УДК 539.3:534.1

И. А. Лоза, Н. А. Шульга

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АКУСТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ВОЛН В ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОМ ПОЛОМ ЦИЛИНДРЕ И СЛОЕ

Исследование акустоэлектрических волн Лэмба в анизотропном плоском слое принципиальных затруднений не вызывает (задача разрешима в экспоненциальных функциях), хотя анализ дисперсионных соотношений достаточно трудоемок и вряд ли осуществим без привлечения ЭВМ [1, 3, 4, 6, 7, 11]. В то же время при изучении гармонических колебаний и волн в полом цилиндрическом волноводе из пьезоэлектрических материалов ограничиваются частными случаями симметрии физических свойств [1, 10, 11] либо одномерными задачами [2, 5], допускающими решение через цилиндрические функции.

В настоящей статье рассматриваются осесимметричные акустоэлектрические волны в поляризованном по толщине полом пьезокерамическом цилиндре и как случай — плоском слое. Амплитуды бегущих волн представляются степенными рядами по толщинной координате [9], коэффициенты которых определяются из рекуррентных соотношений.

Рассмотрим полый пьезокерамический цилиндр с внешним $R+h$ и внутренним $R-h$ радиусами ($2h$ — толщина). Осесимметричные уравнения движения и электростатики в цилиндрической системе координат r, φ, z [6, 9] имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}(\sigma_{rr}-\sigma_{\varphi\varphi})+\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\sigma_{rz}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=\rho\,\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial D_r}{\partial r}+\frac{\partial D_z}{\partial z}=0,\quad E_r=-\frac{\partial\psi}{\partial r},\quad E_z=-\frac{\partial\psi}{\partial z},$$

$$e_{rr}=\frac{\partial u_r}{\partial r},\quad e_{zz}=\frac{\partial u_z}{\partial z},\quad 2e_{rz}=\frac{\partial u_z}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial z},$$

где u_r, u_z — механические смещения; σ_{rr}, $\sigma_{\varphi\varphi}$, σ_{zz}, σ_{rz} и e_{rr}, $e_{\varphi\varphi}$, e_{zz}, e_{rz} — напряжения и деформации; ψ — электростатический потенциал; D_r, D_z и E_r, E_z — компоненты векторов электрической индукции и напряженности соответственно. Определяющие соотношения радиально поляризованной пьезокерамики (класс $6mm$) замыкают систему (1):

$$\sigma_{rr}=\lambda_{33}e_{rr}+\lambda_{13}(e_{\varphi\varphi}+e_{zz})-\pi_{33}E_r,$$

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\lambda_{13}e_{rr}+\lambda_{11}e_{\varphi\varphi}+\lambda_{12}e_{zz}-\pi_{13}E_r, \tag{2}$$

$$\sigma_{zz}=\lambda_{13}e_{rr}+\lambda_{12}e_{\varphi\varphi}+\lambda_{11}e_{zz}-\pi_{13}E_r,$$

$$D_r=\pi_{33}e_{rr}+\pi_{13}(e_{\varphi\varphi}+e_{zz})+\varepsilon_{33}\varepsilon_0E_r,$$

$$D_z=2\pi_{15}e_{rz}+\varepsilon_{11}\varepsilon_0E_z.$$

Здесь использованы обозначения: λ_{ij}^e — упругие модули; π_{ij}^e — пьезомодули; $\varepsilon_{ij}^\sigma\varepsilon_0$ — абсолютные значения диэлектрических проницаемостей (верхние индексы опущены).

Боковые поверхности $r=R\pm h$ свободны от каких-либо механических воздействий и покрыты бесконечно тонкими электродами, которые закорочены. Граничные условия в этом случае запишутся в виде

$$\sigma_{rr}(R\pm h,\ z,\ t)=0,\quad \sigma_{rz}(R\pm h,\ z,\ t)=0,\quad \varphi(R\pm h,\ z,\ t)=0. \tag{3}$$

Пусть вдоль цилиндра распространяется осесимметричная волна

$$\{\psi,\ u_r,\ u_z\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{Re}\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon_0}}\,B_n^{(0)},\ B_n^{(1)},\ B_n^{(3)}\right\}x^nh\exp i(kz-\omega t) \tag{4}$$

с круговой частотой ω и волновым числом k.

Подставляя решение (4) в уравнения (1), (2) и приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем рекуррентные соотношения, позволяющие выразить неизвестные $B_2^{(m)}$, $B_3^{(m)}$, ... через шесть первых:

$$
\begin{gathered}
(n+2)(n+1)a_1B_{n+2}^{(1)} + (n+2)(n+1)a_6B_{n+2}^{(0)} = \\
= -(2n+1)(n+1)\varepsilon a_1B_{n+1}^{(1)} - (n^2\varepsilon^2a_1 - \zeta^2a_2 - \varepsilon^2a_3 + \Omega^2)B_n^{(1)} - \\
-(\Omega^2 - \zeta^2a_2)\varepsilon(2B_{n-1}^{(1)} + \varepsilon B_{n-2}^{(1)}) + (n+1)\zeta a_4B_{n+1}^{(3)} + \\
+\varepsilon\zeta[2na_4 + a_5]B_n^{(3)} - (n+1)\varepsilon(2na_6 + a_7)B_{n+1}^{(0)} - \\
-\{n\varepsilon^2[(n-1)a_6 + a_7] - \zeta^2a_8\}B_n^{(0)} + \varepsilon^2\zeta a_8(2B_{n-1}^{(0)} + \varepsilon B_{n-2}^{(0)}), \qquad (5) \\
(n+2)(n+1)b_1B_{n+2}^{(3)} = -(2n+1)(n+1)\varepsilon b_1B_{n-1}^{(3)} - (n^2\varepsilon^2b_1 - \zeta^2b_2 + \Omega^2)B_n^{(3)} - \\
-(\Omega^2 - \zeta^2b_2)\varepsilon(2B_{n-1}^{(3)} + \varepsilon B_{n-2}^{(3)}) - (n+1)\zeta b_3B_{n+1}^{(1)} - \varepsilon\zeta[2nb_3 + b_4]B_n^{(1)} - \\
-\varepsilon^2\zeta[(n-1)b_3 + b_4]B_{n-1}^{(1)} - (n+1)\zeta b_5B_{n+1}^{(0)} - \varepsilon\zeta]2nb_5 + b_6]B_n^{(0)} - \\
-\varepsilon^2\zeta[(n-1)b_5 + b_6]B_{n-1}^{(0)}, \\
-(n+2)(n+1)c_1B_{n+2}^{(0)} + (n+2)(n+1)c_5B_{n+2}^{(1)} = (2n+1)(n+1)\varepsilon c_1B_{n+1}^{(0)} + \\
+(n^2\varepsilon^2c_1 - \zeta^2c_2)B_n^{(0)} - \varepsilon\zeta^2c_2(2B_{n-1}^{(0)} + \varepsilon B_{n-2}^{(0)}) + (n+1)\zeta c_3B_{n+1}^{(3)} + \\
+\varepsilon\zeta[2nc_3 + c_4]B_n^{(3)} + \varepsilon^2\zeta[(n-1)c_3 + c_4]B_{n-1}^{(3)} - (n+1)\varepsilon(2nc_3 + c_6)B_{n+1}^{(1)} - \\
-\{n\varepsilon^2[(n-1)c_5 + c_6] - \zeta^2c_7\}B_n^{(1)} + \varepsilon\zeta^2c_7(2B_{n-1}^{(1)} + \varepsilon B_{n-2}^{(1)}).
\end{gathered}
$$

Здесь введены обозначения:

$$
x = \frac{r-R}{h}; \quad \varepsilon = \frac{h}{R}; \quad \zeta = kh; \quad \Omega = \frac{\omega h}{\sqrt{\frac{\lambda}{\rho}}}; \quad \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda};
$$

$$
\varkappa_{ij} = \frac{\pi_{ij}}{\sqrt{\varepsilon_0\lambda}}; \quad \overset{*}{R}_j(r) = R_j(x);
$$

$$
\begin{gathered}
a_1 = \mu_{33}; \quad a_2 = \mu_{55}; \quad a_3 = \mu_{11}; \quad a_4 = \mu_{13} + \mu_{55}; \quad a_5 = \mu_{13} - \mu_{12}; \\
a_6 = \varkappa_{33}; \quad a_7 = \varkappa_{33} - \varkappa_{13}; \quad a_8 = \varkappa_{15}; \quad b_1 = \mu_{55}; \quad b_2 = \mu_{11}; \\
b_3 = \mu_{13} + \mu_{35}; \quad b_4 = \mu_{12} + \mu_{55}; \quad b_5 = \varkappa_{13} + \varkappa_{15}; \quad b_6 = \varkappa_{15}; \quad c_1 = -\varepsilon_{33}; \\
c_2 = -\varepsilon_{11}; \quad c_3 = \varkappa_{13} + \varkappa_{15}; \quad c_4 = \varkappa_{13}; \quad c_5 = \varkappa_{33}; \quad c_6 = \varkappa_{13} + \varkappa_{55}; \quad c_7 = \varkappa_{13},
\end{gathered}
$$

где λ — параметр, имеющий размерность упругих постоянных; ε_0 — абсолютная диэлектрическая проницаемость вакуума.

Оставшийся произвол в выборе постоянных решения (4) позволяет удовлетворить граничным условиям (3):

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=0}^{\infty}\{(2n+1)\mu_{33}B_{2n+1}^{(1)} + (2n\mu_{33} + \mu_{11})\varepsilon B_{2n}^{(1)} - \zeta\mu_{13}(B_{2n}^{(3)} + \varepsilon B_{n-1}^{(3)}) + \\
+\varkappa_{33}[(2n+1)B_{2n+1}^{(0)} + 2n\varepsilon B_{2n}^{(0)}]\} = 0, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\{2(n+1)\mu_{33}B_{2n+2}^{(1)} + (2n\mu_{33} + \mu_{11} + \mu_{33})\varepsilon B_{2n+1}^{(1)} - \qquad (6) \\
-\zeta\mu_{13}(B_{2n+1}^{(3)} + \varepsilon B_{2n}^{(3)}) + \varkappa_{33}[(2n+2)B_{2n+2}^{(0)} + (2n+1)\varepsilon B_{2n+1}^{(0)}]\} = 0, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{55}[\zeta B_{2n}^{(1)} + (2n+1)B_{2n+1}^{(3)}] + \varkappa_{15}\zeta B_{2n}^{(0)}, \\
\sum_{n=0}^{\infty}\mu_{55}[\zeta B_{2n+1}^{(1)} + (2n+2)B_{2n+2}^{(3)}] + \varkappa_{15}\zeta B_{2n+1}^{(0)}, \\
\sum_{n=0}^{\infty}B_{2n}^{(0)} = 0, \quad \sum_{n=0}^{\infty}B_{2n+1}^{(0)} = 0.
\end{gathered}
$$

Используя рекуррентные зависимости (5), уравнения (6) можно свести к системе шести однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{q=1}^{6} m_{pq}(\mu_{ij},\ \varkappa_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ \varepsilon,\ \zeta,\ \Omega)\, X_q = 0 \quad (p = \overline{1,\ 6}), \tag{7}$$

где $(X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4,\ X_5,\ X_6) = (B_0^{(0)},\ B_0^{(1)},\ B_0^{(3)},\ B_1^{(0)},\ B_1^{(1)},\ B_1^{(3)})$. Из условия существования нетривиального решения системы (7) получаем дисперсионное соотношение

$$\det \{m_{pq}(\mu_{ij},\ \varkappa_{ij},\ \varepsilon_{ij},\ \varepsilon,\ \zeta,\ \Omega)\} = 0, \tag{8}$$

из которого определяется зависимость волнового числа ζ от частоты Ω.

Полагая в соотношении (8) $\varepsilon = 0$, получаем дисперсионное соотношение акустоэлектрических волн Лэмба в плоском слое. В этом случае определитель системы (8) распадается на два независимых сомножителя, соответствующих симметричным и антисимметричным (относительно срединной поверхности) волнам. Так, полагая в выражениях (5), (6) $B_0^{(0)} = B_0^{(1)} = B_1^{(3)} = 0$, получаем симметричные моды акустических волн. Если положить $B_1^{(0)} = B_1^{(1)} = B_0^{(3)} = 0$, то получим антисимметричные моды. Частоты запирания таких волн ($k = 0$) [9] определяются аналитически из двух независимых систем уравнений

$$\begin{gathered} \mu_{55} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \Omega^2 u_r + \varkappa_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = 0, \\ -\varepsilon_{33} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \varkappa_{33} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} = 0 \end{gathered} \tag{9}$$

с граничными условиями

$$\left(\mu_{33} \frac{\partial u_r}{\partial r} + \varkappa_{33} \frac{\partial \psi}{\partial r}\right)_{x=\pm 1} = 0, \quad \psi|_{x=\pm 1} = 0 \tag{10}$$

и

$$\mu_{55} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \Omega^2 u_z = 0 \tag{11}$$

с граничным условием

$$\mu_{55} \left.\frac{\partial u_z}{\partial r}\right|_{x=\pm 1} = 0. \tag{12}$$

Волны, которые рождаются как чисто упругие продольные, будем обозначать $W(n)$, где n — порядковый номер дисперсионной ветви (критические частоты находятся из спектральной задачи (11), (12)), а которые рождаются как акустоэлектрические сдвиговые — $U(n)$ (критические частоты находятся из спектральной задачи (9), (10)). Кроме того, если волна является симметричной или антисимметричной, будем добавлять букву S или A соответственно. Значения соответствующих частот запирания определяются формулой

$$SU\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\mu_{33} + K_{33}^2} \quad (n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

Здесь $K_{33}^2 = \dfrac{\varkappa_{33}^2}{\varepsilon_{33}}$; $AU\left(\dfrac{n}{2}\right) = \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots\ (n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots)$, где $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots$ — корни уравнения $\gamma \cos \gamma - K_{33}^2 \sin \gamma = 0$; для больших значений n справедливы приближенные выражения

$$AU\left(\frac{n}{2}\right) \simeq \frac{\pi}{2} n \sqrt{\mu_{33} + K_{33}^2} \quad (n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots),$$

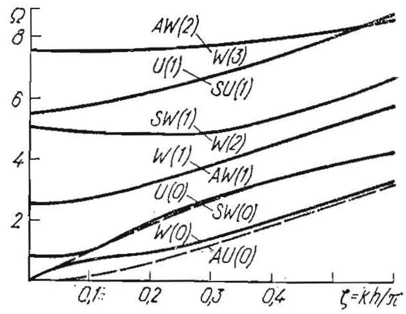
$$SW\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{\pi}{2} n \sqrt{\mu_{55}} \quad (n = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots),$$

$$AW\left(\frac{n+1}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \sqrt{\mu_{55}} \quad (n = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots).$$

Анализ дисперсионных соотношений проводится численно. В качестве материала рассматривалась пьезокерамика PZT-4 со следующими параметрами: $\lambda_{11} = 13{,}9 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{12} = 7{,}78 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{13} = 7{,}43 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{33} = 11{,}5 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\lambda_{55} = 2{,}56 \cdot 10^{10}$ Н/м^2; $\pi_{13} = -5{,}2$ к/м^2; $\pi_{15} = 12{,}7$ к/м^2; $\pi_{33} = 15{,}1$ к/м^2; $\varepsilon_{11} = 730$; $\varepsilon_{33} = 635$; значения нормирующего множителя $\lambda = 10^{10}$ Н/м^2.

Для плоского слоя из пьезокерамики ЦТС-19 получено хорошее совпадение с результатами работ [7, 8] (в пределах действительной оси волновых чисел).

На рисунке приведены графики шести первых значений $\zeta = \frac{kh}{\pi}$. Штриховыми линиями обозначены дисперсионные зависимости для плоского слоя ($\varepsilon = 0$), сплошными — для цилиндра ($\varepsilon = 0{,}25$). Из рисунка следует, что первая дисперсионная ветвь для полого цилиндра при малых ζ совпадает с симметричной модой волн, которые рождаются как несвязанные продольные, с ростом же ζ она выходит на антисимметричную моду волн, которые рождаются как акустоэлектрические сдвиговые. Вторая ветвь дисперсионных зависимостей для полого цилиндра с увеличением ζ выходит на симметричную моду волн, которые рождаются как чисто упругие продольные. Таким образом, область малых ζ для первых двух дисперсионных ветвей является областью наиболее сильного взаимодействия продольных и сдвиговых волн. С увеличением частоты дисперсионные зависимости для плоского слоя и полого цилиндра мало различаются. Так, уже третья ветвь дисперсионных зависимостей для полого цилиндра практически совпадает с соответствующей ветвью для плоского слоя.



1. *Ивина Н. Ф., Касаткин Б. А.* Нормальные волны в анизотропном пьезоактивном волноводе.— Дефектоскопия, 1975, № 4, с. 27—32.
2. *Коломиец Г. А., Улитко А. Ф.* Связанные электроупругие колебания пьезокерамических цилиндров.— Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1970, вып. 9, с. 5—12.
3. *Коцаренко Н. Я. и др.* Электронное усиление волн Лэмба в пьезополупроводниках.— Укр. физ. журн., 1971, **16**, № 10, с. 1708—1717.
4. *Кудрявцев Б. А.* Механика пьезоэлектрических материалов.— Итоги науки и техники.— Механика деформируемого твердого тела, 1978, **11**, с. 5—66.
5. *Лазуткин В. Н., Михайлов А. И.* Колебания пьезокерамических цилиндров конечных размеров с поляризацией по высоте.— Акуст. журн., 1976, **22**, вып. 3, с. 393—399.
6. *Мадорский В. В., Устинов Ю. А.* Симметричные колебания пьезоэлектрических пластин.— Изв. АН АрмССР. Механика, 1976, **29**, № 5, с. 51—58.
7. *Мадорский В. В., Устинов Ю. А.* Построение системы однородных решений и анализ корней дисперсионного уравнения антисимметричных колебаний пьезоэлектрических плит.— Журн. прикл. механики и техн. физики, 1976, № 6, с. 138—145.
8. *Физическая* акустика / Под ред. У. Мэзона.— М. : Мир, 1966.— Т. 1. Ч. А. 592 с.
9. *Шульга Н. А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре.— Прикл. механика, 1974, **10**, № 1, с. 14—18.
10. *Paul H. S.* Torsional vibrations a circular cylinder of piezoelectric β-quartz.—Arch. mech. stosow., 1962, **14**, N 1, p. 127—134.
11. *Paul H. S.* Vibrations of circular cylindrical shells of piezoelectric silver jodide crystals.— J. Acoust. Soc. Amer., 1960, **40**, N 5, p. 1077—1080.

Ин-т механики АН УССР, Киев
Получено 23.05.83