УДК 517.956

К. О. Буряченко, А. І. Харабара

РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА В КРУЗІ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ

Встановлено та досліджено достатні умови розв'язності задачі Неймана для правильно еліптичних рівнянь четвертого порядку загального вигляду в одиничному крузі K у просторі $C^4(K)\bigcap C^{3,\alpha}(\bar{K})$.

Вступ. Пропонована стаття присвячена питанню існування розв'язку задачі Неймана в крузі для правильно еліптичних диференціальних рівнянь четвертого порядку загального вигляду. Проблематика роботи відноситься до досить актуальних питань коректності так званих загальних крайових задач для диференціальних рівнянь високого порядку, які беруть свій початок від робіт Л. Хермандера та М. Й. Вішика, в яких за допомогою теорії розширень (сучасний розвиток ця теорія знайшла у роботах G. Grubb [22], L. Hörmander [23], A. Posilicano [26]) було доведено факт існування коректної граничної задачі для лінійних диференціальних рівнянь довільного порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами в обмеженій області з гладкою межею. Згодом питання коректності крайових задач для різноманітних типів диференціальних рівнянь вивчалися багатьма авторами як вітчизняних, так і закордонних математичних шкіл. Наприклад, у роботах Б. Й. Пташника та його учнів вивчено крайові задачі в паралелепіпеді для доволі широкого класу диференціальних рівнянь і систем [10]. Задачу Діріхле для неправильно еліптичних диференціальних рівнянь другого порядку почали вивчати з роботи А. В. Біцадзе [2], який побудував приклад еліптичного рівняння другого порядку, для якого однорідна задача Діріхле в крузі має зліченну кількість лінійно незалежних розв'язків. За допомогою розробленого В. П. Бурським [3] методу асоційованих з диференціальним оператором будь-якого типу слідів у роботі [4] встановлено критерії коректності задачі Діріхле в крузі для рівнянь другого порядку загального вигляду. Варто також згадати роботи О. П. Солдатова [11] та Н. Е. Товмасяна [27, 28], у яких вивчалися питання єдиності розв'язку граничних задач для загальних еліптичних рівнянь другого порядку та систем зі сталими коефіцієнтами. З проблемою коректності крайових задач тісно пов'язані дослідження спектра оператора відповідної задачі. У цьому напрямку слід відмітити недавні публікації S. Albeverio [12], B. Brown [20, 21], N. Kerimov [24] та інші. Різноманітні загальні постановки крайових задач і їх дослідження (зокрема, в необмежених областях [18]) відображені у роботах [13, 17, 25].

Для рівнянь високого порядку, зокрема для рівнянь четвертого порядку, а згодом і для рівнянь довільного парного порядку $2m$, $m \ge 2$, задача Діріхле вивчена А. О. Бабаяном [1, 15, 16] і К. О. Буряченко [5, 7, 8]. Що стосується задачі Неймана, то деякі умови її розв'язності в крузі для рівнянь другого порядку без молодших членів отримано в недавній роботі В. П. Бурського та Є. В. Лесіної [6], а для рівнянь, які містять молодшу частину, – G. Bonanno [19]. Для рівнянь загального вигляду з однорідним символом четвертого порядку та вище задача Неймана ще не була досліджена.

У цій роботі запропоновано перенести методи дослідження А. О. Бабаяна та К. О. Буряченко, які були застосовані для дослідження задачі Діріхле, на задачу Неймана. Це вдалося зробити і як наслідок отримано достатні умови існування класичного розв'язку задачі Неймана в просторі $C^4(K)\bigcap C^{3,\alpha}(\bar{K})$.

1. Формулювання задачі. Розглянемо задачу Неймана в крузі для правильно еліптичних рівнянь четвертого порядку зі сталими комплексними коефіцієнтами:

$$L(\partial_x)u = a_0 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^4} + a_1 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^3 \partial x_2} + a_2 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + a_3 \frac{\partial^4 u}{\partial x_1 \partial x_2^3} + a_4 \frac{\partial^4 u}{\partial x_2^4} = 0\,, \quad (1)$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{n}^2}\right|_{\partial K} = f_1, \qquad \left.\frac{\partial^3 u}{\partial \mathbf{n}^3}\right|_{\partial K} = f_2\,, \quad (2)$$

де K − одиничний круг в $\mathbb{R}^2$; $\mathbf{n}$ − одиничний вектор зовнішньої нормалі; $\partial_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)$; $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0,\ldots,4$; $f_1 \in C^{1,\alpha}(\partial K)$, $f_2 \in C^{\alpha}(\partial K)$ − задані на межі ∂K функції, $0 < \alpha < 1$, які можуть бути продовжені до аналітичних функцій у крузі K і поза ним.

Нагадаємо важливе означення, яке використовується у роботі.

Означення. Нехай λ_j − корені характеристичного полінома $L(1,\lambda) = a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$, вважатимемо їх комплексними, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, тобто рівняння (1) є еліптичним. Будемо називати еліптичне рівняння (1) *правильно еліптичним*, якщо корені λ_j порівну розміщені в додатній і від'ємній уявній площинах:

$$\operatorname{Im}\lambda_j > 0, \qquad j = 1, 2, \qquad \operatorname{Im}\lambda_k < 0, \qquad k = 3, 4\,.$$

Прикладом правильно еліптичного рівняння є рівняння Лапласа $\Delta u = 0$, для якого $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$.

Отже, вважатимемо рівняння (1) правильно еліптичним рівнянням загального вигляду, тобто корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ його характеристичного рівняння

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

є різними, не дорівнюють $\pm i$ та задовольняють умови

$$\operatorname{Im}\lambda_1 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_2 > 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_3 < 0, \quad \operatorname{Im}\lambda_4 < 0\,. \quad (3)$$

Основним методом дослідження роботи є метод представлення аналітичних функцій, запропонований Н. Е. Товмасяном [27] (див. також S. Axler, P. Bourdon, W. Ramey [14]). Для використання цього методу перепишемо задачу (1), (2) у комплексних змінних.

2. Задача Неймана в комплексній площині. Покладемо

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}\,,$$

тоді

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

та

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right).$$

Застосовуючи ці вирази до похідних, які входять в (1), отримаємо новий запис цього рівняння:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_1 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} - \mu_2 \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_1 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} - \nu_2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)u(z) = 0\,, \quad (4)$$

де

$$\mu_1 = -\frac{\lambda_1 - i}{\lambda_1 + i}, \qquad \mu_2 = -\frac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}, \qquad \nu_1 = -\frac{\lambda_3 + i}{\lambda_3 - i}, \qquad \nu_2 = -\frac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}. \quad (5)$$

Перепишемо також у комплексних змінних граничні умови Неймана (2). Для цього скористаємося формулами

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \overline{n}}\right|_{\partial K} = z\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}, \qquad \left.\frac{\partial^m u}{\partial \overline{n}^m}\right|_{\partial K} = \left(z\frac{\partial u}{\partial z} + \overline{z}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\right)^m, \quad m = 2,3\,.$$

Остаточно матимемо такі граничні умови:

$$\left.\left(z^2\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + 2z\overline{z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial\overline{z}} + \overline{z}^2\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial\overline{z}^2} + 2z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\overline{z}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}\right)\right|_{\partial K} = F_1(z)\,,$$

$$\left.\left(\overline{z}^2\frac{\partial^3 u}{\partial \overline{z}^3} + 2z\overline{z}\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial\overline{z}^2} + z^2\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial\overline{z}} + 2\overline{z}\frac{\partial^2 u}{\partial \overline{z}^2} + 2z\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\overline{z}}\right)\right|_{\partial K} = F_2(z)\,. \qquad (6)$$

Тут $F_1(z)$, $F_2(z)$ − функції, які будуються за допомогою заданих функцій $f_1 \in C^{1,\alpha}(\partial K)$, $f_2 \in C^{\alpha}(\partial K)$ з умов Неймана (2).

3. Задача Неймана для правильно еліптичних рівнянь. Розглядатимемо задачу (4), (6). Зауважимо, що умова правильної еліптичності рівняння (1) приводить (з огляду на формули (3) і (5)) до умов $|\mu_k| < 1$, $|\nu_k| < 1$, $k = 1,2$. Розв'язок $u(z)$ рівняння (4), очевидно, матиме такий вигляд:

$$u(z) = \Phi_1(z + \mu_1\overline{z}) + \Phi_2(z + \mu_2\overline{z}) + \Psi_1(\overline{z} + \nu_1 z) + \Psi_2(\overline{z} + \nu_2 z)\,, \qquad (7)$$

де Φ_k, Ψ_k, $k = 1,2$, − достатньо гладкі та аналітичні разом зі своїми похідними деякі функції. Знайдемо їх з граничних умов (6). Головну роль у цьому дослідженні відіграватиме лема про представлення аналітичних функцій.

Лема 1 [**27**]. *Нехай* $\mu, \nu \in \mathbb{C} : |\mu| < 1, |\nu| < 1$, $\zeta_1 : K \to D_1$, $\zeta_1 = z + \mu\overline{z}$, $\zeta_2 : K \to D_2$, $\zeta_2 = \overline{z} + \nu z$, − *деякі конформні відображення одиничного круга* K *в області* D_1 *та* D_2 *відповідно. І нехай* $\varphi(\zeta_1)$, $\psi(\zeta_2)$ − *функції, аналітичні та неперервні в* $\overline{D}_1$ *і в* $\overline{D}_2$ *відповідно. Тоді*

$$\varphi(z + \mu\overline{z}) = \omega(z) + \omega(\mu\overline{z})\,,$$

$$\psi(\overline{z} + \nu z) = \rho(\overline{z}) + \rho(\nu z)\,,$$

де ω, ρ − *аналітичні функції в одиничному крузі* K.

Вважатимемо функції Φ_i'' і Ψ_i'', $i = 1,2$, аналітичними та неперервними у відповідних областях свого визначення. Застосовуючи до них лему 1, отримаємо

$$\Phi_1''(z + \mu_1\overline{z}) = \omega(z) + \omega(\mu_1\overline{z}), \qquad \Phi_2''(z + \mu_1\overline{z}) = \gamma(z) + \gamma(\mu_2\overline{z})\,,$$

$$\Psi_1''(\overline{z} + \nu_1 z) = \alpha(\overline{z}) + \alpha(\nu_1 z), \qquad \Psi_2''(\overline{z} + \nu_2 z) = \beta(\overline{z}) + \beta(\nu_2 z)\,.$$

Тут $\omega, \gamma, \alpha, \beta$ − деякі аналітичні функції в одиничному крузі, тому їх можна розвинути у степеневі ряди:

$$\omega(z) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k, \qquad \omega(\mu_1\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\mu_1\overline{z})^k\,,$$

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k, \qquad \gamma(\mu_2\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\mu_2\overline{z})^k\,,$$

$$\alpha(\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \overline{z}^k, \qquad \alpha(\nu_1 z) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(\nu_1 z)^k\,,$$

$$\beta(\overline{z}) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \overline{z}^k, \qquad \beta(\nu_2 z) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k(\nu_2 z)^k\,. \qquad (8)$$

4. Встановлення основного результату. Підставимо розв'язок $u(z)$ вигляду (7) у граничні умови (6). Для цього знайдемо

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \Phi_1'''(z+\mu_1\bar{z}) + \Phi_2'''(z+\mu_2\bar{z}) + \nu_1^3\Psi_1'''(\bar{z}+\nu_1 z) + \nu_2^3\Psi_2'''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z^2\partial\bar{z}} = \mu_1\Phi_1'''(z+\mu_1\bar{z}) + \mu_2\Phi_2'''(z+\mu_2\bar{z}) + \nu_1^2\Psi_1'''(\bar{z}+\nu_1 z) + \nu_2^2\Psi_2'''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z\partial\bar{z}^2} = \mu_1^2\Phi_1'''(z+\mu_1\bar{z}) + \mu_2^2\Phi_2'''(z+\mu_2\bar{z}) + \nu_1\Psi_1'''(\bar{z}+\nu_1 z) + \nu_2\Psi_2'''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Phi_1''(z+\mu_1\bar{z}) + \Phi_2''(z+\mu_2\bar{z}) + \nu_1^2\Psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \nu_2^2\Psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial\bar{z}} = \mu_1\Phi_1''(z+\mu_1\bar{z}) + \mu_2\Phi_2''(z+\mu_2\bar{z}) + \nu_1\Psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \nu_2\Psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\bar{z}^3} = \mu_1^3\Phi_1'''(z+\mu_1\bar{z}) + \mu_2^3\Phi_2'''(z+\mu_2\bar{z}) + \Psi_1'''(\bar{z}+\nu_1 z) + \Psi_2'''(\bar{z}+\nu_2 z)\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\bar{z}^2} = \mu_1^2\Phi_1''(z+\mu_1\bar{z}) + \mu_2^2\Phi_2''(z+\mu_2\bar{z}) + \Psi_1''(\bar{z}+\nu_1 z) + \Psi_2''(\bar{z}+\nu_2 z)\,.$$

Розвинемо праві частини $F_1(z)$ і $F_2(z)$ граничних умов у ряди на межі ∂K і позначимо їх коефіцієнти через $F_{\pm k}$ та $G_{\pm k}$ відповідно:

$$F_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k}\bar{z}^k, \qquad F_2(z) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} G_{-k}\bar{z}^k\,.$$

Тоді з першої із граничних умов (6) отримаємо

$$\begin{aligned}
&z^2\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k k(\mu_1\bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k(\mu_2\bar{z})^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1^3\bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1^3(\nu_1 z)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_1^3\bar{z}^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_2^3(\nu_2 z)^{k-1}\Bigg) + 2z\bar{z}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k\mu_1 z^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} A_k k\mu_1(\mu_1\bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k\mu_2 z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k\mu_2(\mu_2\bar{z})^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1^2\bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1^2(\nu_1 z)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_2^2\bar{z}^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_2^2(\nu_2 z)^{k-1}\Bigg) + \bar{z}^2\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k\mu_1^2 z^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} A_k k\mu_1^2(\mu_1\bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k\mu_2^2 z^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k\mu_2^2(\mu_2\bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1\bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k\nu_1(\nu_1 z)^{k-1} + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_2\bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k\nu_2(\nu_2 z)^{k-1}\Bigg) + 2z\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k z^k + \\
&\qquad + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(\mu_1\bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k(\mu_2\bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k\nu_1^2\bar{z}^k +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu_1^2 (\nu_1 z)^k + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2^2 \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2^2 (\nu_2 z)^k \Bigg) +$$

$$+ 2\bar{z}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1 z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1 (\mu_1 \bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2 z^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2 (\mu_2 \bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu_1 \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu_1 (\nu_1 z)^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2 \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2 (\nu_2 z)^k \Bigg) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} F_{-k} \bar{z}^k \ , \qquad (9)$$

а з другої із граничних умов (6) маємо

$$\bar{z}^2 \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1^3 z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1^3 (\mu_1 \bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2^3 z^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2^3 (\mu_2 \bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k \bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k (\nu_1 z)^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k k \bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k (\nu_2 z)^{k-1} \Bigg) + 2z\bar{z} \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1^2 z^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1^2 (\mu_1 \bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2^2 z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2^2 (\mu_2 \bar{z})^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} C_k k \nu_1 \bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k \nu_1 (\nu_1 z)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k \nu_2 \bar{z}^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k k \nu_2 (\nu_2 z)^{k-1} \Bigg) + z^2 \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1 z^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k k \mu_1 (\mu_1 \bar{z})^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2 z^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k k \mu_2 (\mu_2 \bar{z})^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} C_k k \nu_1^2 \bar{z}^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k k \nu_1^2 (\nu_1 z)^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k k \nu_2^2 \bar{z}^{k-1} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k k \nu_2^2 (\nu_2 z)^{k-1} \Bigg) + 2\bar{z} \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1^2 z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1^2 (\mu_1 \bar{z})^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2^2 z^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2^2 (\mu_2 \bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k (\nu_1 z)^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} D_k (\nu_2 z)^k \Bigg) + 2z \Bigg(\sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1 z^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \mu_1 (\mu_1 \bar{z})^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2 z^k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \mu_2 (\mu_2 \bar{z})^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu_1 \bar{z}^k + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \nu_1 (\nu_1 z)^k + \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2 \bar{z}^k +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} D_k \nu_2 (\nu_2 z)^k \Bigg) = G_k z^k + G_{-k} \bar{z}^k . \qquad (10)$$

З умови (9) матимемо два рівняння стосовно коефіцієнтів розвинення невідомих функцій (8):

$$A_{k-1}(k+1) + 2A_{k+1}(k+2)\mu_1 + A_{k+3}(k+3)\mu_1^2 + B_{k-1}(k+1) +$$
$$+ 2B_{k+1}(k+2)\mu_2 + B_{k+3}(k+3)\mu_2^2 + C_{k-1}(k+1)\nu_1^{k+1} +$$
$$+ 2C_{k+1}(k+2)\nu_1^{k+2} + C_{k+3}(k+3)\nu_1^{k+3} + D_{k-1}(k+1)\nu_2^{k+1} +$$
$$+ 2D_{k+1}(k+2)\nu_2^{k+2} + D_{k+3}(k+3)\nu_2^{k+3} = F_k, \qquad (11)$$

$$A_{k-1}(k+1)\mu_1^k + 2A_{k+1}(k+2)\mu_1^{k+1} + A_{k+3}(k+3)\mu_1^{k+2} + B_{k-1}(k+1)\mu_2^k +$$
$$+ 2B_{k+1}(k+2)\mu_2^{k+1} + B_{k+3}(k+3)\mu_2^{k+2} + C_{k-1}(k+1)\nu_1 +$$
$$+ 2C_{k+1}(k+2)\nu_1^2 + C_{k+3}(k+3)\nu_1^3 + D_{k-1}(k+1)\nu_2 +$$
$$+ 2D_{k+1}(k+2)\nu_2^2 + D_{k+3}(k+3)\nu_2^3 = F_{-k}, \qquad (12)$$

і відповідно два рівняння з умови (10):

$$A_{k-1}(k+1)\mu_1 + 2A_{k+1}(k+2)\mu_1^2 + A_{k+3}(k+3)\mu_1^3 + B_{k-1}(k+1)\mu_2 +$$
$$+ 2B_{k+1}(k+2)\mu_2^2 + B_{k+3}(k+3)\mu_2^3 + C_{k-1}(k+1)\nu_1^k +$$
$$+ 2C_{k+1}(k+2)\nu_1^{k+1} + C_{k+3}(k+3)\nu_1^{k+2} + D_{k-1}(k+1)\nu_2^k +$$
$$+ 2D_{k+1}(k+2)\nu_2^{k+1} + D_{k+3}(k+3)\nu_2^{k+2} = G_k, \qquad (13)$$

$$A_{k-1}(k+1)\mu_1^{k+1} + 2A_{k+1}(k+2)\mu_1^{k+2} + A_{k+3}(k+3)\mu_1^{k+3} + B_{k-1}(k+1)\mu_2^{k+1} +$$
$$+ 2B_{k+1}(k+2)\mu_2^{k+2} + B_{k+3}(k+3)\mu_2^{k+3} + C_{k-1}(k+1) +$$
$$+ 2C_{k+1}(k+2)\nu_1 + C_{k+3}(k+3)\nu_1^2 + D_{k-1}(k+1) +$$
$$+ 2D_{k+1}(k+2)\nu_2 + D_{k+3}(k+3)\nu_2^2 = G_{-k}. \qquad (14)$$

Для подальшого дослідження системи рекурентних рівнянь (11)–(14) введемо такі допоміжні послідовності векторів:

$$M_k = (A_k, B_k, C_k, D_k)^\top, \qquad S_k = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{-k} \\ G_k \\ G_{-k} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2 \dots .$$

Тоді систему (11)–(14) можна подати у вигляді

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{k-1} + 2 \begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^{k+2} & \nu_2^{k+2} \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & \nu_1^2 & \nu_2^2 \\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1^{k+2} & \mu_2^{k+2} & \nu_1 & \nu_2 \end{pmatrix} M_{k+1} +$$
$$+ \begin{pmatrix} \mu_1^2 & \mu_2^2 & \nu_1^{k+3} & \nu_2^{k+3} \\ \mu_1^{k+2} & \mu_2^{k+2} & \nu_1^3 & \nu_2^3 \\ \mu_1^3 & \mu_2^3 & \nu_1^{k+2} & \nu_2^{k+2} \\ \mu_1^{k+3} & \mu_2^{k+3} & \nu_1^2 & \nu_2^2 \end{pmatrix} M_{k+3} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{-k} \\ G_k \\ G_{-k} \end{pmatrix}$$

або так:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{k-1} +$$

$$+ 2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{k+1} +$$

$$+ \mu_1^2\mu_2^2\nu_1^2\nu_2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix} M_{k+3} = \begin{pmatrix} F_k \\ G_k \\ F_{-k} \\ G_{-k} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Позначивши через Δ_k матрицю

$$\Delta_k = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

систему (15) запишемо у векторному вигляді

$$\Delta_k\left(M_{k-1} + 2\mu_1\mu_2\nu_1\nu_2 M_{k+1} + \mu_1^2\mu_2^2\nu_1^2\nu_2^2 M_{k+3}\right) = S_k. \tag{17}$$

Таким чином, достатньою умовою розв'язності рівняння (17), а отже, і задачі Неймана (1), (2), є умова

$$\det \Delta_k \neq 0 \qquad \forall k. \tag{18}$$

Зауважимо, що аналогічна умова виникала у роботі [5] у зв'язку з дослідженням умов існування і єдиності розв'язку задачі Діріхле для рівняння (4).

Розв'язок (17) існує, оскільки, згідно з (18), існує Δ_k^{-1}. Виконаємо заміну

$$\tilde{S}_k = \Delta_k^{-1} \cdot S_k, \qquad \mu_1\mu_2\nu_1\nu_2 = \delta. \tag{19}$$

Тоді рівняння (17) набуде вигляду

$$M_{k-1} + 2\delta M_{k+1} + \delta^2 M_{k+3} = \tilde{S}_k. \tag{20}$$

Отримане векторне рівняння (20) є рекурентним рівнянням четвертого порядку зі сталими коефіцієнтами (див. [9]). Його розв'язок M_k, згідно з формулами Муавра [9], має вигляд

$$M_k = Q_1(k-1)\left(\frac{i}{\sqrt{\delta}}\right)^k + k \cdot Q_2(k-1)\left(\frac{i}{\sqrt{\delta}}\right)^k + Q_3(k-1)\left(-\frac{i}{\sqrt{\delta}}\right)^k +$$

$$+ k \cdot Q_4(k-1)\left(-\frac{i}{\sqrt{\delta}}\right)^k, \tag{21}$$

де $Q_j(k-1)$, $j = 1, \ldots, 4$, − деякі вектор-поліноми.

Отже, встановлено достатні умови існування аналітичних функцій (8) (побудовано формули для послідовностей $M_k = (A_k, B_k, C_k, D_k)^\top$ коефіцієнтів A_k, B_k, C_k, D_k, $k = 1, 2, \ldots$, розвинення цих функцій), а, значить, існування розв'язку задачі Неймана (1), (2) у вигляді (7).

Таким чином, доведено таку теорему про достатні умови розв'язності задачі Неймана (1), (2) для правильно еліптичних рівнянь четвертого порядку в крузі.

Теорема 1. *Нехай рівняння* (1) *є правильно еліптичним, а* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, λ_4 *– корені відповідного характеристичного рівняння, які задовольняють умови* $\lambda_k \neq \lambda_j$, $k \neq j$, $\lambda_j \neq \pm i$ $\forall j = 1,\ldots,4$, *та умови* (3). *Нехай також* $\mu_1 = -\dfrac{\lambda_1 - i}{\lambda_1 + i}$, $\mu_2 = -\dfrac{\lambda_2 - i}{\lambda_2 + i}$, $\nu_1 = -\dfrac{\lambda_3 + i}{\lambda_3 - i}$, $\nu_2 = -\dfrac{\lambda_4 + i}{\lambda_4 - i}$ *задовольняють умову*

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \nu_1^{k+1} & \nu_2^{k+1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \nu_1^k & \nu_2^k \\ \mu_1^k & \mu_2^k & \nu_1 & \nu_2 \\ \mu_1^{k+1} & \mu_2^{k+1} & 1 & 1 \end{pmatrix} \neq 0, \qquad k = 3,4,\ldots, \tag{22}$$

а функції $f_1 \in C^{1,\alpha}(\partial K)$, $f_2 \in C^{\alpha}(\partial K)$, $0 < \alpha < 1$, *з умов* (2) *задані на межі* ∂K *і можуть бути продовжені до аналітичних функцій у крузі* K *та поза* K.

Тоді задача Неймана (1), (2) *матиме розв'язок у просторі* $C^4(K) \cap C^{3,\alpha}(\bar K)$, *який можна представити формулою*

$$u(z) = \Phi_1(z + \mu_1\bar z) + \Phi_2(z + \mu_2\bar z) + \Psi_1(\bar z + \nu_1 z) + \Psi_2(\bar z + \nu_2 z).$$

При цьому вектор-стовпець $M_k = (A_k, B_k, C_k, D_k)^\top$ *з коефіцієнтів* A_k, B_k, C_k, D_k, $k = 1,2,\ldots$, *розвинення функцій* Φ_k, Ψ_k, $k = 1,2\ldots$, *визначається за формулами Муавра* (21).

5. *Приклад.* Розроблену методику дослідження проілюструємо на простому прикладі розв'язання задачі Неймана для рівняння Лапласа в крузі:

$$\Delta u = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial k} = \varphi(x).$$

У комплексних змінних z, $\bar z$ оператор Лапласа матиме вигляд $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar z}$, тому загальним розв'язком рівняння $\Delta u = 0$ буде

$$u = \Phi_1(z) + \Phi_2(\bar z).$$

Умову Неймана $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial K}$ у комплексних змінних перепишемо так:

$$\left.\left(z\frac{\partial u}{\partial z} + \bar z\frac{\partial u}{\partial \bar z}\right)\right|_{\partial K} = \left.\left(z \cdot \Phi_1'(z) + \bar z \cdot \Phi_2'(\bar z)\right)\right|_{\partial K} = F(z), \tag{23}$$

де Φ_1', Φ_2' – деякі аналітичні функції:

$$\Phi_1'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \qquad \Phi_2'(\bar z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar z^k.$$

Підставимо ці розвинення функцій у степеневі ряди в граничну умову (23):

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k+1} + \sum_{k=0}^{\infty} b_k \bar z^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} \bar z^k = F(z).$$

Подамо аналітичну функцію $F(z)$ як

$$F(z) = G_1(z) + G_2(\bar z),$$

де $G_1(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$, $G_2(\bar z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k \bar z^k$. Остаточно маємо

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \overline{z}^k$$

або

$$a_0 z + b_0 \overline{z} + a_1 z^2 + b_1 \overline{z}^2 + a_2 z^3 + b_2 \overline{z}^3 + a_3 z^4 + b_3 \overline{z}^4 =$$
$$= c_0 + d_0 + c_1 z + d_1 \overline{z} + \ldots .$$

Звідси знаходимо коефіцієнти a_k, b_k розвинення невідомих функцій:

$$a_{k-1} = c_k, \qquad b_{k-1} = d_k,$$

зокрема, в термінах коефіцієнтів відомої граничної функції $F(z)$ отримуємо

$$c_0 + d_0 = 0 . \tag{24}$$

Зауваження. Насправді, умова (24) – це добре відома необхідна умова розв'язності задачі Неймана з граничною функцією $F(z)$: $\int\limits_{\partial K} F(z)\, dz = 0$, записана в термінах коефіцієнтів розвинення функції $F(z)$ у степеневий ряд:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} d_k \overline{z}^k .$$

Крім того, визначник типу (16) для оператора Лапласа не має сенсу, оскільки оператор Лапласа – це приклад так званого виродженого випадку правильно еліптичних рівнянь (характеристичне рівняння яких може мати корені $\pm i$). Такі рівняння, як було з'ясовано у [5] та в [1, 15, 16], вимагають окремого дослідження.

6. Дослідження умови (22). З'ясуємо, для яких $k = 3, 4, \ldots$ (скінченного або нескінченного набору) справджується умова (22).

З умов (3) і (5) випливає, що $|\mu_j| < 1$, $|\nu_j| < 1$, $j = 1, 2$. Отже, для достатньо великих $k = 3, 4, \ldots$ дослідимо асимптотику визначника (16):

$$\det \Delta_k \approx \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & \nu_2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (\mu_2 - \mu_1)(\nu_1 - \nu_2) \neq 0 ,$$

оскільки розглядаємо випадок різних коренів λ_j, $j = 1, \ldots, 4$, характеристичного рівняння правильно еліптичного рівняння (1).

Висновки. У поданій статті вперше досліджено задачу Неймана в крузі для правильно еліптичних диференціальних рівнянь четвертого порядку загального вигляду, тобто для рівнянь, корені $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ характеристичного полінома яких є різними, не дорівнюють $\pm i$ та задовольняють умови

$$\operatorname{Im} \lambda_1 > 0, \qquad \operatorname{Im} \lambda_2 > 0, \qquad \operatorname{Im} \lambda_3 < 0, \qquad \operatorname{Im} \lambda_4 < 0 .$$

Основним методом дослідження роботи є метод представлення аналітичних функцій, запропонований Н. Е. Товмасяном [27]. За допомогою цього методу встановлено та досліджено достатні умови розв'язності сформульованої задачі Неймана (1), (2) у просторі $C^4(K) \cap C^{3,\alpha}(\overline{K})$. Отримано формули розв'язку цієї задачі у явному вигляді. Зауважимо, що умова (22) виникала раніше в статті [5] у зв'язку з дослідженням проблеми розв'язності задачі Діріхле для рівнянь четвертого порядку, в тому числі і правильно еліптичних. Але в роботі [5] ця умова записана не в термінах коренів $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ характеристичного рівняння або чисел $\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2$, а в термінах кутів φ_1, $\varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ нахилу характеристик, які пов'язані з $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ співвідношенням $-\operatorname{tg}\varphi_j = \lambda_j \neq \pm i,\ j = 1,\dots,4$. Таким чином, для правильно еліптичних рівнянь четвертого порядку підтверджено гіпотезу про те, що умови розв'язності задач Діріхле та Неймана повинні співпадати, оскільки обидві крайові умови Діріхле та Неймана задовольняють умови Лопатинського. У роботі також наведено приклад застосування використаного методу для правильно еліптичного рівняння Лапласа другого порядку.

1. *Бабаян А. О.* О задаче Дирихле для неправильно эллиптического уравнения четвертого порядка // Неклассические уравнения математической физики: Сб. научн. работ. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2007. – С. 56–68.
2. *Бицадзе А. В.* О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. – 1948. – **3**, вып. 6(28). – С. 211–212.
3. *Бурский В. П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 2002. – 316 с.
4. *Бурский В. П.* О нарушении единственности решения задачи Дирихле для эллиптических систем в круге // Мат. заметки. – 1990. – **48**, № 3. – С. 32–36.
   Те саме: *Burskii V. P.* Breakdown of uniqueness of solutions of the Dirichlet problem for elliptic systems in a disc // Math. Notes. – 1990. – **48**, No. 3. – P. 894–897.
5. *Бурский В. П., Буряченко К. А.* Нарушение единственности решения задачи Дирихле для бестипных дифференциальных уравнений произвольного четного порядка в круге // Укр. мат. вісн. – 2012. – **9**, № 4. – С. 477–514.
   Те саме: *Burskii V. P., Buryachenko K. A.* On the breakdown of the uniqueness of a solution of the Dirichlet problem for typeless differential equations of arbitrary even order in a disk // J. Math. Sci. – 2013. – **190**, No. 4. – P. 539–566.
6. *Бурский В. П., Лесина Е. В.* Задача Неймана для неправильно эллиптических уравнений второго порядка // Тр. Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2011. – **23**. – С. 10–16.
7. *Буряченко Е. А.* Условия нетривиальной разрешимости однородной задачи Дирихле для уравнений произвольного четного порядка в случае кратных характеристик, не имеющих углов наклона // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 5. – С. 591–603.
   Те саме: *Buryachenko E. A.* Conditions of nontrivial solvability of the homogeneous Dirichlet problem for equations of any even order in the case of multiple characteristics without slope angles // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, No. 5. – P. 676–690.
8. *Буряченко К. О.* Розв'язність неоднорідних крайових задач для диференціальних рівнянь четвертого порядку // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 8. – С. 1011–1020.
   Те саме: *Buryachenko K. O.* Solvability of inhomogeneous boundary-value problems for fourth-order differential equations // Ukr. Math. J. – 2012. – **63**, No. 8. – P. 1165–1175.
9. *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. – Москва–Ленинград: Гостехтеоретиздат, 1950. – 48 с.
10. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
11. *Солдатов А. П.* О первой и второй краевых задачах для эллиптических систем на плоскости // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 5. – С. 674–686.
12. *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* Solvable models in quantum mechanics. – Berlin etc.: Springer-Verlag, 1988. – xiv+452 p.
13. *Aliev A. R., Elbably A. L.* Well-posedness of a boundary value problem for a class of third-order operator-differential equations // Bound. Value Probl. – 2013. – **2013**: 140, 15 p.
14. *Axler S., Bourdon P., Ramey W.* Harmonic function theory. – New York: Springer-Verlag, 2001. – 271 p.
15. *Babayan A. O.* Dirichlet problem for properly elliptic equation in unit disk // J. Contemp. Math. Anal. (=Изв. НАН Армении. Математика). – 2003. – **38**, № 6. – С. 39–48.
16. *Babayan A. O.* On unique solvability of Dirichlet problem for fourth order properly elliptic equation // Изв. НАН Армении. Математика. – 1999. – **34**, № 5. – С. 3–18.

17. *Begehr H., Kumar A.* Boundary value problems for the inhomogeneous polyanalytic equation. I // Analysis: Int. Math. J. Anal. and its Appl. – 2005. – **25**, No. 1. – P. 55–71.
18. *Beklaryan A. L.* On the existence of solutions of the first boundary value problem for elliptic equations on unbounded domains // Int. J. Pure Appl. Math. – 2013. – **88**, No. 4. – P. 499–522.
19. *Bonanno G., Pizzimenti P. F.* Neumann boundary value problems with not coercive potential // Mediterr. J. Math. – 2012. – **9**, No. 4. – P. 601–609.
20. *Brown B., Grubb G., Wood I. G.* M-functions for closed extensions of adjoint pairs of operators with applications to elliptic boundary problems // Math. Nachr. – 2009. – **282**, No. 3. – P. 314–347.
21. *Brown B., Marletta M., Naboko S., Wood I. G.* Boundary triplets and M-functions for non-selfadjoint operators, with applications to elliptic PDEs and block operator matrices // J. London Math. Soc. – 2008. – **77**, No. 3. – P. 700–718.
22. *Grubb G.* Distributions and operators. – (Graduate Texts in Mathematics. Vol. 252.) – New York: Springer, 2009. – 464 p.
23. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators I. Distribution theory and Fourier analysis. – Berlin: Springer-Verlag, 1983. – xi+443 p.
24. *Kerimov N. B., Kaya U.* Spectral properties of some regular boundary value problems for fourth order differential operators // Cent. Eur. J. Math. – 2013. – **11**, No. 1. – P. 94–111.
25. *Mokhtarzadeh M., Pournaki M., Razani A.* An existence-uniqueness theorem for a class of boundary value problems // Fixed Point Theory. – 2012. – **13**, No. 2. – P. 583–591.
26. *Posilicano A.* Self-adjoint extensions of restrictions // Operat. Matrices. – 2008. – **2**, No. 4. – P. 483–506.
27. *Tovmasyan N. E.* Non-regular differential equations and calculations of electromagnetic fields. – Singapore: World Scientific Publ., 1998. – 235 p.
28. *Tovmasian N. E., Zakarian V. S.* Dirichlet problem for properly elliptic equations in multiply connected domains // J. Contemp. Math. Anal. (=Изв. НАН Армении. Математика). – 2002. – **37**, No. 6. – P. 2–34.

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА В КРУГЕ ДЛЯ ПРАВИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Установлены и исследованы достаточные условия разрешимости задачи Неймана для правильно эллиптических уравнений четвертого порядка общего вида в единичном круге K *в пространстве* $C^4(K)\bigcap C^{3,\alpha}(\bar{K})$.

SOLVABILITY OF THE NEUMANN PROBLEM IN A DISK FOR THE FOURTH ORDER PROPERLY ELLIPTIC EQUATIONS

The sufficient conditions of solvability of the Neumann problem for the properly elliptic fourth-order equations of general form in a unit disk K *in the space* $C^4(K)\bigcap C^{3,\alpha}(\bar{K})$ *are determined and investigated.*

Донецьк. нац. ун-т, Донецьк

Одержано
15.05.13