рывны, как нетрудно заметить, направлена теоретико-множественным включением. В силу предложений 1 и 3 система $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$ определяет на алгебре $L(A)$ $\mathfrak{L}(\mathfrak{R})$-топологию. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема 3. Левое (правое) регулярное представление топологической алгебры A осуществляет изоморфизм в алгебру $L(A)$, наделенную $\mathfrak{R}(\mathfrak{L})$-топологией.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{R}$, тогда для любой окрестности нуля V на A существует окрестность нуля V' такая, что $S_R(V') \subset V$, т. е. $V'_L \subset V^S$. Поэтому алгебраический изоморфизм $A \to A_L$ непрерывен. Поскольку в $\mathfrak{R}$ существует множество S_0, содержащее единицу e алгебры A, то для любой окрестности нуля V на A $V_L = V^e \supset V^{S_0}$. Окрестность V^{S_0} принадлежит $\mathfrak{R}$-топологии, следовательно, алгебраический изоморфизм $A \to A_L$ открыт.

1. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
2. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
3. *Adasch N., Ernst B., Keim D.* Topological vektor spaces.— Berlin : Springer, 1978.— 125 p.
4. *Arens R.* Linear topological division algebras.— Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 57, p. 623—630.
5. *Zelazko W.* Metric generalization of Banach algebras.— Warshava : Rozpravy nat., 1965.— 70 p.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
06.07.83

УДК 512.8

Р. В. Коляда, В. М. Петричкович

О ПРИВОДИМОСТИ МНОГОЧЛЕННЫХ МАТРИЦ К ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Пусть $A(x) = Ex^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_m$ — многочленная унитальная матрица, где A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ — $n \times n$-матрицы над $\mathbb{C}$; E — единичная матрица. Пусть, далее, матрица $A(x)$ не имеет кратных характеристических корней. Тогда из работы [4] следует, что число k левых линейных унитальных делителей матрицы $A(x)$ удовлетворяет неравенству $m^n \leqslant k \leqslant \binom{mn}{n}$. Если $k = \binom{mn}{n}$, то $A(x)$ преобразованием подобия не приводится к клеточно-треугольному виду [3]. В настоящей работе доказано, что матрица $A(x)$ преобразованием подобия приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда $k = m^n$.

На основании результатов работы [1] матрица $A(x)$ полускалярными эквивалентными преобразованиями приводится к виду

$$F(x) = QA(x)R(x) = \begin{Vmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ f_1(x) & \cdots & f_{n-1}(x) & \Delta(x) \end{Vmatrix},$$

где Q — числовая неособенная матрица; $R(x)$ — обратимая над $\mathbb{C}[x]$ матрица; $\Delta(x) = \det A(x)$. Через $\bar{f}(x)$ обозначим строку $\bar{f}(x) = \| f_1(x) \ldots$ $\ldots f_{n-1}(x) - 1 \|$.

Лемма 1. Число k левых линейных унитальных делителей матрицы $A(x)$ равно числу отличных от нуля миноров порядка n матрицы

$$F = \begin{Vmatrix} \bar{f}(\alpha_1) \\ \bar{f}(\alpha_2) \\ \vdots \\ \bar{f}(\alpha_{mn}) \end{Vmatrix},$$

где α_i, $i = 1, 2, \ldots, mn$ — характеристические корни матрицы $A(x)$.

Доказательство леммы проводится аналогично доказательству теоремы 1 в работе [3].

Лемма 2. Пусть

$$T(x) = \begin{Vmatrix} T_1(x) & & & \ast \\ & T_2(x) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & T_l(x) \end{Vmatrix}$$

— клеточно-треугольная унитальная матрица степени m, причем $(\det T_i(x), \det T_j(x)) = 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, l$, $i \neq j$. Пусть, далее, $T_i(x) = B_i(x) C_i(x)$, где $B_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ — унитальная матрица степени s, $1 \leqslant s < m$. Тогда существует унитальная матрица

$$B(x) = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_1(x) & & & \ast \\ & \tilde{B}_2(x) & & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \tilde{B}_l(x) \end{Vmatrix},$$

$\det \tilde{B}_i(x) = \det B_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, которая является левым делителем матрицы $T(x)$, т. е. $T(x) = B(x) C(x)$.

Эта лемма следует из доказательства теоремы 3 в работе [2].

Теорема. Унитальная многочленная матрица $A(x)$ без кратных характеристических корней преобразованием подобия приводится к диагональному виду тогда и только тогда, когда число k ее левых линейных унитальных делителей равно m^n.

Доказательство. Достаточность. Здесь и в дальнейшем, где это не оговорено, под делителем матрицы будем понимать левый делитель. Из работ [5, 6] следует, что матрица $A(x)$ без кратных характеристических корней обладает полным набором линейных делителей. Это значит, что множество характеристических корней матрицы $A(x)$ можно разбить на m непересекающихся множеств

$$S_i = \{\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_n}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

по n элементов в каждом так, что каждому множеству S_i соответствует линейный делитель $Ex - D_i$ матрицы $A(x)$, характеристическими корнями которого являются элементы S_i. Каждому делителю $Ex - D_i$ матрицы $A(x)$ соответствует набор из n линейно независимых строк $(\bar{f}(\alpha_{i_1}), \bar{f}(\alpha_{i_2}), \ldots, \bar{f}(\alpha_{i_n}))$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и наоборот.

Обозначим через M_q множество наборов строк вида

$$(\bar{f}(x_{j1}), \ldots, \bar{f}(x_{jq}), \bar{f}(\alpha_{1,q+1}), \ldots, \bar{f}(\alpha_{1n})),$$

где $1 \leqslant q < n$; $\alpha_{1,q+1}, \ldots, \alpha_{1n} \in S_1$ фиксированы; $x_{j1}, \ldots, x_{jq}$ пробегают все элементы множеств S_i, $i = 2, 3, \ldots, m$. Так как $k = m^n$, то, учитывая леммы 2 и 3 из работы [4], получаем, что в множестве M_q имеется точно $(m-1)^q$ наборов, каждый из которых состоит из линейно независимых строк.

Положим $q = 1$. Тогда в M_1 имеются $m - 1$ наборы линейно независимых строк. Без ограничения общности будем считать, что этими наборами есть

$$(\bar{f}(\alpha_{i1}), \quad \bar{f}(\alpha_{12}), \ldots, \bar{f}(\alpha_{1n})), \quad i = 2, 3, \ldots, m.$$

Учитывая и набор

$$(\bar{f}(\alpha_{11}), \quad \bar{f}(\alpha_{12}), \ldots, \bar{f}(\alpha_{1n})) \tag{1}$$

линейно независимых строк, соответствующих множеству S_1, получаем, что матрица $A(x)$ имеет точно m линейных унитальных делителей таких, что $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ являются характеристическими корнями каждого из них. Как уже отмечалось, набору (1) линейно независимых строк соответствует линейный унитальный делитель $Ex - D_1$ матрицы $A(x)$, характеристическими корнями которого являются $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}$, т. е. $A(x) = (Ex - D_1) \times \times \tilde{A}(x)$. Так как $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}$ попарно различны, то существует неособенная числова матрица U такая, что

$$UA(x) = \begin{Vmatrix} (x-\alpha_{11})\, a'_{11}(x) & \cdots & (x-\alpha_{11})\, \alpha'_{1n}(x) \\ (x-\alpha_{12})\, a'_{21}(x) & \cdots & (x-\alpha_{12})\, a'_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (x-\alpha_{1n})\, a'_{n1}(x) & \cdots & (x-\alpha_{1n})\, a'_{nn}(x) \end{Vmatrix}. \tag{2}$$

Тогда наибольший общий делитель $\delta_{n-1}(x)$ миноров $(n - 1)$-го порядка подматрицы $\| (x - \alpha_{1k})\, a'_{kl}(x) \|$, $k = 2, 3, \ldots, n$; $l = 1, 2, \ldots, n$ матрицы (2) равен $d_{n-1}(x) = \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=2}^{n} (x - \alpha_{ij})$. Действительно, в противном случае матрица $U\,A(x)$, а значит, и матрица $A(x)$ имели бы больше, чем m, линейных унитальных делителей, каждый из которых содержал бы $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \ldots, \alpha_{1n}$ в качестве своих характеристических корней.

В силу следствия 1 [2] существует неособенная числовая матрица V_1 такая, что

$$UA(x)\, V_1 = \begin{Vmatrix} d_{11}(x) & d_{12}(x) & d_{1n}(x) \\ 0 & & A_{n-1}(x) \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

где $d_{11}(x) = \prod_{i=1}^{m} (x - \alpha_{i_1})$; $A_{n-1}(x)$ — унитальная матрица степени m и порядка $n - 1$.

Так как число линейных унитальных делителей матрицы $A(x)$, а значит, и матрицы (3) равно m^n, то, учитывая лемму 2, заключаем, что число линейных унитальных делителей подматрицы $A_{n-1}(x)$ матрицы (3) равно m^{n-1} и каждый линейный унитальный делитель матрицы (3) содержит один и только один корень многочлена $d_{11}(x)$ в качестве своего характеристического корня.

Считаем, что для некоторого α_{r1}, $1 \leqslant r \leqslant m$ в матрице (3) $d_{1j}(\alpha_{r1}) = 0$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$. В противном случае этого можно добиться, прибавляя к строке $\| d_{12}(x) \ldots d_{1n}(x) \|$ линейную комбинацию строк матрицы $A_{n-1}(x)$, поскольку $\det A_{n-1}(\alpha_{r1}) \neq 0$. Тогда $d_{11}(x) \mid d_{1j}(x)$ для всех $j = 2, 3, \ldots, n$. Действительно, в противном случае найдется такое α_{s1}, $d_{11}(\alpha_{s1}) = 0$ и $\alpha_{s1} \neq \alpha_{r1}$, что строка $\| d_{11}(\alpha_{s1})\, d_{12}(\alpha_{s1}) \ldots d_{1n}(\alpha_{s1}) \|$ ненулевая. Это значит, что существует линейный унитальный делитель матрицы (3) такой, что α_{r1} и α_{s1} являются его характеристическими корнями, что противоречит предыдущему замечанию.

Теперь очевидно, что матрицу (3) можно привести к виду

$$UA(x)\, V_1 V_2 = \begin{Vmatrix} d_{11}(x) & 0 \\ 0 & A_{n-1}(x) \end{Vmatrix}.$$

Для завершения доказательства достаточности теоремы используем индукцию.

Необходимость легко доказывается, если учесть, что число унитальных делителей матрицы $PA(x)P^{-1}$ равно числу унитальных делителей матрицы $A(x)$, и то, что с данным характеристическим многочленом $\psi(x)$, $\psi(x) \mid \Delta(x)$, $\deg \psi = n$ существует не более одного линейного унитального делителя матрицы $A(x)$.

Из этой теоремы при $m = 1$ вытекает такое следствие.

Следствие. Если характеристические числа числовой матрицы A различны, то A преобразованием подобия приводится к диагональному виду.

Диагональный вид матрицы $PA(x)P^{-1}$ можно записать на основании следующей леммы.

Лемма 3. Пусть для матрицы $A(x)$ без кратных характеристических корней существует числовая матрица P такая, что $PA(x)P^{-1}$ — диагональная матрица. Тогда многочлен $d_{jj}(x) = \prod_{i=1}^{m}(x - \alpha_{ij})$, $d_{jj}(x) \mid \Delta(x)$, является диагональным элементом матрицы $PA(x)P^{-1}$ в том и только том случае, если $\operatorname{rang} M_{A(x)}(d_{jj}) < n$, где

$$M_{A(x)}(d_{jj}) = \begin{Vmatrix} A(\alpha_{1j}) \\ A(\alpha_{2j}) \\ \vdots \\ A(\alpha_{mj}) \end{Vmatrix}.$$

Так как

$$\operatorname{rang} M_{PA(x)P^{-1}}(d_{jj}) = \operatorname{rang} M_{A(x)}(d_{jj}),$$

то доказательство леммы получим сразу, рассмотрев матрицу $PA(x)P^{-1}$ диагонального вида.

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. К. : Наук. думка, 1977, с. 61—66.
2. *Петричкович В. М.* Розкладність на множники клітково-діагональних і клітково-трикутних поліноміальних матриць.— Там же, с. 92—97.
3. *Петричкович В. М.* Абсолютная разложимость матричных многочленов.— Мат. методы и физ.-мех. поля, 1979, вып. 9, с. 37—41.
4. *Петричкович В. М.* О числе решений матричного уравнения.— Там же, 1980, вып. 12, с. 56—58.
5. *Петричкович В. М.* Вопросы разложимости матричных многочленов на множители.— Там же, 1981, вып. 14, с. 19—26.
6. *Dennis J. E., Traub J. F., Weber R. P.* The algebraic theory of matrix polinomials.— SIAM J. Numer. Anal., 1976, 13, N 6, p. 831—845.

Ин-т прикл. пробл. механики
и математики АН УССР, Львов

Получено
30.03.83

УДК 539.377

В. М. Флячок, Р. Н. Швец

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ МЕХАНОТЕРМОДИФФУЗИИ АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК

На основе выведенных в работе [4] основных уравнений рассмотрим некоторые общие теоремы теории анизотропных оболочек с учетом термодиффузионных процессов. Некоторые теоремы сопряженной термоупругости ранее рассматривались в классической постановке для изотропных оболочек [2] и в уточненной — для анизотропных [3].

Принцип Лагранжа. Аналогия массовых сил. Рассмотрим общее вариационное уравнение (5) из работы [4] для квазистатических задач. Принимая в этом случае в качестве предварительно удовлетворенных соотношения