УДК 539.3

А. Р. Гачкевич

К РЕШЕНИЮ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ В НАПРЯЖЕНИЯХ ДЛЯ ТЕЛ С ПЛОСКИМИ ГРАНИЦАМИ

Рассмотрим плоскую задачу об определении температурных полей и напряжений в упругом слое толщиной $2h$, обусловленных нестационарными источниками тепла Q и объемной силой $\vec{F}$. Слой находится в условиях конвективного теплообмена с внешней средой, температура которой постоянна и равна начальной T_0 (в кельвинах). Основания $z = \pm h$ свободны от силовой нагрузки. Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ вектор перемещений $\vec{u}$, скорость $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$ и температура T во всей области слоя равны нулю. В качестве разрешающих функций выберем температуру T и тензор напряжений $\hat{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}$. Тогда при постоянных характеристиках материала в предположении, что все величины не зависят от координаты y, система исходных уравнений динамической термоупругости в напряжениях [2] запишется так:

$$\Delta T + \frac{Q}{\lambda} - \left(\frac{1}{\varkappa} + \frac{3\alpha^2 E T_0}{\lambda(1-2\nu)}\right)\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha T_0}{\lambda}\frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial x} = \rho\,\frac{(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(1-\nu)\sigma_{xx} + \alpha E T - \nu\sigma_{zz}\right],$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \rho\,\frac{(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[(1-\nu)\sigma_{zz} + \alpha E T - \nu\sigma_{xx}\right], \qquad (1)$$

$$\Delta\sigma_{xz} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial z} + \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{2(1+\nu)}{E}\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial t^2},$$

$$\sigma_{yy} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) - \alpha E T,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{zz}}{\partial z^2} + 2\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x \partial z} = (1-\nu)\Delta(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \alpha E \Delta T.$$

Здесь T — отклонение температуры от начальной T_0; λ, $\varkappa$ — коэффициенты тепло- и температуропроводности; α, E, ν — коэффициент линейного расширения, модуль упругости и коэффициент Пуассона; ρ — плотность; Δ — оператор Лапласа; повторяющиеся индексы являются индексами суммирования. Отметим, что последнее уравнение (1) является уравнением совместности деформации для данной двухмерной по пространственным координатам задачи.

Начальные и граничные условия в выбранных разрешающих функциях соответственно будут [2] такими:

$$T = 0, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{xz} = \sigma_{zz} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)}\frac{\partial T}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial t}, \quad \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial t} = 0 \text{ при } t = 0; \qquad (2)$$

$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial z} \pm H^{\pm} T^{\pm} = 0; \quad \sigma_{zz}^{\pm} = 0, \quad \sigma_{xz}^{\pm} = 0, \qquad (3)$$

где $H^{\pm}$ — относительный коэффициент теплоотдачи на основаниях $z = \pm h$; $T^{\pm} = T(t;\ x, \pm h)$; $\frac{\partial T^{\pm}}{\partial z} = \frac{\partial T(t;\ x, \pm h)}{\partial z}$; $\sigma_{ij}^{\pm} = \sigma_{ij}(t;\ x, \pm h)$.

Система уравнений (1) несложными преобразованиями с использованием уравнения совместности может быть приведена к системе независимых уравнений

$$\Delta T + \frac{Q}{\lambda} - \frac{1}{\varkappa}\left[1 + 2\varepsilon_*(1-\nu)\right]\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\alpha T_0(1+\nu)}{\lambda}\frac{\partial \psi}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta\psi - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 2\rho\alpha\frac{(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{(1-\nu)}\Delta T - \frac{1}{(1-\nu)}\left(\frac{\partial F_z}{\partial z} + \frac{\partial F_x}{\partial x}\right),$$

$$\Delta\sigma_{xz} - \frac{1}{c_2^2}\frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x},$$
$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\sigma_{xx}}{\partial t^2} = -\frac{\nu}{c_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\sigma_{xz}}{\partial x\partial z} + \rho\alpha(1+\nu)\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\partial F_x}{\partial x},\qquad (4)$$
$$\sigma_{zz} = \psi - \sigma_{xx},\quad \sigma_{yy} = \nu\psi - \alpha ET.$$

Здесь $\varepsilon_* = \frac{\alpha^2\varkappa(1+\nu)ET_0}{(1-\nu)(1-2\nu)\lambda}$ — параметр связанности [1]; $\psi = \sigma_{xx} + \sigma_{zz}$; $c_1^2 = \frac{(1-\nu)E}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}$, $c_2^2 = \frac{E}{2(1+\nu)\rho}$ — скорости распространения упругих волн расширения и искажения [1]; $c_3^2 = 2c_2^2$.

Сформулируем в введенных функциях условия (2), (3). Учитывая, что поверхности слоя свободны от внешней силовой нагрузки, т. е. σ_{zz} и σ_{xz} равны нулю при $z = \pm h$, и как следствие $\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial t} = 0$ при $z = \pm h$, из четвертого уравнения (4) для поверхностного значения компоненты σ_{xx} получаем

$$\frac{\partial^2\sigma_{xx}^{\pm}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2\sigma_{xx}^{\pm}}{\partial t^2} = \rho\alpha(1+\nu)\frac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial t^2} - \frac{\partial F_x^{\pm}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)^{\pm},\qquad (5)$$

где $c_4^2 = \frac{2c_2^2}{(1-\nu)}$. Так как на поверхности слоя $\sigma_{xx}^{\pm} = \psi^{\pm}$, то значения $\sigma_{xx}^{\pm}$, найденные из соотношения (5), являются граничными для ψ, а условие (5) — для функции ψ при $z = \pm h$.

С учетом изложенного система исходных начальных и граничных условий запишется так:

$$T = 0,\quad \psi = 0,\quad \sigma_{xz} = 0,\quad \sigma_{xx} = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{2\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial t},$$
$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial t} = 0,\quad \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial t}\ \text{при}\ t = 0;\qquad (6)$$
$$\frac{\partial T^{\pm}}{\partial z} \pm H^{\pm}T^{\pm} = 0,\quad \frac{\partial^2\psi^{\pm}}{\partial x^2} - \frac{1}{c_4^2}\frac{\partial^2\psi^{\pm}}{\partial t^2} = \rho\alpha(1+\nu)\frac{\partial^2 T^{\pm}}{\partial t^2} -$$
$$-\frac{\partial F_x^{\pm}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z}\right)^{\pm},\quad \sigma_{xz}^{\pm} = 0,\quad \sigma_{xx}^{\pm} = \psi^{\pm}.\qquad (7)$$

Как видно из системы уравнений (4) и условий (6), (7), решение исходной задачи при известных функциях Q и $\vec{F}$ сводится к совместному решению первых трех взаимосвязанных уравнений и последующему решению четвертого при соответствующих начальных и граничных условиях.

Отметим, что в случае одномерной по пространственной координате задачи из соотношений (4) — (7) приходим при определении компонент напряжений к уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c_1^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 2\frac{\rho\alpha(1+\nu)}{(1-\nu)}\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{1}{(1-\nu)}\frac{\partial F_z}{\partial z} - \frac{\alpha E}{(1-\nu)}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2},\qquad (8)$$

начальным

$$\psi = 0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{2\alpha E}{(1-2\nu)}\frac{\partial T}{\partial t}\ \text{при}\ t = 0\qquad (9)$$

и граничному

$$\psi^{\pm} = -\frac{\alpha E}{(1-\nu)}T^{\pm}\qquad (10)$$

условиям, а также к соотношениям

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} = \nu\psi - \alpha ET,\quad \sigma_{zz} = \psi - \sigma_{xx} = (1-\nu)\psi + \alpha ET,\qquad (11)$$

которые при $Q = 0$ и $\vec{F} = 0$ являются исходными соотношениями известной задачи Даниловской о тепловых напряжениях в упругом полупространстве при тепловом ударе на поверхности [1], сформулированной относительно функции $\psi = \sigma_{xx} + \sigma_{zz}$ — суммы нормальных напряжений в направлении осей x и z.

1. *Коваленко А. Д.* Термоупругость.— Киев : Вища шк., 1975.— 216 с.
2. *Подстригач Я. С., Бурак Я. И., Гачкевич А. Р., Чернявская Л. В.* Термоупругость электропроводных тел.— Киев : Наук. думка, 1977.— 248 с.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
19.01.83

УДК 536.12:539.377

В. И. Громовык, С. Т. Стасюк, М. В. Боженко

О ВЛИЯНИИ ТЕПЛООТДАЧИ НА ТЕРМОНАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ШАРА

В работе [7] исследовано напряженно-деформированное состояние трансверсально-изотропного полого шара при наличии ползучести. При этом принимались заданными температуры внутренней и внешней поверхностей шара и пренебрегалось учетом теплоотдачи, несмотря на то, что именно теплоотдача является одним из существенных факторов, влияющих на термонапряженное состояние элементов конструкций [1, 4—6]. Настоящая работа посвящена выяснению влияния теплоотдачи, мощности внутренних источников тепла на величину температурных напряжений, возникающих в шаре, выполненном из трансверсально-изотропного материала.

Рассмотрим сплошной шар радиусом R_2, отнесенный к сферической системе координат r, φ, θ. Пусть шар нагревается равномерно распределенными по объему $\vartheta = \frac{4}{3}\pi R_1^3$ $(R_1 \leqslant R_2)$ внутренними источниками тепла мощности q, а теплообмен между поверхностью $r = R_2$ и внешней средой с температурой t_c осуществляется согласно закону Ньютона. Для определения температурного поля в шаре имеем уравнение теплопроводности

$$\frac{d^2t}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dt}{dr} = -Q_0[1 - S_-(r - R_1)] \tag{1}$$

и граничные условия

$$\frac{dt}{dr} = 0 \text{ при } r = 0, \quad \frac{dt}{dr} = -\frac{\alpha}{\lambda}(t - t_c) \text{ при } r = R_2, \tag{2}$$

где $Q_0 = q/\lambda$; $S_-(r - R_1)$ — асимметричная единичная функция; α — коэффициент теплоотдачи; λ — коэффициент теплопроводности вдоль координаты r; t — температура.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$t = C_1 + C_2 r^{-1} - \frac{Q_0}{6}\left[r^2 - \left(r^2 + 2\frac{R_1^3}{r} - 3R_1^2\right)S_-(r - R_1)\right],$$

которое после определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из условий (2) и перехода к безразмерным величинам перепишем в следующей форме:

$$\vartheta = \frac{\rho_0}{\mathrm{Bi}} + \frac{1}{6}\left\{3 - 2\rho_0 - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2 + 2\frac{\rho_0}{\rho} - 3\right]S_-(\rho - \rho_0)\right\}. \tag{3}$$

Здесь $\vartheta = \lambda(t - t_c)/qR_1^2$; $\mathrm{Bi} = 3\alpha R_2/\lambda$; $\rho_0 = R_1/R_2$; $\rho = r/R_2$.

Отметим, что решение (3) можно получить также из формулы (31) работы [3], положив $\lambda_t^{(2)} = \lambda_t^{(1)} = \lambda$.