

**ТЕМПЕРАТУРНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ В ТОНКОЙ ПЛАСТИНКЕ,
НАГРЕВАЕМОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ
ИСТОЧНИКОВ ТЕПЛА**

Рассмотрим тонкую изотропную пластинку толщиной 2δ , физико-механические характеристики которой не зависят от температуры. Пусть рассматриваемая пластинка на протяжении конечного промежутка времени нагревается равноудаленными друг от друга и расположенными на одной прямой источниками тепла одинаковой мощности. Через боковые поверхности пластинки происходит конвективный теплообмен со средой нулевой температуры. Начальная температура пластинки равна нулю.

Температурное поле такой пластинки определится из уравнения теплопроводности [2]

$$\Delta T - \kappa^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{\omega}{2\lambda_t \delta} \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$T|_{|x| \rightarrow \infty} = 0, \quad T|_{\tau=0} = 0, \quad (2)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа; λ_t — коэффициент теплопроводности; $\kappa^2 = \alpha/\lambda_t \delta$; α — коэффициент теплообмена с боковых поверхностей пластинки $z = \pm \delta$; $a = \lambda_t/c\rho$ — коэффициент температуропроводности; c , ρ — теплоемкость и плотность материала пластинки соответственно; $\omega = \int_{-\delta}^{\delta} W dz$ — отнесенная к единице площади срединной плоскости пластинки плотность источников тепла. Плотность источников тепла W в данном случае имеет вид

$$W = \frac{q}{2l} \delta(x) \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos \lambda_m y \right) N(\tau). \quad (3)$$

Здесь q — мощность источников тепла; $\lambda_m = \frac{m\pi}{l}$; $2l$ — расстояние между соседними источниками тепла; $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; $N(\tau) = S_+(\tau) - S_+(\tau - \tau_1)$; τ_1 — время работы источников тепла;

$$S_+(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0, \\ 0, & \tau \leq 0. \end{cases}$$

Используя преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по координате y [1, 3], находим решение краевой задачи теплопроводности (1), (2) в изображениях

$$\tilde{T} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{q}{2l\lambda_t \gamma} \frac{1 - e^{-s\tau_1}}{s} e^{-|x|\gamma} \left\{ \delta(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [\delta(\eta + \lambda_m) + \delta(\eta - \lambda_m)] \right\}, \quad (4)$$

где

$$\gamma^2 = \frac{s}{a} + \kappa^2 + \eta^2; \quad \tilde{T} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\tau} T e^{-i\eta y - s\tau} d\tau dy;$$

s , η — параметры преобразования Лапласа и Фурье соответственно.

Осуществив в выражении (4) обратное преобразование в соответствии с формулами обращения Фурье — Лапласа, найдем такое выражение температурного поля рассматриваемой пластинки:

$$T = \frac{q}{8l\lambda_t} \left[\frac{P(x, \tau)}{\kappa} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{P_m(x, \tau)}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}} \cos \lambda_m y \right]. \quad (5)$$

Здесь и далее использованы обозначения:

$$P_m(x, \tau) = E_m^-(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) E_m^-(x, \tau - \tau_1); \quad E_0^-(x, \tau) = \\ = E_m^-(x, \tau)|_{\lambda_m=0}; \quad P(x, \tau) = E_0^-(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) E_0^-(x, \tau - \tau_1);$$

$$E_m^\pm(x, \tau) = e^{-|x| \sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2 \sqrt{a\tau}} - \sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2} a\tau \right) \pm \\ \pm e^{|x| \sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}} \operatorname{erfc} \left(\frac{|x|}{2 \sqrt{a\tau}} + \sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2} a\tau \right); \quad \operatorname{erfc}(\xi) = 1 - \operatorname{erf}(\xi);$$

$$\operatorname{erf}(\xi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-t^2} dt \text{ — интеграл вероятности.}$$

Напряженное состояние рассматриваемой бесконечной пластинки, обусловленное температурным полем (5), определяется по формулам [2]

$$\sigma_{xx} = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad \sigma_{xy} = 2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}, \quad \sigma_{yy} = -2G \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где Ψ — термоупругий потенциал перемещений, являющийся частным решением уравнения

$$\Delta \Psi = (1 + \nu) \alpha_t T. \quad (7)$$

Здесь ν_t — коэффициент Пуассона, а α_t — температурный коэффициент линейного расширения материала пластинки.

Поскольку рассматриваемая пластинка свободна от внешней нагрузки, компоненты температурных напряжений (6) должны удовлетворять таким условиям:

$$\sigma_{xx}|_{|x| \rightarrow \infty} = \sigma_{xy}|_{|x| \rightarrow \infty} = \sigma_{yy}|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (8)$$

Применив к (6) — (8) преобразование Фурье по координате y и Лапласа по времени τ , получим

$$\tilde{\sigma}_{xx} = 2G\eta^2 \tilde{\Psi}, \quad \tilde{\sigma}_{xy} = -2G\eta i \frac{d\tilde{\Psi}}{dx}, \quad \tilde{\sigma}_{yy} = -2G \frac{d^2 \tilde{\Psi}}{dx^2}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \right) \tilde{\Psi} = (1 + \nu) \alpha_t \tilde{T}, \quad (10)$$

$$\tilde{\sigma}_{xx}|_{|x| \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_{xy}|_{|x| \rightarrow \infty} = \tilde{\sigma}_{yy}|_{|x| \rightarrow \infty} = 0. \quad (11)$$

Частное решение уравнения (10), удовлетворяющее условиям (11), имеет вид

$$\tilde{\Psi} = \frac{(1 + \nu) \alpha_t q}{2l\lambda_t} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-s\tau_1}}{s \left(\frac{s}{a} + \kappa^2 \right)} \left(\frac{e^{-|x|\gamma}}{\gamma} - \frac{e^{-|x||\eta|}}{|\eta|} \right) \times \\ \times \left\{ \delta(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [\delta(\eta + \lambda_m) + \delta(\eta - \lambda_m)] \right\}. \quad (12)$$

Подставив решение (12) в (9), найдем трансформанты Фурье — Лапласа температурных напряжений

$$\tilde{\sigma}_{xx} = \eta^2 \left(\frac{e^{-|x|\gamma}}{\gamma} - \frac{e^{-|x||\eta|}}{|\eta|} \right) L(s, \eta), \\ \tilde{\sigma}_{xy} = i\eta \left(e^{-|x|\gamma} - e^{-|x||\eta|} \right) L(s, \eta) \operatorname{sgn} x, \\ \tilde{\sigma}_{yy} = -(\gamma e^{-|x|\gamma} - |\eta| e^{-|x||\eta|}) L(s, \eta), \quad (13)$$

где

$$L(s, \eta) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{G(1 + \nu) \alpha_t q}{l\lambda_t} \frac{1 - e^{-s\tau_1}}{s \left(\frac{s}{a} + \kappa^2 \right)} \times \\ \times \left\{ \delta(\eta) + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} [\delta(\eta + \lambda_m) + \delta(\eta - \lambda_m)] \right\}.$$

Осуществив в выражениях (13) обратное преобразование Фурье — Лапласа, получим такие выражения температурных напряжений в рассматриваемой пластинке:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= E_q \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_m^{(1)}(x, \tau) \cos \lambda_m y, \\ \sigma_{xy} &= E_q \operatorname{sgn} x \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_m^{(2)}(x, \tau) \sin \lambda_m y, \\ \sigma_{yy} &= -E_q \left[\Phi_0(x, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_m^{(3)}(x, \tau) \cos \lambda_m y \right].\end{aligned}\quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\Phi_m^{(1)}(x, \tau) &= \frac{\lambda_m}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}} E_m^-(x, \tau) - e^{-\kappa^2 a \tau} E_{m0}^-(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) \times \\ &\times \left[\frac{\lambda_m}{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}} E_m^-(x, \tau - \tau_1) - e^{-\kappa^2 a (\tau - \tau_1)} E_{m0}^-(x, \tau - \tau_1) \right] + 2e_m(x, \tau); \\ \Phi_m^{(2)}(x, \tau) &= E_m^+(x, \tau) - e^{-\kappa^2 a \tau} E_{m0}^+(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) [E_m^+(x, \tau - \tau_1) + \\ &+ e^{-\kappa^2 a (\tau - \tau_1)} E_{m0}^+(x, \tau - \tau_1)] + 2e_m(x, \tau); \\ \Phi_m^{(3)}(x, \tau) &= \frac{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}}{\lambda_m} E_m^-(x, \tau) - e^{-\kappa^2 a \tau} E_{m0}^-(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) \times \\ &\times \left[\frac{\sqrt{\kappa^2 + \lambda_m^2}}{\lambda_m} E_m^-(x, \tau - \tau_1) - e^{-\kappa^2 a (\tau - \tau_1)} E_{m0}^-(x, \tau - \tau_1) \right] + 2e_m(x, \tau); \\ \Phi_0(x, \tau) &= \kappa P(x, \tau); \quad E_q = \frac{E \alpha_l q}{8 \lambda_l \kappa^2}; \quad E = 2G(1 + \nu); \quad E_{m0}^{\pm}(x, \tau) = \\ &= E_m^{\pm}(x, \tau)|_{\kappa=0}; \quad e_m(x, \tau) = e^{-|\kappa| \lambda_m} [(e^{-a \kappa^2 \tau} - 1) - S_+(\tau - \tau_1) (e^{-a \kappa^2 (\tau - \tau_1)} - 1)].\end{aligned}$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из решений (5), (14).

1. Перейдя в выражениях (5), (14) к пределу при $\kappa \rightarrow 0$, получим решение рассматриваемой задачи в случае теплоизолированных боковых поверхностей $z = \pm \delta$:

$$T = \frac{q}{8 \lambda_l l} \left[P_0(x, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} P_{m0}(x, \tau) \cos \lambda_m y \right]; \quad (15)$$

$$\sigma_{xx} = E_q^* \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_{m0}^{(1)}(x, \tau) \cos \lambda_m y,$$

$$\sigma_{xy} = E_q^* \operatorname{sgn} x \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_{m0}^{(2)}(x, \tau) \sin \lambda_m y, \quad (16)$$

$$\sigma_{yy} = -E_q^* \left[\frac{1}{2} P_0(x, \tau) + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \Phi_{m0}^{(3)}(x, \tau) \cos \lambda_m y \right],$$

где $E_q^* = E \alpha_l q / 8 \lambda_l l$;

$$\Phi_{m0}^{(1)}(x, \tau) = \frac{1}{4 \lambda_m} [L_m^{(1)}(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) L_m^{(1)}(x, \tau - \tau_1)] - e_{m0}(x, \tau);$$

$$\Phi_{m0}^{(2)}(x, \tau) = \frac{1}{4 \lambda_m} [L_m^{(2)}(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) L_m^{(2)}(x, \tau - \tau_1)] - e_{m0}(x, \tau);$$

$$\Phi_{m0}^{(3)}(x, \tau) = \frac{1}{4 \lambda_m} [L_m^{(3)}(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) L_m^{(3)}(x, \tau - \tau_1)] - e_{m0}(x, \tau);$$

$$L_m^{(1)}(x, \tau) = (2a\lambda_m^2 - 1) E_{m0}^-(x, \tau) - \lambda_m |x| E_{m0}^+(x, \tau); \quad L_m^{(2)}(x, \tau) = \\ = 2a\lambda_m \tau E_{m0}^+(x, \tau) - |x| E_{m0}^-(x, \tau); \quad L_m^{(3)}(x, \tau) = (2a\lambda_m \tau + 1) E_{m0}^-(x, \tau) - \\ - |x| E_{m0}^+(x, \tau) + \frac{4}{\lambda_m} \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} e^{-\lambda_m^2 a \tau - \frac{x^2}{4a\tau}};$$

$$e_{m0}(x, \tau) = ae^{-\lambda_m |x|} [\tau - (\tau - \tau_1) S_+(\tau - \tau_1)]; \quad P_0(x, \tau) = 4 \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a\tau}} - \\ - 2|x| \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a\tau}}\right) - S_+(\tau - \tau_1) \left[4 \sqrt{\frac{a(\tau - \tau_1)}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4a(\tau - \tau_1)}} - \right. \\ \left. - 2|x| \operatorname{erfc}\left(\frac{|x|}{2\sqrt{a(\tau - \tau_1)}}\right) \right];$$

$$P_{m0}(x, \tau) = E_{m0}^-(x, \tau) - S_+(\tau - \tau_1) E_{m0}^-(x, \tau - \tau_1).$$

2. Отбрасывая в решениях (5), (14) члены, содержащие множителем единичную функцию $S_+(\tau - \tau_1)$, что равнозначно осуществлению предельного перехода при $\tau_1 \rightarrow \infty$, получаем решение рассматриваемой задачи для случая, когда источники тепла действуют постоянно.

3. Если в формулах (5), (14) отбросить члены, содержащие множителем единичную функцию $S_+(\tau - \tau_1)$, и перейти к пределу при $\tau \rightarrow \infty$, то получим решение статической задачи термоупругости для бесконечной пла-

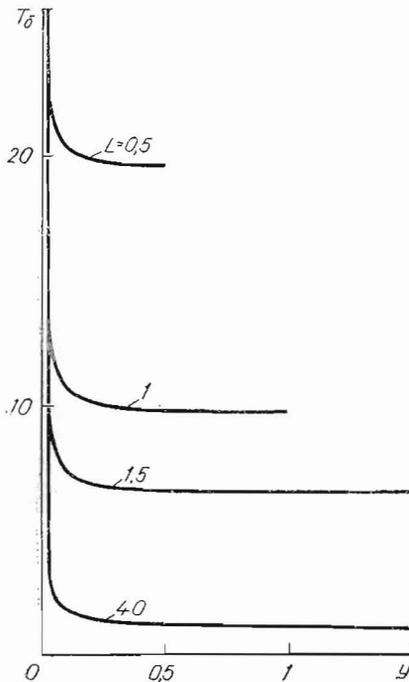


Рис. 1

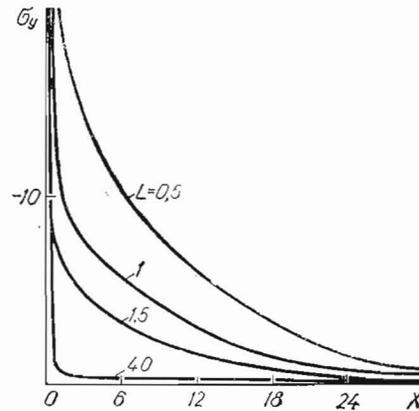


Рис. 2

стинки с теплообменом, нагреваемой периодически расположенными вдоль оси y точечными источниками тепла, а именно:

$$T = \frac{q}{4l\lambda_l} \left[\frac{1}{x} e^{-x|x|} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-|x|\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}}}{\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}} \cos \lambda_m y \right]; \quad (17)$$

$$\sigma_{xx} = 2E_q \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\frac{\lambda_m}{\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}} e^{-|x|\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}} - e^{-|x|\lambda_m} \right) \cos \lambda_m y,$$

$$\sigma_{xy} = 2E_q \operatorname{sgn} x \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m (e^{-|x|\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}} - e^{-|x|\lambda_m}) \sin \lambda_m y, \quad (18)$$

$$\sigma_{yy} = -2E_q \left[x e^{-|x|x} + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \left(\frac{\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}}{\lambda_m} e^{-|x|\sqrt{x^2 + \lambda_m^2}} - e^{-|x|\lambda_m} \right) \cos \lambda_m y \right].$$

На рис. 1, 6 построены графики распределения безразмерной температуры $T_\delta = \frac{4\lambda_t T}{q}$ вдоль осей координат в зависимости от безразмерного значения полурасстояния между источниками тепла $L = \frac{l}{\delta}$. При этом введены без-

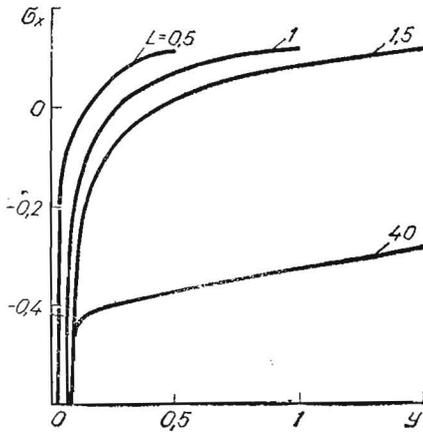


Рис. 3

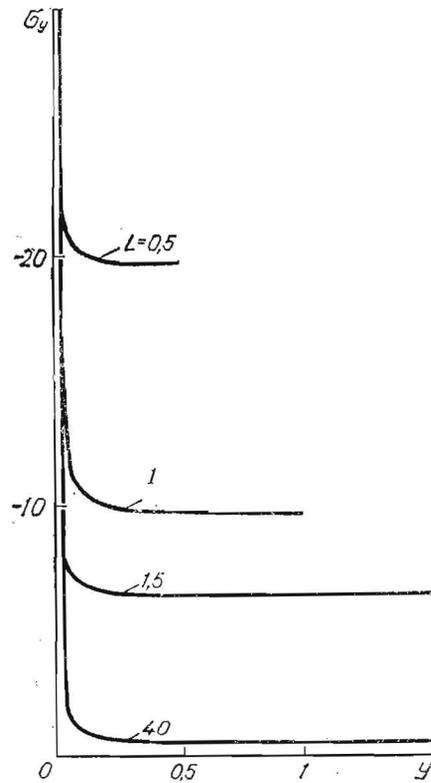


Рис. 4

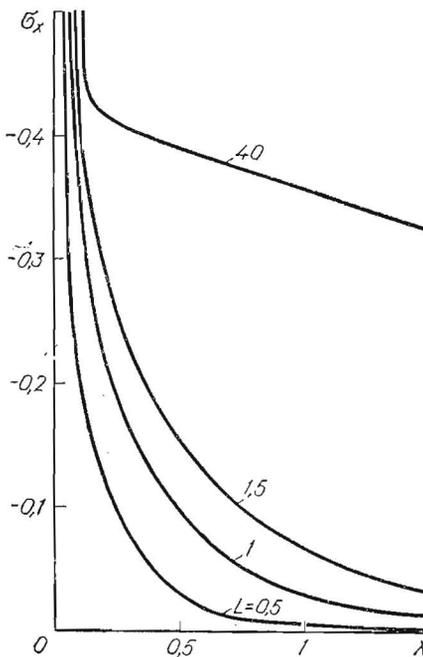


Рис. 5

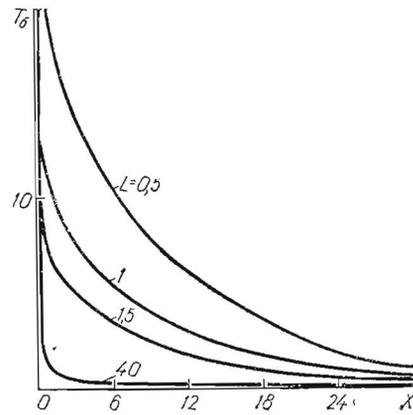


Рис. 6

размерные координаты $X = \frac{x}{\delta}$, $Y = \frac{y}{\delta}$, а критерий Био $Bi = \kappa^2 \delta^2$ принят равным 0,01.

Графики распределения напряжений $\sigma_x = \frac{4\lambda_t \sigma_{xx}}{q\alpha_t E}$, $\sigma_y = \frac{4\lambda_t \sigma_{yy}}{q\alpha_t E}$ вдоль осей координат приведены на рис. 2—5. Из графиков видно, что напряжение $\sigma_x|_{y=0}$, $\sigma_y|_{y=0}$ отрицательно для всех X , а $\sigma_y|_{x=0}$ — для всех Y . Напряжение $\sigma_x|_{x=0}$ изменяет знак с отрицательного на положительный, причем точка изменения знака с ростом L отодвигается от источника тепла. Напря-

жение σ_y затухает вдоль оси X тем быстрее, чем больше расстояние между источниками тепла. Величина напряжений σ_x вдоль оси X на порядок меньше напряжения σ_y .

1. Диткин В. А., Прудников А. П. Операционное исчисление.— М.: Высш. шк., 1975.— 407 с.
2. Подстригац Я. С., Коляно Ю. М. Неустановившиеся температурные поля и напряжения в тонких пластинках.— Киев: Наук. думка, 1972.— 308 с.
3. Снеддон Н. Преобразование Фурье.— М.: Изд-во иностр. лит., 1955.— 668 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
07.12.82

УДК 539.377

А. Н. Кулик

ЗАДАЧА ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛОСЫ-ПЛАСТИНКИ, НАГРЕВАЕМОЙ ДВИЖУЩИМСЯ ИСТОЧНИКОМ ТЕПЛА

В работе [3] определено установившееся температурное поле тонкой полосы-пластинки, нагреваемой источником тепла постоянной мощности, движущимся с постоянной скоростью вдоль средней линии полосы. В работе [2] определены температурные напряжения в полосе-пластинке, нагреваемой неподвижными постоянной мощности источниками тепла. Неустановившиеся температурные напряжения в полосе-пластинке, обусловленные последовательно включаемыми парами неподвижных источников тепла постоянной мощности, определены в работе [1]. В упомянутых работах применялся метод интегральных преобразований. В настоящей работе также используется этот метод для определения температурных напряжений, обусловленных движущимся по заданному закону источником тепла, мощность которого является известной функцией времени.

Если торцы $y = 0$, $y = l$ полосы-пластинки теплоизолированы, то ее температурное поле будет таким же, как и поле бесконечной пластинки, нагреваемой источниками тепла, расположенными соответствующим образом. Пусть в начальный момент времени включается и начинает движение от точки (x_0, y_0) согласно закону

$$x(\tau) = x_0 + \int_0^\tau V_x(\xi) d\xi, \quad y(\tau) = y_0 + \int_0^\tau V_y(\xi) d\xi$$

сосредоточенный источник тепла мощностью $q(\tau)$. Температура t_c внешней среды и коэффициент теплоотдачи α_z с боковых поверхностей $z = \pm\delta$ принимаются постоянными. Для определения температурного поля T имеем уравнение

$$\Delta\vartheta - \kappa^2\vartheta - \frac{1}{a} \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} = -\frac{1}{2\delta\lambda} F(x, y, \tau) \quad (1)$$

и начальное условие $\vartheta|_{\tau=0} = 0$. Здесь

$$\kappa^2 = \frac{\alpha_z}{\lambda\delta}; \quad \vartheta = T - t_c; \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2};$$

$$F(x, y, \tau) = q(\tau) \delta(x - x(\tau)) \left\{ \delta(y - y(\tau)) + \delta(y + y(\tau)) + \sum_{k=1}^{\infty} [\delta(y + y(\tau) + 2kl) + \delta(y + y(\tau) - 2kl) + \delta(y - y(\tau) + 2kl) + \delta(y - y(\tau) - 2kl)] \right\}.$$

Применяя преобразование Лапласа по времени τ и Фурье по координатам x и y , получаем

$$\tilde{\vartheta} = \frac{a}{2\delta\lambda} [s + a(\kappa^2 + \xi^2 + \eta^2)]^{-1} \tilde{F}(\xi, \eta, s). \quad (2)$$