos^{\alpha_1}\theta} r_0^{1-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\psi(\theta,\alpha,\beta)\, d\theta - \frac{h_\tau^{\alpha_1-1} h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2} \times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\cos^{1-\alpha_1}\theta\sin^{1-\alpha_2}\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)\, d\theta. \tag{21}$$

Інтеграли з особливостями у (20), (21) обчислюються так само, як у (9), (11). Замість (19) отримуємо

$$I_2 = \frac{h_\tau^{\alpha_1-1}h_\nu^{\alpha_2-1}}{2-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2} r_0^{2-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\cos^{1-\alpha_1}\theta\sin^{1-\alpha_2}\theta\psi(\theta,\alpha,\beta)\,d\theta -$$

$$-\frac{h_\tau^{\alpha_1-1}h_\nu^{\alpha_2-1}}{1-\alpha_1-\alpha_2}\int_0^{\pi/2} r_0^{1-\alpha_1-\alpha_2}(\theta)\left(\frac{h_\tau\sin^{1-\alpha_2}\theta}{\cos^{\alpha_1}\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{h_\nu\cos^{1-\alpha_1}\theta}{\sin^{\alpha_2}\theta}\right)\psi(\theta,\alpha,\beta)\,d\theta + h_\tau^{\alpha_1}h_\nu^{\alpha_2}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\cos^{\alpha_1}\theta\sin^{\alpha_2}\theta\int_0^{r_0(\theta)}\frac{dr}{r^{1+\alpha_1+\alpha_2}}\,d\theta. \quad (22)$$

За наближене значення інтеграла $\int_0^{r_0(\theta)}\frac{dr}{r^{1+\alpha_1+\alpha_2}}$ візьмемо функцію

$$\tilde q(\theta,\tilde\delta) = (r_0^{\alpha_1+\alpha_2}(\theta)-\tilde\delta^{\alpha_1+\alpha_2})/(\alpha_1+\alpha_2)\tilde\delta^{\alpha_1+\alpha_2}r_0^{\alpha_1+\alpha_2}(\theta),$$

де параметр $\tilde\delta \ll r_0(\theta)$.

Подібно здійснюється виділення особливості у густині потенціалу, якщо елемент сітки дотикається не до кута, а до сторони області визначення параметрів ділянки $\tilde\Gamma$.

Випадок довільної граничної поверхні. Нехай $\tilde\Gamma$ − деяка ділянка граничної поверхні Γ з параметричним зображенням

$$x_1 = x_1(\tau,\nu),$$

$$x_2 = x_2(\tau,\nu), \qquad a \le \tau \le b, \qquad c \le \nu \le d,$$

$$x_3 = x_3(\tau,\nu),$$

в області $\tilde S = [a,b]\times[c,d]$ визначення параметрів якої згенерована прямокутна сітка $\tilde S_h$; P − деякий елемент сітки. Позначимо $R(\tau,\nu) = \dfrac{1}{|x(\tau,\nu)-\tilde y|}$, $\tau,\nu \in P$; $\tilde y$ − фіксована точка P. У випадку $\tilde y \to x(\tau,\nu)$ інтеграли (1), (2) мають особливість. Для її усунення проведемо заміну змінних (5), де τ_0, ν_0 − параметричні координати точки $\tilde y$. Тоді

$$R(\tau,\nu)\,d\tau\,d\nu = rR(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta))\,dr\,d\theta \to K(\theta)\,dr\,d\theta \quad \text{при } r\to 0. \quad (23)$$

У цьому випадку інтеграл типу (1) може мати особливість лише за рахунок густини потенціалу. Цю особливість легко усунути, якщо для апроксимації густини використати розглянуті вище скінченноелементні апроксимації і для обчислення інтегралів застосувати спеціальні квадратурні формули (3).

Позначимо

$$\tilde R(\tau,\nu) = \frac{\partial}{\partial n_y}\frac{1}{|x(\tau,\nu)-\tilde y|}, \qquad \tau,\nu\in P. \quad (24)$$

Тоді, якщо виконується співвідношення (23), для (24) отримуємо

$$\tilde R(\tau,\nu)\,d\tau\,d\nu = r\tilde R(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta))\,dr\,d\theta,$$

причому

$$r\tilde R(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)) \to \tilde K(\theta)/r \quad \text{при} \quad r\to 0,$$

де $\tilde K(\theta) = K^3(\theta)q(\theta)$ − неперервна функція. У цьому випадку маємо

$$I_2 = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{r_0(\theta)} \frac{\rho(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)L(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)J(\tau(r,\theta),\nu(r,\theta)\tilde{K}(\theta)}{r}\, dr\, d\theta. \quad (25)$$

Особливість $1/r$ у (25) частково усувається використанням скінченно-елементних апроксимацій як базисних функцій. Для повного усунення особливості застосовуються спеціальні квадратурні формули наближеного обчислення інтегралів з ядрами типу Коші [6, с. 235].

Зазначимо, що у загальному випадку зведення інтегралів (1), (2) до однократних заміною (5), як це було зроблено для плоскої ділянки, не є можливим. Тому для обчислення інтеграла

$$I = \int\limits_0^{\pi/2}\int\limits_0^{r_0(\theta)} f(r,\theta)r^{-\alpha}\, dr\, d\theta$$

послідовно використовуються квадратурна формула Ґаусса та один з розглянутих вище способів обчислення сингулярних інтегралів, який залежить від значення величини α. Якщо крок сітки на ділянці $\tilde{\Gamma}$ достатньо малий, елемент $P \in \tilde{S}_h$ можна замінити плоским і застосувати розглянуті вище алгоритми виділення особливості для плоских ділянок. Пропонований метод нескладно розповсюдити також на випадок непрямокутних, зокрема, трикутних елементів сіток, скінченноелементної апроксимації вищих порядків для густини потенціалу та елементів матриці СЛАР методів Бубнова – Гальоркіна, найменших квадратів чи найменшої нев'язки.

Результати числових експериментів. Для ілюстрації ефективності пропонованих алгоритмів виділення особливостей були розв'язані такі граничні задачі для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$. Нехай $G = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ – одиничний куб, $\Gamma = \partial G \bigcup \tilde{\Gamma}$, де $\tilde{\Gamma}$ – розімкнена ділянка $[0.25, 0.75]\times[0.25, 0.75]$, яка лежить у площині $y_3 = 0.5$.

Задача 1. Знайти функцію $u \in G$, $\Delta u = 0$ в G, яка задовольняє граничну умову $u|_{\Gamma} = 1$. Розв'язок цієї задачі відомий: $u = 1$ в G. На всіх ділянках Γ (на гранях куба та на поверхні $\tilde{\Gamma}$) було згенеровано прямокутну сітку з кроком $h_\tau = h_\nu = 0.125$, розв'язок шукали у вигляді потенціалу простого шару з кусково-лінійною апроксимацією гладкої частини невідомої густини потенціалу, а величини α_i, $i = 1,\ldots,4$, приймали рівними 0.5. Для розв'язання інтегрального рівняння використовували метод колокації з точками спостереження, які співпадали з вузлами сітки. Розмірність матриці системи колокаційних рівнянь $N_1 = 458$. Для обчислення інтегралів типу (1) у коефіцієнтах матриці СЛАР спочатку використовували лише квадратурні формули Ґаусса четвертого порядку з постійними коефіцієнтами без виділення особливостей. При цьому точність наближеного розв'язку в області G при наближенні до середини ребра куба дорівнювала $2.1\,\%$, при наближенні до середини краю ділянки $\tilde{\Gamma}$ – $3.5\,\%$, при наближенні до кутових точок граничної поверхні – $5.8\,\%$. При застосуванні квадратурних формул Ґаусса четвертого порядку з постійними коефіцієнтами та пропонованих алгоритмів виділення особливостей точність наближеного розв'язку в області G при наближенні до середини ребра куба дорівнювала $0.3\,\%$, при наближенні до середини краю ділянки $\tilde{\Gamma}$ – $0.5\,\%$, при наближенні до кутових точок граничної поверхні – $0.9\,\%$. При обчисленні інтегралів (9), (11), (13) ε приймалося рівним $0.1h_{\tau,\nu}$. Зауважимо, що близького за точністю результату без застосування пропонованих алгоритмів виділення особливостей можна досягнути, згенерувавши на граничній поверхні сітку з кроком

$h_\tau = h_\nu = 0.0625$. Розмірність матриці системи колокаційних рівнянь у цьому випадку $N_2 = 1714$. Кількість операцій, необхідних для формування системи колокаційних рівнянь у другому випадку у 14 раз перевищує кількість операцій, необхідних для формування відповідної системи у першому. Кількість операцій $O(N_2^3)$, необхідних для її розв'язання методом Ґаусса, у 52 рази перевищує кількість операцій $O(N_1^3)$ для розв'язання СЛАР у випадку виділення особливостей.

***Задача* 2** відрізнялася від *задачі 1* лише граничною умовою на ділянці $\tilde{\Gamma}$, де приймали умову $\left.\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\right|_{\tilde{\Gamma}} = 0$. При цьому точність наближеного розв'язку в області G при наближенні до середини ребра куба дорівнювала $3.1\,\%$, при наближенні до середини краю ділянки $\tilde{\Gamma}$ – $5.7\,\%$, при наближенні до кутових точок граничної поверхні – $8.2\,\%$. При застосуванні квадратурних формул Ґаусса четвертого порядку з постійними коефіцієнтами та пропонованих алгоритмів виділення особливостей в інтегралах типу (1) і (2) точність наближеного розв'язку в області G при наближенні до середини ребра куба дорівнювала $0.6\,\%$, при наближенні до середини краю ділянки $\tilde{\Gamma}$ – $0.9\,\%$, при наближенні до кутових точок граничної поверхні – $1.2\,\%$. При обчисленні інтегралів (18) і (22) оптимальними були значення малих параметрів $\delta = 0.04$ і $\tilde{\delta} = 0.03$ відповідно.

Висновки. Запропоновано алгоритми виділення особливостей у густині та ядрі потенціалу простого шару та його нормальної похідної при наближенні до країв, ребер і кутових точок граничної поверхні з використанням властивостей скінченноелементних апроксимацій шуканої густини потенціалу. Числові експерименти продемонстрували високу ефективність запропонованого підходу. Розроблені алгоритми легко адаптуються для виділення особливостей в елементах матриць СЛАР проекційних методів розв'язання інтегральних рівнянь і систем інтегральних рівнянь для потенціалу подвійного шару або суми потенціалів простого і подвійного шару, еквівалентних низці граничних задач для рівняння Лапласа в $\mathbb{R}^3$.

1. *Аменицкий А. В., Белов А. А., Игумнов Л. А., Карелин И. С.* Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости // Проблемы прочности и пластичности. – 2009. – Вып. 71. – С. 164–171.
2. *Бойков И. В.* Асимптотически оптимальные алгоритмы вычисления сингулярных интегралов // Применение вычисл. методов в науч.-техн. исследованиях. – Пенза: Пенз. политехн. ин-т. – 1982. – Вып. 4. – С. 3–10.
3. *Гребенников А. И.* Методы сплайн-коллокации и двойной сплайн-аппроксимации решения операторных уравнений и их приложение к решению интегральных уравнений с особенностями // Методы и алгоритмы в численном анализе. – Москва: Наука, 1984. – С. 128–140.
4. *Громадка Т., Лей Ч.* Комплексный метод граничных элементов в инженерных задачах. – Москва: Мир, 1990. – 304 с.
5. *Иванов А. В., Тиунов М. А.* Применение метода граничных интегральных уравнений при моделировании формирования и динамики пучка в установках электронного охлаждения // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Сер. Физика. – 2008. – **3**, № 1. – С. 56–61.
6. *Иванов В. В.* Методы вычислений на ЭВМ. – Киев: Наук. думка, 1986. – 584 с.
7. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов. – Москва: Наука, 1967. – 500 с.
8. *Кюркчан А. Г., Смирнова Н. И.* Решение задач дифракции волн методом продолженных граничных условий // Акуст. журн. – 2007. – **53**, № 4. – С. 490–499.
9. *Медведик М. Ю.* Метод коллокации для решения задачи дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле, расположенном в резонаторе // Изв. вузов. Поволжск. регион. Физ.-мат. науки. – 2011. – № 3. – С. 28–40.

10. *Фикера Г.* Асимптотическое поведение электрического поля и плотности электрического заряда в окрестности сингулярных точек проводящей поверхности // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 3. – С. 105–124.
11. *Polishchuk A. D.* Construction of boundary operators for the Laplacian. – I. Using of simple layer potential // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2005): Proc. Xth Int. Seminar/Workshop, Lviv, Sept. 12–15, 2005. – Lviv, 2005. – P. 137–139.
12. *Polishchuk A. D.* Construction of boundary operators for the Laplacian in the case of tired boundary surface. – I. Using of simple layer potential // Direct and inverse problems of electromagnetic and acoustic wave theory (DIPED-2006): Proc. XIth Int. Seminar/Workshop, Tbilisi, Oct. 12–13, 2006. – Lviv, 2006. – P. 153–156.

О ВЫДЕЛЕНИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА

Предлагаются методы выделения особенностей в ядре и плотности потенциала слабосингулярных интегральных уравнений Фредгольма для потенциала простого слоя в случае, когда граничная поверхность имеет края, ребра и угловые точки, с использованием проекционных методов решения этих уравнений и конечноэлементной аппроксимации искомой плотности потенциала.

ON REVEALING SINGULARITIES IN NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE POTENTIAL THEORY

The methods for revealing the singularities in the kernel and in the density of potential of the weakly singular Fredholm integral equations for the single-layer potential are proposed in the case when boundary surface has the edges, ribs, and corner points, with the use of projection methods for solution of these equations and finite element approximation of the unknown potential density.

Ін-т прикл. проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України, Львів

Одержано
07.02.13