УДК 539.3

Б. В. Гера

ОПТИМИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ ПРИ ПОВОРОТЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА ВОКРУГ ОСИ

Рассмотрим тонкую упругую цилиндрическую оболочку конечной длины l, радиуса R и постоянной толщины $2h$. К краю $x = l$ оболочки присоединено абсолютно жесткое симметричное относительно оси x тело (рис. 1), осевой момент инерции которого J_x. На краю $x = 0$ оболочка нагружается осесимметричной равномерно распределенной и изменяющейся во времени нагрузкой интенсивности $q(t)$, под действием которой оболочка с присоединенным телом вращается вокруг оси x. Суммарный момент внешних сил на краю $x = 0$ относительно точки O определяется формулой $M(t) = 2\pi R^2 q(t)$.

Уравнение движения элемента оболочки имеет вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{1}$$

где $v = R\,\beta(x, t)$ — перемещение точек срединной поверхности оболочки вокруг оси x; $\beta(x, t)$ — угол поворота; t — время; $a^2 = 2[c^2(1-\nu) \times \times (1 + 4c_1^2)]^{-1}$; $c^2 = \dfrac{E}{\rho(1-\nu^2)}$; $c_1^2 = \dfrac{h^2}{3R^2}$; E — модуль Юнга; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность материала оболочки. Уравнение (1) рассматриваем при граничных условиях

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \varphi(t) \quad \text{при } x = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{при } x = l. \tag{3}$$

Здесь

$$\varphi(t) = \frac{1+\nu}{Eh(1+c_1^2)} q(t); \quad b^2 = \frac{J_x(1+\nu)}{2\pi R^3 Eh(1+c_1^2)}.$$

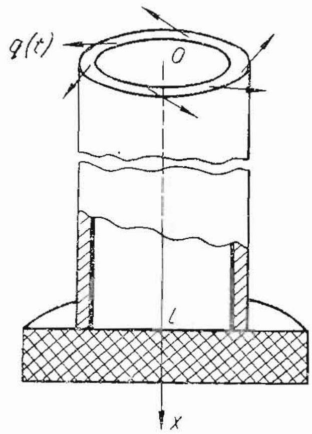

Рис. 1

Условие (2) представляет собой равенство внешней нагрузки и касательной компоненты напряжения на краю $x = 0$ оболочки, а условие (3) — равенство напряжения при $x = l$ силам инерции, возникающим при вращении абсолютно твердого тела вокруг оси x с изменяющейся во времени угловой скоростью.

Предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$

$$v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0. \tag{4}$$

Ставится задача: определить энергетически оптимальный, т. е. с минимальной нормой в $L_2(0, T)$, режим нагружения

$$q(t) = \frac{Eh}{1+\nu}(1 + c_1^2) \quad \varphi(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < t < T, \\ 0 & \text{при } t \geqslant T, \end{cases}$$

который обеспечит за время T поворот системы упругая оболочка — абсолютно твердое тело вокруг оси x на заданный угол β_*; при $t > T$ крутильные колебания или отдельные формы колебаний оболочки отсутствуют. Выполнение требований отсутствия колебаний при $t > T$ эквивалентно условиям

$$v = v_* \equiv R\beta_*, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = T. \tag{5}$$

Краевую задачу (1) — (3) приведем к следующей задаче с однородными граничными условиями:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \delta_+(x)\varphi(t) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{b^2}{a^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \ \text{при} \ x = l. \tag{8}$$

Здесь $\delta_+ (x)$ — обобщенная дельта-функция.

Решение задачи (4), (6) — (8), полученное методом разделения переменных, запишем в виде

$$v(x, t) = \frac{\alpha_0}{a^2} \int_0^t (t - \tau) \varphi(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{a\mu_m} \left[\int_0^t \varphi(\tau) \sin \frac{\mu_m}{a} (t - \tau) d\tau \right] \cos \mu_m x, \tag{9}$$

где μ_m — корни характеристического уравнения

$$\mu_m l \cos \mu_m l - \frac{a^2 l}{b^2} \sin \mu_m l = 0; \quad d_m = \| \sin \mu_m x \|_{L_2(0,l)}^{-2}$$

— коэффициенты разложения в ряд по собственным функциям задачи $\cos \mu_m x$ функции $\delta_+ (x)$. Дифференцируя $v(x, t)$ по времени t, получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\alpha_0}{a^2} \int_0^t \varphi(\tau) d\tau + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_m}{a^2} \left[\int_0^t \varphi(t) \cos \frac{\mu_m}{a} (t - \tau) d\tau \right] \cos \mu_m x. \tag{10}$$

Ограничимся при решении краевой задачи конечным числом m. Тогда из условий (5) следует, что соответствующая этому приближению функция $\varphi = \varphi_N$ должна удовлетворять следующим моментным равенствам:

$$\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right) \varphi_N(t) dt = \frac{v_* a^2}{\alpha_0 T}, \quad \int_0^T \varphi_N(t) \sin \frac{\mu_m}{a} (T - t) dt = 0, \tag{11}$$

$$\int_0^T \varphi_N(t) dt = 0, \quad \int_0^T \varphi_N(t) \cos \frac{\mu_m}{a} (T - t) dt = 0, \quad m = \overline{1, N}. \tag{12}$$

Равенства (11) обеспечивают поворот на заданный угол вокруг оси системы оболочка — жесткое тело, а равенства (12) — гашение N гармоник крутильных колебаний.

Задача управления свелась к определению функции $\varphi_N (t)$, доставляющей минимум функционалу

$$\| \varphi_N \|_{L_2(0,T)} = \left(\int_0^T \varphi_N^2(t) \, dt \right)^{1/2}$$

при условиях (11), (12). Решение этой задачи получим, использовав методику, изложенную в работе [1].

Введем обозначения: $\psi_1(t) = 1, \ \psi_2(t) = 1 - \frac{T}{t}$,

$$\psi_{2m+1}(t) = \sin \frac{\mu_m}{a} (T - t), \quad \psi_{2m+2}(t) = \cos \frac{\mu_m}{a} (T - t),$$

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{v_* a^2}{\alpha_0 T}, \quad A_n = 0 \quad (m = \overline{1, N+1}; \quad n = \overline{3, 2N+2})$$

и условия (11), (12) запишем в виде

$$\int_0^T \psi_n(t) \varphi_N(t) dt = A_n, \quad n = \overline{1, 2N+2}. \tag{13}$$

К семейству функций $\{\psi_n(t)\}_1^{2N+2}$ применим процесс ортогонализации Грама — Шмидта, т. е. введем функции

$$\Psi_n(t) = \psi_n(t) - \sum_{m=1}^{n-1} \lambda_{nm} \Psi_m(t), \quad n = \overline{1, 2N+2}, \tag{14}$$

где

$$\lambda_{nm} = \frac{(\psi_n, \Psi_m)}{(\Psi_m, \Psi_m)}; \quad (\psi_n, \Psi_m) = \int_0^T \psi_n(t)\,\Psi_m(t)\,dt. \tag{15}$$

Семейство функций $\{\Psi_n(t)\}_1^{2N+2}$ ортогонально на промежутке $[0, T]$. Моментные равенства (13) путем линейного преобразования приводятся к эквивалентным им равенствам вида

$$\int_0^T \Psi_n(t)\,\varphi_N(t)\,dt = K_n, \quad n = \overline{1,\ 2N+2}. \tag{16}$$

Здесь K_n определяются из решения системы линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{n-1} \lambda_{nm} K_m + K_n = A_n. \tag{17}$$

Чтобы убедиться в этом, умножим левую и правую части формулы (14) на $\varphi_N(t)$ и проинтегрируем от 0 до T:

$$\int_0^T \Psi_n(t)\,\varphi_N(t)\,dt = \int_0^T \psi_n(t)\,\varphi_N(t)\,dt - $$

$$- \sum_{m=1}^{n-1} \lambda_{nm} \int_0^T \Psi_m(t)\,\varphi_N(t)\,dt.$$

Подставив сюда вместо интегралов их выражения (13), (16), получим систему уравнений (17).

Искомое решение задачи управления может быть записано в виде [1]

$$\varphi_N(t) = \sum_{n=1}^{2N+2} \frac{K_n}{(\Psi_n, \Psi_n)} \Psi_n(t). \tag{18}$$

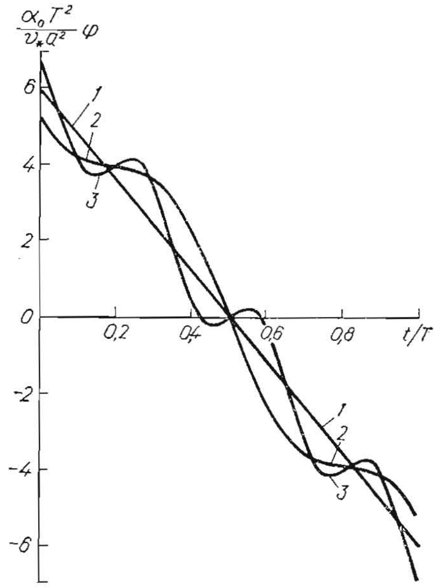

Рис. 2

В частности, при $N = 0$ получим функцию $\varphi_0(t)$, которой соответствует нагружение, обеспечивающее поворот рассматриваемой системы как абсолютно твердого тела на угол β_*. В этом случае

$$\Psi_1(t) = 1, \quad \Psi_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{T}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = \frac{v_* a^2}{\alpha_0 T} \tag{19}$$

и по формуле (18) имеем

$$\varphi_0(t) = 6\frac{v_* a^2}{\alpha_0 T^2}\left(1 - 2\frac{t}{T}\right). \tag{20}$$

Схема построения решения задачи такая, что для получения каждого последующего приближения к семейству функций $\Psi_n(t)$ и константам K_n предыдущего добавляются новые, определяемые формулами (14) и из решения уравнений (17) соответственно. Так, при $N = 1$ наряду с функциями $\Psi_1(t)$, $\Psi_2(t)$ и K_1, K_2, заданными в виде (19), получаем

$$\Psi_3(t) = \sin\omega_1\left(1 - \frac{t}{T}\right) - \lambda_{32}\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) - \lambda_{31},$$

$$\Psi_4(t) = \cos\omega_1\left(1 - \frac{t}{T}\right) - \lambda_{43}\sin\omega_1\left(1 - \frac{t}{T}\right) + (\lambda_{43}\lambda_{32} - \lambda_{42})\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) +$$

$$+ \lambda_{43}\lambda_{31} - \lambda_{41},$$

$$K_3 = -\lambda_{32}\frac{v_* a^2}{\alpha_0 T}, \quad K_4 = (\lambda_{32}\lambda_{43} - \lambda_{42})\frac{v_* a^2}{\alpha_0 T},$$

где $\omega_1 = \frac{\mu_1 T}{a}$ определяется формулами (15). Тогда функция управления $\varphi_1(t)$ имеет вид

$$\varphi_1(t) = \varphi_0(t) - \frac{v_* a^2}{\alpha_0 T}\left[\frac{\lambda_{32}}{(\Psi_3, \Psi_3)}\Psi_3(t) - \frac{\lambda_{43}\lambda_{32} - \lambda_{42}}{(\Psi_4, \Psi_4)}\Psi_4(t)\right]. \qquad (21)$$

На рис. 2 показано изменение функции $\varphi_1(t)$ на промежутке времени $[0, T]$ при значениях безразмерного параметра $\omega_1 = 10$ (кривая *2*) и $\omega_1 = 20$ (кривая *3*). Для сравнения приведен график функции $\varphi_0(t)$ (кривая *1*), полученной в пренебрежении упругими колебаниями оболочки.

1. *Бутковский А. Г., Пустильников Л. М.* Теория подвижного управления системами с распределенными параметрами.— М. : Наука, 1980.— 384 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
06.01.83

УДК 539.377

Н. И. Бугрий

ОПТИМИЗАЦИЯ СИЛОВОЙ НАГРУЗКИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С КОНЕЧНОЙ СДВИГОВОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

Рассмотрим свободную на краях круговую цилиндрическую оболочку длины $2l$, постоянной толщины $2h$, которая отнесена к смешанной системе координат (z, φ, γ), где z — осевая координата, отсчитываемая от центрального сечения; φ — кольцевая угловая координата; γ — координата, определяющая положение точки по толщине оболочки. Оболочка подвергается воздействию осесимметричной нормальной силовой нагрузки, определяемой интенсивностью $q_n(z)$. Предполагаем, что функция $q_n(z)$ подчинена ограничениям вида

$$\int_{-h}^{h} z^i q_n(z)\,dz = P_i \quad (i = 0,\ 1). \qquad (1)$$

Ставим задачу об определении такого стационарного распределения силовой нагрузки $q_n(z)$, при которой обеспечивается оптимально низкий уровень напряжений. В качестве критерия оптимизации примем функционал энергии упругой деформации оболочки [1]

$$J_1 = \int_{(V)} W dV. \qquad (2)$$

Здесь

$$W = \frac{1}{2E}\left[\sigma_{zz}^2 + \sigma_{\varphi\varphi}^2 + \sigma_{\gamma\gamma}^2 - 2\nu\left(\sigma_{zz}\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}\sigma_{\gamma\gamma} + \sigma_{\varphi\varphi}\sigma_{\gamma\gamma}\right) + \right.$$
$$\left. + 2(1+\nu)\left(\sigma_{z\varphi}^2 + \sigma_{\varphi\gamma}^2 + \sigma_{\gamma z}^2\right)\right] \qquad (3)$$

— плотность энергии деформации оболочки; σ_{ij} $(i, j = z, \varphi, \gamma)$ — компоненты тензора напряжений, представленные через перемещения U_1, U_2, U_3, где индексы 1, 2, 3 соответствуют координатным линиям z, φ, γ соответственно; (V) — область, занимаемая оболочкой; ν — коэффициент Пуассона; E — модуль Юнга.

В предположении линейности закона изменения перемещений по толщине оболочки с учетом осевой симметрии, т. е.

$$U_1 = u_0(z) + u_1(z)\gamma, \quad U_2 = 0, \quad U_3 = w_0(z) + w_1(z)\gamma, \qquad (4)$$

на основе вариационного принципа Лагранжа [2, 3] можно получить следующую систему исходных соотношений для определения функций u_i, w_i $(i = 0, 1)$ на срединной поверхности (Σ_0) оболочки:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + 4b_6\left(\frac{dw}{dx} + \frac{dw_1}{dx}\right) = 0,$$