Отметим, что полученные в данной работе условия на параметры индукционного нагрева в силу погранслойного характера асимптотического представления решения задачи (1) — (3) могут быть использованы и для других, отличных от рассмотренной, схем индукционного нагрева пластин, а также оболочек.

1. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.— Успехи мат. наук, 1957 12, вып. 5, с. 3—122.
2. *Рвачев В. Л., Рвачев В. А.* Неклассические методы теории приближений в краевых задачах.— Киев : Наук. думка, 1979.— 196 с.
3. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрагамовица, И. Стиган.— М. : Наука, 1979.— 832 с.
4. *Тозони О. В., Маергойз И. Д.* Расчет трехмерных электромагнитных полей.— Киев : Техніка, 1974.— 352 с.
5. *Чорный Б. И.* Асимптотическое представление решения уравнений электродинамики приповерхностного индукционного нагрева электропроводных оболочек.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 9, с. 83—86

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
06.06.83

УДК 536.12

О. В. Побережный

О ЗАМКНУТЫХ РЕШЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ, СЛОЯ, ПОЛУПЛОСКОСТИ, ПОЛУПРОСТРАНСТВА С РАЗРЕЗАМИ

В работе [2] выведены интегральные уравнения задач нестационарной теплопроводности для полосы и слоя с разрезами, рассмотрены некоторые из них и найдены их решения.

Пусть полоса занимает область $|x| < \infty$, $0 \leqslant y \leqslant h$, $|z| < \delta$. Предполагаем, что между боковыми поверхностями полосы и окружающей средой происходит симметричный относительно срединной плоскости $z = 0$ теплообмен по закону Ньютона. Пусть в такой полосе имеется N разрезов, проведенных вдоль гладких непересекающихся кривых L_i ($i = \overline{1, N}$), не выходящих на грани полосы. Температурное поле $T(x, y, t)$, удовлетворяющее уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \varkappa^2 T - \frac{1}{\chi}\frac{\partial T}{\partial x} = -\varkappa^2 T_c, \tag{1}$$

начальному условию $T(x, y, 0) = 0$ и одному из граничных условий на гранях полосы

$$\begin{gathered}\nu = 1, \quad T(x, 0, t) = T'(x, t), \quad T(x, h, t) = T''(x, t), \\ \nu = 2, \quad \left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=0} = q'(x, t), \quad \left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=h} = q''(x, t), \\ \nu = 3, \quad \left.\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y}\right|_{y=0} = q'(x, t), \quad T(x, h, t) = T''(x, t)\end{gathered} \tag{2}$$

и на разрезах L_i

$$T^{\pm}(\sigma_0, t) = T_i^{\pm}(\sigma_0, t), \quad \frac{\partial T^{\pm}}{\partial n_i^0} = q_i^{\pm}(\sigma_0, t), \tag{3}$$

представим в виде

$$T(x, y, t) = T_*(x, y, t) + T_0(x, y, t), \tag{4}$$

где $T_0(x, y, t)$ — решение неоднородного уравнения (1) для полосы без трещин с граничными условиями (2), которые определяются известными методами [4].

Из представления (4) следует, что $T_*(x, y, t)$ должно удовлетворять однородному уравнению (1) и одному из граничных условий на гранях полосы

$$\nu = 1, \quad T_*(x, 0, t) = T_*(x, h, t) = 0,$$
$$\nu = 2, \quad \left.\frac{\partial T_*}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial T_*}{\partial y}\right|_{y=h} = 0, \tag{5}$$
$$\nu = 3, \quad \left.\frac{\partial T_*}{\partial y}\right|_{y=0} = 0, \quad T_*(x, h, t) = 0$$

и на i-м разрезе

$$T_*^{\pm}(\sigma_0, t) = f^{\pm}(\sigma_0, t), \quad \frac{\partial T^{\pm}(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0} = g^{\pm}(\sigma_0, t), \tag{6}$$

где обозначено:

$$f_i^{\pm}(\sigma_0, t) = T_i^{\pm}(\sigma_0, t) - T_0(\sigma_0, t);$$
$$g^{\pm}(\sigma_0, t) = \frac{1}{\lambda} q_i^{\pm}(\sigma_0, t) - \frac{\partial T_0(\sigma_0, t)}{\partial n_i^0};$$
$$g_i(\sigma_0, t) = -\frac{\partial T_0(\sigma, t)}{\partial n_i^0}.$$

Таким образом, задача об определении нестационарного температурного поля в полосе с разрезами свелась к нахождению функции $T_*(x, y, t)$, удовлетворяющей однородному уравнению (1), граничным условиям (5), (6).

Представим $T_*(x, y, t)$ в виде

$$T_*(x, y, t) = \Phi_\nu(x, y, t) + \Psi_\nu(x, y, t). \tag{7}$$

Здесь

$$\Phi_\nu(x, y, t) = \frac{1}{4\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \frac{\varphi_j(\sigma, \tau)}{t-\tau} R_\nu(r_{j,mk}, t-\tau)\, d\sigma d\tau, \tag{8}$$

$$\Psi_\nu(x, y, t) = \frac{1}{8\pi\chi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \frac{\psi_j(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} R_\nu^1(r_{j,mk}, t-\tau)\, d\sigma d\tau. \tag{9}$$

Функции $\Phi_\nu(x, y, t)$ и $\Psi_\nu(x, y, t)$ являются решениями однородного уравнения (1), удовлетворяют граничным условиям (5), обладают свойствами потенциалов простого и двойного слоев [2]. Интегральные уравнения для определения неизвестных $\varphi_i(\sigma, \tau)$, $\psi_i(\sigma, \tau)$, полученные путем удовлетворения граничным условиям (3), имеют вид

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \frac{\varphi_j(\sigma, \tau)}{t-\tau} R_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\sigma d\tau =$$
$$= -\frac{1}{4\pi\chi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \frac{\psi_j(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} R_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau d\sigma + f_i^{+}(\sigma_0, t) + f_i^{-}(\sigma_0, t),$$
$$\psi_j(\sigma_0, t) = f_i^{+}(\sigma_0, t) - f_i^{-}(\sigma_0, t), \tag{10}$$

$$\frac{1}{8\pi\chi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \left[\frac{\partial \psi_j}{\partial \sigma} I_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau) - \psi_j(\sigma, t) I_\nu^2(r_{ij,mk}, t-\tau)\right] \frac{d\sigma d\tau}{(t-\tau)^2} -$$
$$- \frac{1}{8\pi\chi} \sum_{j=1}^{N} \int_0^t \psi_j(\sigma, \tau) I_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau) \left.\frac{d\tau}{(t-\tau)^2}\right|_{a_j}^{b_j} =$$
$$= \frac{1}{4\pi\chi} \sum_{j=1}^{N} \int_{L_j} \int_0^t \frac{\varphi_j(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} R_\nu^2(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau d\sigma + g_i^{+}(\sigma_0, t) + g_i^{-}(\sigma_0, t),$$
$$\varphi_j(\sigma_0, t) = g_i^{-}(\sigma_0, t) - g_i^{+}(\sigma_0, t), \tag{11}$$

где

$$R_\nu^1(r_{ij,mk},\ t-\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_1(\nu,\ k)\,[R(r_{ij,1k},\ t-\tau)\,r_{ij,1k}\sin\alpha_{ij,1k}+$$

$$+E_2(\nu)\,R(r_{ij,2k},\ t-\tau)\,r_{ij,2k}\sin\alpha'_{ij,2k}],\tag{12}$$

$$R_\nu^2(r_{ij,mk},\ t-\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_1(\nu,\ k)\,[R(r_{ij,1k},\ t-\tau)\,r_{ij,1k}\sin\alpha^0_{ij,1k}+$$

$$+E_2(\nu)\,R(r_{ij,2k},\ t-\tau)\,r_{ij,2k}\sin\alpha^0_{ij,2k}];$$

$$I_\nu^1(r_{ij,mk},\ t-\tau)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_1(\nu,\ k)\,[R(r_{ij,1k},\ t-\tau)\,r_{ij,1k}\cos\alpha^0_{ij,1k}+$$

$$+E_2(\nu)\,R(r_{ij,2k},\ t-\tau)\,r_{ij,2k}\cos\alpha^0_{ij,2k}];\tag{13}$$

$$I_\nu^2(r_{ij,mk},\ t-\tau)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}E_1(\nu,\ k)\left[\left(\frac{r^2_{ij,1k}}{4\chi(t-\tau)}-1\right)\cos(\alpha_{ij,1k}+\alpha^0_{ij,1k})\ \times\right.$$

$$\left.\times\ R(r_{ij,1k},\ t-\tau)+E_2(\nu)\left(\frac{r^2_{ij,2k}}{4\chi(t-\tau)}-1\right)\cos(\alpha'_{ij,2k}+\alpha^0_{ij,2k})\,R(r_{ij,2k},t-\tau)\right];\tag{14}$$

$$R(r_{ij,mk},\ t-\tau)=\exp\left[\frac{r^2_{ij,mk}}{4\chi(t-\tau)}-\varkappa^2\chi(t-\tau)\right].\tag{15}$$

Остальные обозначения приведены в работе [2].

Теорема 1. Если все L_i лежат на одной прямой, перпендикулярной к границе полосы, а функции f_i^+, f_i^- и g_i^+, g_i^- удовлетворяют условиям

$$f_i^+(\sigma_0,\ t)=-f_i^-(\sigma_0,\ t)=f_i(\sigma_0,\ t),\quad g_i^+(\sigma_0,\ t)=-g_i^-(\sigma_0,\ t)=-g_i(\sigma_0,t),\tag{16}$$

то системы интегральных уравнений (10), (11) имеют соответственно решения

$$\varphi_i(\sigma_0,\ t)=0,\quad \psi_i(\sigma_0,\ t)=2f_i(\sigma_0,\ t),\quad \varphi_i(\sigma_0,\ t)=2g_i(\sigma_0,\ t),\quad \psi_i(\sigma_0,\ t)=0.\tag{17}$$

Доказательство. Из условия, что L_i лежат на одной прямой, перпендикулярной к границе полосы, получаем $\alpha_{ij,1k}=\alpha'_{ij,2k}=\alpha^0_{ij,1k}=$ $=\alpha^0_{ij,2k}=0$. Учитывая это, из формул (12), (13) находим $R_\nu^1(r_{ij,mk},t-\tau)=$ $=0$, $R_\nu^2(r_{ij,mk},t-\tau)=0$. Эти соотношения вместе с условием (13) приводят системы интегральных уравнений (10), (11) к однородным системам относительно функций $\varphi_i(\sigma_0,t)$, $\psi_i(\sigma_0,t)$ соответственно, имеющим нулевые решения ввиду единственности решения задачи теплопроводности. Этот факт вместе со вторыми соотношениями (10), (11) приводит к выражениям (17), что и доказывает теорему.

Аналогичные теоремы справедливы для интегральных уравнений нестационарной теплопроводности для полуплоскости с разрезами, получающихся из соотношений (10), (11) путем устремления h к бесконечности. При этом граничные условия при $\nu=2$ и $\nu=3$ совпадают. Поэтому в дальнейшем для полуплоскости будем считать, что ν принимает значения 1, 2, а все L_i лежат на прямой, перпендикулярной к границе.

Если к системам интегральных уравнений (10), (11) применить теоремы операционного исчисления, то легко получить интегральные уравнения стационарной теплопроводности для полосы и полуплоскости. Теорема 1 и в этом случае сохраняет свой смысл, только в соотношениях (16), (17) все величины следует считать не зависящими от времени.

Рассмотрим слой, занимающий область $|x|<\infty$, $|y|<\infty$, $0\leqslant z\leqslant$ $\leqslant h$ и содержащий N непересекающихся поверхностных разрезов S_i $(i=$ $=\overline{1,N})$. Предполагаем, что поверхности S_i являются поверхностями Ляпунова. В дальнейшем все обозначения примем такими, как выше. При этом все величины следует рассматривать как функции пространственных координат x, y, z, а вместо L_i подразумевать области S_i.

Аналогично, как в плоской задаче, представим температурное поле $T_*(x, y, z, t)$ в виде

$$T_*(x, y, z, t) = W_\nu(x, y, z, t) + \Omega_\nu(x, y, z, t),$$

где

$$W_\nu(x, y, z, t) = \frac{1}{8\pi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{w_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_\nu(r_{j,mk}, t-\tau)\, d\tau ds;$$

$$\Omega_\nu(x, y, z, t) = \frac{1}{16\pi\chi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{\omega_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_\nu^1(r_{j,mk}, t-\tau)\, d\tau ds. \qquad (18)$$

Из граничных условий (6) с учетом свойств [3] функций $W_\nu(x, y, z, t)$, $\Omega_\nu(x, y, z, t)$ для определения w_j, ω_j получим системы интегральных уравнений

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{w_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau ds =$$

$$= -\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{\omega_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau ds + f_i^+(s_0, t) +$$

$$+ f_i^-(s_0, t), \quad \omega_i(s_0, \tau) = f_i^+(s_0, t) - f_i^-(s_0, t), \qquad (19)$$

$$\frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{\omega_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} I_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi\sqrt{\pi\chi}} \sum_{j=1}^{N} \int_{S_j} \int_0^t \frac{w_j(s, \tau)}{(t-\tau)^{3/2}} R_\nu^2(r_{ij,mk}, t-\tau)\, d\tau ds + g_i^+(s_0, t) - g_i^-(s_0, t); \qquad (20)$$

$$w_i(s_0, t) = g_i^-(s_0, t) - g_i^+(s_0, t),$$

где

$$R_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(\nu, k)\,[R(r_{ij,1k}, t-\tau) + E_2(\nu)\, R(r_{ij,2k}, t-\tau)];$$

$$R_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E_1(\nu, k) \left[\frac{\partial R(r_{ij,1k}, t-\tau)}{\partial n_j} + E_2(\nu) \frac{\partial R(r_{ij,2k}, t-\tau)}{\partial n_j'} \right];$$

$$R_\nu^2(r_{ij,mk}, t-\tau) = \frac{\partial R_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau)}{\partial n_i^0};$$

$$I_\nu(r_{ij,mk}, t-\tau) = \frac{\partial R_\nu^1(r_{ij,mk}, t-\tau)}{\partial n_i^0}, \quad R(r_{ij,mk}, t-\tau) = \exp\left(-\frac{r_{ij,mk}^2}{4\chi(t-\tau)}\right).$$

Теорема 2. Системы интегральных уравнений (19), (20) имеют соответственно решения

$$w_i(s_0, t) = 0, \quad \omega_i(s_0, t) = 2f_i(s_0, t),$$
$$w_i(s_0, t) = 2g_i(s_0, t), \quad \omega_i(s_0, t) = 0.$$

при условии, что все разрезы S_i лежат в одной плоскости, перпендикулярной к границе слоя, и

$$f_i^+(s_0, t) = -f_i^-(s_0, t) = f_i(s_0, t), \quad g_i^+(s_0, t) = -g_i^-(s_0, t) = -g_i(s_0, t).$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 2 справедлива для систем интегральных уравнений в полубесконечной ($h = \infty$) области и распространяется на интегральные уравнения стационарной теплопроводности для слоя и полубесконечной области с разрезами. Случай бесконечных тел с разрезами рассмотрен в работе [1].

1. *Кит Г. С., Побережный О. В.* Интегральные уравнения нестационарных задач теплопроводности для тел с трещинами.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1980, вып. 12, с. 58—63.
2. *Побережный О. В.* Задачи нестационарной теплопроводности для полосы и слоя с трещинами.— Там же, 1982, вып. 15, с. 58—63.
3. *Побережный О. В.* Тепловые потенциалы для полосы и слоя.— Там же, вып. 16, с. 94—98.
4. *Подстригач Я. С., Коляно Ю. М.* Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев : Наук. думка, 1972.— 308 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
17.02.83

УДК 539.377

Ю. М. Коляно, В. И. Прыймак

ИССЛЕДОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТЕЛ С НЕОДНОРОДНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ

Рассмотрим тонкую ортотропную полубесконечную пластинку $x \geqslant 0$, нагреваемую путем конвективного теплообмена по зоне $|y| \leqslant h$ поверхности $x = 0$ внешней средой температуры $t_0 = \mathrm{const}$ и теплоизолированную по остальной части этой поверхности. Через боковые поверхности $z = \pm\delta$ также осуществляется конвективный теплообмен со внешней средой нулевой температуры. Предполагается, что температура пластинки на бесконечности равна нулю.

Для определения установившегося температурного поля в пластинке имеем уравнение теплопроводности [5]

$$\Delta T = \varkappa^2 T \tag{1}$$

и граничные условия

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x=0} = h_0 (T|_{x=0} - t_0) N(y), \tag{2}$$

$$T|_{x\to\infty} = 0, \tag{3}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad k_y = \frac{\lambda_y}{\lambda_x}; \quad h_0 = \frac{\alpha_0}{\lambda_x}; \quad \varkappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda_x \delta};$$

λ_j — коэффициент теплопроводности вдоль оси j ($j = x, y$,); α_z — коэффициент теплоотдачи с боковых поверхностей $z = \pm\delta$; α_0 — коэффициент теплоотдачи с области нагрева поверхности $x = 0$ пластинки;

$$N(y) = S_-(y+h) - S_+(y-h); \quad S_\pm(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ {}^1/_2 \mp {}^1/_2, & \xi = 0, \\ 1, & \xi > 0. \end{cases}$$

Применяя интегральное преобразование Фурье по y к выражениям (1) — (3), соответственно получаем

$$\frac{d^2\overline{T}}{dx^2} = \gamma^2 \overline{T}, \tag{4}$$

$$\left.\frac{d\overline{T}}{dx}\right|_{x=0} = \overline{\theta}(\eta) - \overline{f}(\eta), \tag{5}$$

$$\overline{T}|_{x\to\infty} = 0, \tag{6}$$