УДК 621.01

*В. Е. Бербюк*

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ УПРУГОГО МАНИПУЛЯТОРА

Податливость конструкции робота приводит к появлению колебательных движений звеньев, что оказывает значительное влияние на быстродействие и точность перемещения грузов, снижает эффективность применения манипуляционных систем. Задачи динамики и управления манипуляторами с упругими звеньями в различных постановках исследовались в ряде работ [1—6, 8 и др.]. В данной работе исследуются задачи управления о приведении манипулятора из начального состояния в заданное положение с гашением упругих колебаний. Определены в аналитическом виде практически легко реализуемые кусочно-постоянные управления, перемещающие манипулятор в заданное положение с максимальной точностью позиционирования [7]. Показано, что при определенных соотношениях параметров системы найденные управления являются оптимальными по быстродействию.

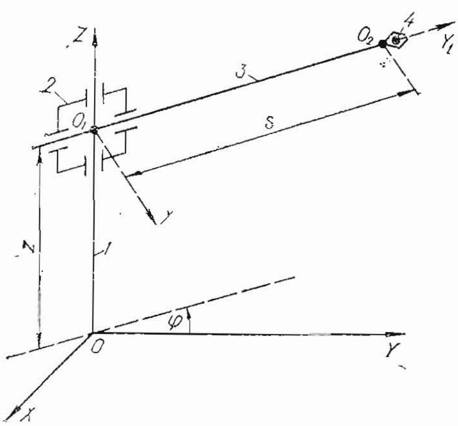


Рис. 1

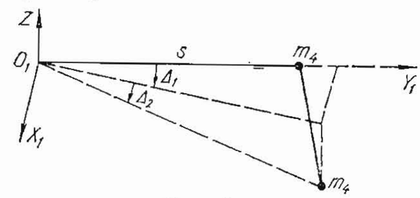


Рис. 2

Рассмотрим типовой манипулятор, кинематическая схема которого изображена на рис. 1. Механизм состоит из колонны *1*, каретки *2*, стрелы *3* и груза *4*, линейные размеры которого малы по сравнению с длиной стрелы. Колонна и каретка — твердые тела, стрела — тонкий, упругий прямолинейный стержень. В точке $O$ — одностепенной шарнир, допускающий вращение колонны вокруг оси $OZ$. Каретка соединена с колонной шарниром, допускающим поступательное перемещение ее вдоль этой же оси инерциальной системы координат $OXYZ$. Стрела связана с кареткой шарниром, позволяющим изменять ее длину. Предполагаем, что при движении манипулятора вследствие упругости стрелы, податливости шарниров и других факторов груз будет осуществлять малые относительные отклонения.

Для описания движения введем подвижную систему координат $O_1X_1Y_1Z$ с общей осью $Z$. Ось $O_1Y_1$ зададим по направлению касательной к нейтральной линии стрелы в точке $O_1$.

Введем обозначения (некоторые из них представлены на рис. 1, 2): $m_i$; $I_i$ — масса и момент инерции $i$-го тела относительно оси, проходящей через его центр инерции параллельно $OZ$ ($i = 1, 2, 3, 4$); $I_{31}$ — момент инерции стрелы относительно оси, проходящей через ее центр инерции параллельно $O_1X_1$; $l$ — расстояние центра инерции каретки от оси $Z$; $\varphi$ — угол между ортами осей $OY$ и $O_1Y_1$; $z$ — высота модуля *2*—*4* над плоскостью $OXY$; $s$ — длина участка стрелы $O_1O_2$; $M$ — сосредоточенный момент управляющих сил относительно оси $OZ$; $F_1$, $F_2$ — управляющие усилия, обеспечивающие изменение во времени высоты $z$ и длины $s$; $\Delta_1$, $\Delta_2$ — угловые относительные отклонения конца стрелы с грузом от равновесного состояния. Продольными относительными смещениями груза пренебрегаем.

Примем за обобщенные координаты величины $\varphi$, $z$, $s$, $\Delta_1$, $\Delta_2$. Кинетическая энергия системы имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\left[I\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2 + m_5\left(1 + \Delta_1^2 + \Delta_2^2\right)\dot{s}^2 + f_1\dot{\Delta}_0^2 + f_2\dot{\Delta}_2^2\right] -$$

$$- f_1\dot{\varphi}\dot{\Delta}_1 - m_6\dot{z}\left(\dot{s}\Delta_2 + s\dot{\Delta}_2\right) + m_5 s\dot{s}\left(\Delta_1\dot{\Delta}_1 + \Delta_2\dot{\Delta}_2\right), \qquad (1)$$

где $m = m_2 + m_3 + m_4$; $m_5 = m_4 + m_3/4$; $m_6 = m_4 + m_3/2$;

$$f_1 = I_3 + m_5 s^2;\ f_2 = I_{31} + m_5 s^2;\ I = I_1 + I_2 + m_2 l^2 + m_5 s^2\Delta_1^2 + f_1.$$

В данной работе податливость конструкции механизма будем моделировать упругим потенциалом. Суммарная потенциальная энергия, запасаемая системой вследствие как податливости конструкции, так и действия сил тяжести, имеет вид

$$\Pi = mgz - m_6 g s\Delta_2 + \left(k_1\Delta_1^2 + k_2\Delta_2^2\right)/2, \qquad (2)$$

где $k_1$, $k_2$ — приведенные угловые коэффициенты жесткости системы, определяемые, например, экспериментально [4].

С учетом (1), (2) уравнения движения манипулятора, выписанные в форме уравнений Лагранжа второго рода, имеют вид

$$I_0\ddot{\varphi} - f_1\ddot{\Delta}_1 + \dot{f}_1\left(\dot{\varphi} - \dot{\Delta}_1\right) = M, \qquad (3)$$

$$m\left(\ddot{z} + g\right) - m_6\left(s\ddot{\Delta}_2 + 2\dot{\Delta}_2\dot{s} + \Delta_2\ddot{s}\right) = F_1, \qquad (4)$$

$$m_5\ddot{s} - m_6\Delta_2\left(\ddot{z} + g\right) - f_1'\left(\dot{\varphi} - 2\dot{\Delta}_1\right)\dot{\varphi}/2 = F_2, \qquad (5)$$

$$f_1\left(\ddot{\Delta}_1 - \ddot{\varphi}\right) + m_5 s\Delta_1\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right) + f_1'\left(\dot{\Delta}_1 - \dot{\varphi}\right)\dot{s} + k_1\Delta_1 = 0, \qquad (6)$$

$$f_2\ddot{\Delta}_2 - m_6 s\left(\ddot{z} + g\right) + m_5 s\Delta_2\ddot{s} + f_2'\dot{s}\dot{\Delta}_2 + k_2\Delta_2 = 0. \qquad (7)$$

В формулах (1), (3) — (7) точкой обозначена производная по времени $t$, а штрихом — по переменной $s$. Кроме того, $I_0 = I\left(\Delta_1, s\right)|_{\Delta_1=0}$.

Таким образом, получена нелинейная система взаимосвязанных дифференциальных уравнений, которая при выбранных начальных условиях для $\varphi$, $z$, $s$, $\Delta_1$, $\Delta_2$ и заданных управлениях $M$, $F_1$, $F_2$ однозначно определяет движение манипулятора с упругой податливостью конструкции в линейном приближении по относительным отклонениям.

Сформулируем задачу 1. Требуется найти допустимые управления $M \in \mathcal{M}$, $F_1 \in \mathcal{F}_1$, $F_2 \in \mathcal{F}_2$, перемещающие за время $\tau$ систему (3) — (7) с ограничением

$$s(t) = L = \text{const} \qquad (8)$$

из состояния покоя

$$\varphi(0) = \dot{\varphi}(0) = \Delta_1(0) = \dot{\Delta}_1(0) = 0, \qquad (9)$$

$$z(0) = \dot{z}(0) = \Delta_2(0) = \dot{\Delta}_2(0) = 0 \qquad (10)$$

в конечное состояние с гашением относительных отклонений

$$\varphi(\tau) = a, \quad \dot{\varphi}(\tau) = \Delta_1(\tau) = \dot{\Delta}_1(\tau) = 0, \qquad (11)$$

$$z(\tau) = c, \quad \dot{z}(\tau) = \Delta_2(\tau) = \dot{\Delta}_2(\tau) = 0. \qquad (12)$$

Здесь $\mathcal{M}$, $\mathcal{F}_i$ — заданные множества кусочно-постоянных функций, такие, что для всех $M$ и $F_i$ выполняются условия $|M| \leqslant M_0$, $|F_i| \leqslant F_{i0}$, $i = 1, 2$.

Предположим, что угловая скорость вращения манипулятора мала по сравнению с низшими частотами упругих колебаний системы. Тогда эффектами, обусловленными действием продольных центробежных сил на упругий стержень, можно пренебречь [2], т. е. в уравнениях (5), (6) можно не учитывать члены с $\dot{\varphi}^2$. Введем безразмерные переменные $\varphi'$, $\Delta_1'$, $t'$, $u$, $z'$, $\Delta_2$, $t''$, $q$ и параметры $a'$, $c'$ по формулам

$$\varphi' = \left(I_*\varphi - f_{1*}\Delta_1\right)T_1^{-2}M_0^{-1}, \quad \Delta_1' = k_1\Delta_1 I_*/M_0 f_{1*},$$

$$u = MM_0^{-1}, \quad t' = tT_1^{-1}, \quad a' = aI_*T_1^{-2}M_0^{-1},$$

$$z' = (mz - m_6\Delta_2 L)\, T_2^{-2} F_0^{-1}, \quad \Delta_2' = mk_2\Delta_2/F_0 L m_6,$$
$$q = FF_0^{-1}, \quad t'' = tT_2^{-1}, \quad c' = cmT_2^{-2}F_0^{-1},$$

где $T_1 = [f_{1*}(I_* - f_{1*})/k_1 I_*]^{1/2}$; $T_2 = [(mf_{2*} - m_6^2 L^2)/k_2 m]^{1/2}$;

$$I_* = I_0(L); \quad f_{1*} = f_1(L); \quad f_{2*} = f_2(L);$$
$$F = F_1 - mg; \quad |F| \leqslant F_0.$$

С учетом принятых допущений и ограничения (8) в новых переменных уравнения движения принимают вид (штрихи в новых переменных для удобства опущены)

$$\ddot{\varphi} = u, \quad \ddot{\Delta}_1 + \Delta_1 = u, \quad |u| \leqslant 1, \tag{13}$$

$$\ddot{z} = q, \quad \ddot{\Delta}_2 + \Delta_2 = q + q_0, \quad q_0 = mg/F_0, \quad |q| \leqslant 1. \tag{14}$$

Запись начальных и конечных условий в новых переменных остается прежней и определяется формулами (9) — (12). Уравнение (5) может быть использовано при вычислении управления $F_2$, необходимого для движения манипулятора с ограничением (8).

Сформулируем задачу 2. В классе кусочно-постоянных функций определить управление $u(t)$, перемещающее за заданное время $\tau > \tau_0$ механическую систему в силу уравнений (13) из состояния (9) в конечное состояние (11). Здесь $\tau_0$ — время оптимального быстродействия в задаче управления двухмассовой колебательной системой, описываемой уравнениями (13) и граничными условиями (9), (11).

Представляет практический интерес поиск управлений с минимальным числом переключений. Поэтому решение задачи 2 будем искать в виде

$$u(t) = C_1 \text{ при } t \in (0, t_1), \; u(t) = C_2 \text{ при } t \in (t_1, \tau), \tag{15}$$

где $C_1$, $C_2$, $t_1$ — константы, подлежащие определению, причем $|C_i| \leqslant 1$, $0 < t_1 < \tau$ $(i = 1, 2)$.

Проинтегрируем уравнения (13) с управлением (15) при начальных условиях (9). Из требования выполнения граничных условий (11) для определения параметров $C_1$, $C_2$, $t_1$ получим уравнения

$$\begin{gathered} C_2(\tau - t_1)^2 + C_1 t_1 (2\tau - t_1) = 2a, \; C_2(\tau - t_1) + C_1 t_1 = 0, \\ (C_1 - C_2)\cos(\tau - t_1) + C_2 = C_1 \cos\tau, \; (C_1 - C_2)\sin(\tau - t_1) = C_1 \sin\tau. \end{gathered} \tag{16}$$

Решение системы уравнений (16) существует для произвольного $a > 0$ тогда и только тогда, когда время процесса управления

$$\tau = 2\pi k, \quad k = 2, 3, \ldots \tag{17}$$

В этом случае решение системы (16) имеет вид

$$C_1 = 2a/t_1\tau, \; C_2 = 2a/\tau(t_1 - \tau), \; t_1 = 2\pi n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{18}$$

В силу ограничения на управление параметры $n$ и $k$ в формулах (17), (18) должны удовлетворять одной из следующих систем неравенств:

$$n < k < 2n, \; a \leqslant 2\pi^2 k(k - n); \; k \geqslant 2n, \; a \leqslant 2\pi^2 nk. \tag{19}$$

Таким образом, решение задачи управления вращательным движением упругого манипулятора в классе кусочно-постоянных функций с одним переключением существует тогда и только тогда, когда время поворота принадлежит счетному множеству чисел вида (17). При этом искомое управление определяется формулами (15), (17) — (19).

В общем случае при $\tau \neq 2\pi k$ решение задачи 2 будем искать в виде

$$\begin{aligned} u(t) &= C \quad \text{при } t \in (0, t_1), \; t \in (t_2, t_3), \\ u(t) &= -C \text{ при } t \in (t_1, t_2), \; t \in (t_3, \tau). \end{aligned} \tag{20}$$

Интегрируя уравнения (13) с управлением (20) при начальных условиях (9) и удовлетворяя граничным условиям (11), для $C$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ получаем систему трансцендентных уравнений

$$t_3 - t_2 + t_1 = \tau/2, \; t_3^2 - t_2^2 + t_1^2 = \tau^2/2 - a/C,$$

$$\cos(\tau - t_1) - \cos(\tau - t_2) + \cos(\tau - t_3) = \cos^2(\tau/2), \quad (21)$$
$$\sin(\tau - t_1) - \sin(\tau - t_2) + \sin(\tau - t_3) = {}^1/_2 \sin\tau.$$

Можно убедиться, что решение системы (21) при всех $a > 0$ существует и имеет вид

$$t_1 = \tau/2 - \xi,\ t_2 = \tau/2,\ t_3 = \tau/2 + \xi,$$
$$C = a/(\tau^2/4 - 2\xi^2),\ \xi = \arccos[\cos^2(\tau/4)]. \quad (22)$$

Как показано в работе [9], функция $\Phi(\tau) = \tau^2/4 - 2\xi^2(\tau)$ монотонно возрастающая, а время оптимального быстродействия $\tau_0$ для двухмассовой колебательной системы есть корень уравнения

$$\Phi(\tau_0) = a. \quad (23)$$

Следовательно, если $\tau > \tau_0$, то $\Phi(\tau) > a$, и в силу (22) имеем $C < 1$, т. е. ограничение на искомое управление выполнено.

Таким образом, управление, определяемое формулами (20), (22), является решением задачи 2 при всех $a > 0$.

Сравнение найденных режимов управления вращением упругого манипулятора с известными, оптимальными по быстродействию управлениями двухмассовой колебательной системой [9] позволяет сделать следующие заключения. Если $a = 4\pi^2 n^2$, $\tau = \tau_0 = 4\pi n$, $n = 1, 2, \ldots$, то формулы (15), (18) определяют оптимальное по быстродействию управление вращательным движением упругого манипулятора. Для произвольного $a > 0$ оптимальное по быстродействию управление вращением упругого манипулятора определяется формулами (20), (22) при $\tau = \tau_0$, где $\tau_0$ — корень уравнения (23). Аналогично может быть решена задача управления поступательными движениями упругого манипулятора (14), (10), (12) и тем самым получено полное решение задачи 1.


1. *Акуленко Л. Д., Болотник Н. Н.* Об управляемом вращении упругого стержня.— Прикл. математика и механика, 1982, **46**, вып. 4, с. 587—595.
2. *Акуленко Л. Д., Михайлов С. А., Черноусько Ф. Л.* Моделирование динамики манипулятора с упругими звеньями.— Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1981, № 3, с. 118—124.
3. *Бербюк В. Е.* Колебания промышленных роботов.— В кн.: Пятый Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике (Алма-Ата, 27 мая — 3 июня 1981 г.) : Тез. докл. Алма-Ата : Наука, 1981, с. 56.
4. *Вернигор В. Н., Кравченко Н. Ф., Потеев М. И.* О выборе некоторых конструктивных параметров руки манипулятора.— Изв. вузов. Машиностроение, 1982, № 2, с. 52—55.
5. *Кузнецов Н. К.* О Демпфировании упругих колебаний манипуляторов.— В кн.: Управляемые механические системы. Иркутск : Иркут. политехн. ин-т, 1978, с. 89—101.
6. *Лакота Н. А., Рахманов Е. В., Шведов В. Н.* Управление упругим манипулятором на траектории.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1980, № 2, с. 53—59.
7. *Устройство* промышленных роботов / Е. И. Юревич, Б. Г. Аветиков, О. Б. Корытко и др.— Л. : Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1980.— 333 с.
8. *Черноусько Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора.— Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1981, № 5, с. 142—152.
9. *Черноусько Ф. Л., Акуленко Л. Д., Соколов Б. Н.* Управление колебаниями.— М. : Наука, 1980.— 384 с.



Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов



Получено 11.02.83



УДК 621.9.048.6.06



*Б. Я. Опирский*


## ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОГО ДВИЖЕНИЯ СЕКЦИОНИРОВАННОГО ВИБРОСТАНКА

В последнее время для отделочно-упрочняющих операций длинномерных деталей используют протяженные вибростанки, собранные из отдельных унифицированных секций, рабочие органы которых соединены упругими соединительными элементами [1, 3]. Такие станки обладают рядом преиму-